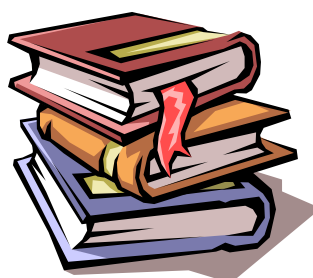


Tailieumontoan.com



Điện thoại (Zalo) 039.373.2038



CÁC CHUYÊN ĐỀ ĐẠI SỐ
LUYỆN THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN



Tài liệu sưu tầm, ngày 8 tháng 12 năm 2020

TỔNG HỢP CHUYÊN ĐỀ TRỌNG TÂM
THI VÀO

10 CHUYÊN & HỌC SINH GIỎI ĐẠI SỐ 9



NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA

Mục lục

Chủ đề 1: Biến đổi đại số	07
Chủ đề 2: Hàm số bậc nhất, hàm số bậc hai	32
Chủ đề 3: Hệ phương trình	82
Chủ đề 4: Giải bài toán bằng cách lập phương trình, hệ phương trình	121
Chủ đề 5: Một số phương pháp giải phương trình vô tỷ	135
Chủ đề 6: Một số kỹ thuật chứng minh bất đẳng thức	186
Chủ đề 7: Một số phương pháp giải phương trình nghiệm nguyên	271
Chủ đề 8: Một số bài toán số nguyên tố, số chính phương	290
Chủ đề 9: Các đề ôn thi vào lớp 10	327



Chương 1: CĂN THỨC

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Căn thức bậc hai:

- Căn bậc hai của số thực a là số thực x sao cho $x^2 = a$.
- Cho số thực a không âm, căn bậc hai số học của a ký hiệu là $\sqrt{a}$ là một số thực không âm x sao cho bình phương của nó bằng a .

$$\begin{cases} a \geq 0 \\ \sqrt{a} = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 = a \end{cases}$$

- Với hai số thực không âm a, b ta có: $\sqrt{a} \leq \sqrt{b} \Leftrightarrow a \leq b$
- Khi biến đổi các biểu thức liên quan đến căn bậc hai ta cần lưu ý:

$$+ \sqrt{A^2} = |A| = \begin{cases} A & \text{nếu } A \geq 0 \\ -A & \text{nếu } A < 0 \end{cases}$$

$$+ \sqrt{AB} - |A|\sqrt{B} = A\sqrt{B} \text{ với } A, B \geq 0; \sqrt{AB} - |A|\sqrt{B} = -A\sqrt{B} \text{ với } A < 0, B \geq 0$$

$$+ \sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt{AB}}{\sqrt{B^2}} = \frac{\sqrt{AB}}{B} \text{ với } A, B \geq 0; B \neq 0$$

$$+ \frac{M}{\sqrt{A}} = \frac{M\sqrt{A}}{A} \text{ với } A > 0; (\text{Đây gọi là phép khử căn thức ở mẫu})$$

$$+ \frac{M}{\sqrt{A} \pm \sqrt{B}} = \frac{M(\sqrt{A} \mp \sqrt{B})}{A - B} \text{ với } A, B \geq 0; A \neq B; (\text{Đây gọi là phép trục căn thức ở mẫu})$$

2. Căn thức bậc ba, bậc n:

a) Căn thức bậc ba:

Căn bậc 3 của một số a , ký hiệu là $\sqrt[3]{a}$ là số x sao cho $x^3 = a$

- Cho $a \in \mathbb{R}$; $\sqrt[3]{a} = x \Rightarrow x^3 = (\sqrt[3]{a})^3 = a$
- Mỗi số thực a đều có duy nhất một căn bậc 3.
- Nếu $a > 0$ thì $\sqrt[3]{a} > 0$
- Nếu $a < 0$ thì $\sqrt[3]{a} < 0$
- Nếu $a = 0$ thì $\sqrt[3]{a} = 0$
- $\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$ với mọi $b \neq 0$
- $\sqrt[3]{ab} = \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b}$ với mọi a, b
- Nếu $a < b$ thì $\sqrt[3]{a} < \sqrt[3]{b}$

- $A\sqrt[3]{B} = \sqrt[3]{A^2B}$
- $\sqrt[3]{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt[3]{AB^2}}{B}$ với $B \neq 0$
- $\frac{\sqrt[3]{A}}{B} = \sqrt[3]{\frac{A}{B^3}}$
- $\frac{1}{\sqrt[3]{A} \pm \sqrt[3]{B}} = \frac{\sqrt[3]{A^2} \mp \sqrt[3]{AB} + \sqrt[3]{B^2}}{A \pm B}$

b) Căn thức bậc n:

Cho số $a \in \mathbb{R}$; $n \in \mathbb{N}$; $n \geq 2$. Căn bậc n của một số a là một số mà lũy thừa bậc n của nó bằng a.

Trường hợp n là số lẻ: $n=2k+1$, $k \in \mathbb{N}$.

Mọi số thực a đều có một căn bậc lẻ duy nhất:

$$^{2k+1}\sqrt{a} = x \Rightarrow x^{2k+1} = a; \text{ nếu } a > 0 \text{ thì } ^{2k+1}\sqrt{a} > 0; \text{ nếu } a < 0 \text{ thì } ^{2k+1}\sqrt{a} < 0; \text{ nếu } a = 0 \text{ thì } ^{2k+1}\sqrt{a} = 0$$

Trường hợp n là số chẵn: $n=2k$.

Mọi số thực $a > 0$ đều có hai căn bậc chẵn đối nhau. Căn bậc chẵn dương ký hiệu là $^{2k}\sqrt{a}$ (gọi là căn bậc 2k số học của a). Căn bậc chẵn âm ký hiệu là $-^{2k}\sqrt{a}$; $^{2k}\sqrt{a} = x \Leftrightarrow x > 0$ và $x^{2k} = a$;

$$-^{2k}\sqrt{a} = x \Leftrightarrow x \leq 0 \text{ và } x^{2k} = a;$$

MỘT SỐ DẠNG BÀI TẬP TIÊU BIỂU:

Dạng 1 : Thu gọn các biểu thức đại số và tính giá trị của biểu thức:

Phương pháp:

Biến đổi các biểu thức trong dấu $\sqrt{\quad}$ về dạng $\sqrt{A^2} = |A|$, sau đó dựa vào dấu của A để mở giá trị tuyệt đối nếu có

Ngoài ra cần nắm được các đẳng thức cơ bản quen thuộc:

- $ab + bc + ca = m \Rightarrow a^2 + m = a^2 + ab + bc + ca = (a+b)(a+c)$;
- $a + b + c = n \Rightarrow na + bc - (a+b+c)a + bc = (a+b)(a+c)$;
- Nếu $abc = 1$ thì $\frac{1}{a+ab+1} + \frac{1}{b+bc+1} + \frac{1}{ca+c+1} = 1$;
- Nếu $a+b+c=0$ thì $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$, $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2$ với $abc \neq 0$

Ví dụ 1

Rút gọn các biểu thức:

a) $A = \sqrt{x} - \sqrt{x - \sqrt{x} + \frac{1}{4}}$ khi $x \geq 0$,

b) $B = \sqrt{4x - 2\sqrt{4x-1}} + \sqrt{4x + 2\sqrt{4x-1}}$ khi $x \geq \frac{1}{4}$,

c) $C = \sqrt{9 - \sqrt{3\sqrt{3} + 5\sqrt{8 + 10\sqrt{7 - 4\sqrt{3}}}}}$

Lời giải

$$a) A = \sqrt{x} - \sqrt{x - \sqrt{x} + \frac{1}{4}} = \sqrt{x} - \sqrt{\left(\sqrt{x} - \frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{x} - \left|\sqrt{x} - \frac{1}{2}\right|$$

$$+ \text{ Nếu } \sqrt{x} \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{4} \text{ thì } \left|\sqrt{x} - \frac{1}{2}\right| = \sqrt{x} - \frac{1}{2} \Rightarrow A = \frac{1}{2}$$

$$+ \text{ Nếu } \sqrt{x} < \frac{1}{2} \Leftrightarrow 0 \leq x < \frac{1}{4} \text{ thì } \left|\sqrt{x} - \frac{1}{2}\right| = -\sqrt{x} + \frac{1}{2} \Rightarrow A = 2\sqrt{x} - \frac{1}{2}$$

$$b) B = \sqrt{4x - 2\sqrt{4x - 1}} + \sqrt{4x + 2\sqrt{4x - 1}} = \sqrt{4x - 1 - 2\sqrt{4x - 1} + 1} + \sqrt{4x - 1 + 2\sqrt{4x - 1} + 1}$$

$$\text{Hay } B = \sqrt{(\sqrt{4x - 1} - 1)^2} + \sqrt{(\sqrt{4x - 1} + 1)^2} = \left|\sqrt{4x - 1} - 1\right| + \left|\sqrt{4x - 1} + 1\right|$$

$$= \left|\sqrt{4x - 1} - 1\right| + \sqrt{4x - 1} + 1$$

$$\text{Nếu } \sqrt{4x - 1} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow 0.4x - 1 \geq 1 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2} \text{ thì } \left|\sqrt{4x - 1} - 1\right| = \sqrt{4x - 1} - 1 \text{ suy ra } B = 2\sqrt{4x - 1}$$

$$\text{Nếu } \sqrt{4x - 1} - 1 < 0 \Leftrightarrow 4x - 1 < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{4} \leq x < \frac{1}{2} \text{ thì } \left|\sqrt{4x - 1} - 1\right| = -\sqrt{4x - 1} + 1 \text{ suy ra } B = 2$$

$$c) \text{ Để ý rằng } 7 - 4\sqrt{3} = (2 - \sqrt{3})^2 - \sqrt{7 - 4\sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3}$$

$$\text{Suy ra } C = \sqrt{9 - \sqrt{5\sqrt{3} + 5\sqrt{8} + 10(2 - \sqrt{3})}} = \sqrt{9 - \sqrt{5\sqrt{3} + 5\sqrt{28 - 10\sqrt{3}}}}$$

$$= \sqrt{9 - \sqrt{3\sqrt{3} + 5\sqrt{(5 - \sqrt{3})^2}}} \text{ hay } c = \sqrt{9 - \sqrt{5\sqrt{3} + 5(5 - \sqrt{3})}} = \sqrt{9 - \sqrt{25}} = \sqrt{9 - 5} = \sqrt{4} = 2$$

Ví dụ 2. Chứng minh:

$$a) A = \sqrt{8 - 4\sqrt{3}} - \sqrt{8 + 4\sqrt{3}} = -2\sqrt{2}$$

$$b) B = \sqrt[3]{1 + \frac{\sqrt{84}}{9}} + \sqrt[3]{1 - \frac{\sqrt{84}}{9}} \text{ là một số nguyên (Trích đề Tuyển sinh vào lớp 10 chuyên Trường THPT chuyên ĐHQG Hà Nội 2006).}$$

$$c) \text{ Chứng minh rằng } x = \sqrt[3]{a + \frac{a+1}{3}\sqrt{\frac{8a-1}{3}}} + \sqrt[3]{a - \frac{a+1}{3}\sqrt{\frac{8a-1}{3}}} \text{ với } a \geq \frac{1}{8} \text{ là số tự nhiên}$$

$$d) \text{ Tính } x+y \text{ biết } (x + \sqrt{x^2 + 2019})(y + \sqrt{y^2 + 2019}) = 2019$$

$$e) \text{ Cho các số thực } x, y \text{ thỏa mãn: } (x + \sqrt{y^2 + 1})(y + \sqrt{x^2 + 1}) = 1. \text{ Tính giá trị của } x+y.$$

Lời giải:

$$a) \text{ Dễ thấy } A \leq 0,$$

Cách 1:

$$\text{Ta có } A^2 = \left(\sqrt{8 - 4\sqrt{3}} - \sqrt{8 + 4\sqrt{3}}\right)^2 = 8 - 4\sqrt{3} + 8 + 4\sqrt{3} - 2\sqrt{8 - 4\sqrt{3}} \cdot \sqrt{8 + 4\sqrt{3}}$$

$$= 16 - 2.4 = 8$$

$$\text{Suy ra } A = -\sqrt{8} = -2\sqrt{2}$$

Cách 2: Ta viết lại:

$$A = \sqrt{(\sqrt{6} - \sqrt{2})^2} - \sqrt{(\sqrt{6} + \sqrt{2})^2} = |\sqrt{6} - \sqrt{2}| - |\sqrt{6} + \sqrt{2}| = \sqrt{6} - \sqrt{2} - \sqrt{6} - \sqrt{2} = -2\sqrt{2}$$

b) Áp dụng hằng đẳng thức $(u + v)^3 = u^3 + v^3 + 3uv(u + v)$ ta có:

$$B^3 = \left(\sqrt[3]{1 + \frac{\sqrt{84}}{9}} + \sqrt[3]{1 - \frac{\sqrt{84}}{9}} \right)^3$$

$$= 1 + \frac{\sqrt{84}}{9} + 1 - \frac{\sqrt{84}}{9} + 3 \left(\sqrt[3]{1 + \frac{\sqrt{84}}{9}} \sqrt[3]{1 - \frac{\sqrt{84}}{9}} \right) \left(\sqrt[3]{1 + \frac{\sqrt{84}}{9}} + \sqrt[3]{1 - \frac{\sqrt{84}}{9}} \right)$$

$$\text{Hay } B^3 = 2 + 3 \sqrt[3]{\left(1 + \frac{\sqrt{84}}{9}\right) \left(1 - \frac{\sqrt{84}}{9}\right)} \cdot B \Leftrightarrow B^3 = 2 + 3 \sqrt[3]{1 - \frac{84}{81}} B \Leftrightarrow B^3 = 2 - B \Leftrightarrow B^3 + B - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (B - 1)(B^2 + B + 2) = 0 \text{ mà } B^2 + B + 2 = \left(B + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} > 0 \text{ suy ra } B = 1. \text{ Vậy } B \text{ là số nguyên.}$$

c) Áp dụng hằng đẳng thức $(u + v)^3 = u^3 + v^3 + 3uv(u + v)$

$$\text{Ta có } x^3 = 2a + (1 - 2a)x \Leftrightarrow x^3 + (2a - 1)x - 2a = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x^2 + x + 2a) = 0 \quad (1)$$

Xét đa thức bậc hai $x^2 + x + 2a$ với $\Delta = 1 - 8a \geq 0$

$$\text{Khi } a = \frac{1}{8} \text{ ta có } x = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} + \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = 1$$

Khi $a > \frac{1}{8}$, ta có $\Delta = 1 - 8a$ âm nên đa thức (1) có nghiệm duy nhất $x = 1$. Vậy với mọi

$$a \geq \frac{1}{8}$$

$$\text{Ta có } x = \sqrt[3]{a + \frac{a+1}{3} \sqrt{\frac{8a-1}{3}}} + \sqrt[3]{a - \frac{a+1}{3} \sqrt{\frac{8a-1}{3}}} = 1 \text{ là số tự nhiên}$$

d) Nhận xét $(\sqrt{x^2 + 2019} + x)(\sqrt{x^2 + 2019} - x) = x^2 + 2019 - x^2 = 2019$.

Kết hợp với giả thiết suy ra $\sqrt{x^2 + 2019} - x = \sqrt{y^2 + 2019} + y$

$$\Rightarrow \sqrt{y^2 + 2019} + y + \sqrt{x^2 + 2019} + x = \sqrt{x^2 + 2019} - x + \sqrt{y^2 + 2019} - y \Leftrightarrow x + y = 0$$

Tổng quát ta có $(\sqrt{x^2 + a} + x)(\sqrt{y^2 + a} + y) = a$ thì $x + y = 0$

e) Nhân 2 vế đẳng thức với: $(x - \sqrt{1 + y^2})(y - \sqrt{1 - x^2})$ ta có

$$(x + \sqrt{y^2 + 1})(x - \sqrt{1 + y^2})(y - \sqrt{1 - x^2})(y + \sqrt{x^2 + 1}) = (x - \sqrt{1 + y^2})(y - \sqrt{1 - x^2}). \text{ Hay}$$

$$(x^2 - y^2 - 1)(y^2 - x^2 - 1) = xy - x\sqrt{1 + x^2} - y\sqrt{1 + y^2} + \sqrt{(1 + x^2)(1 + y^2)}$$

$$(x^2 - y^2 - 1)(y^2 - x^2 - 1) = 2xy + 2\sqrt{(1 + x^2)(1 + y^2)} - (x + \sqrt{1 + y^2})(y + \sqrt{1 + x^2})$$

$$\Leftrightarrow 1 - (x^2 - y^2)^2 = 2xy + 2\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)} - 1 \Leftrightarrow 2(1-xy) = (x^2 - y^2)^2 + 2\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}$$

$$\text{Hay } 2(1-xy) = (x^2 - y^2)^2 + 2\sqrt{(xy-1)^2 + (x+y)^2} \Rightarrow (1-xy) \geq \sqrt{(xy-1)^2 + (x+y)^2} \geq |xy-1|$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $(x+y)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -y$ hay $x + y = 0$.

Ví dụ 3

a, Cho $x = \sqrt{4 + \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} + \sqrt{4 - \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}$. Tính giá trị biểu thức: $P = \frac{x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x + 12}{x^2 - 2x + 12}$.

b, Cho $x = 1 + \sqrt[3]{2}$. Tính giá trị của biểu thức $B = x^4 - 2x^4 + x^3 - 3x^2 + 1942$. (Trích đề thi vào lớp 10 trường PCT Ngoại ngữ Hà Nội năm 2015-2016).

c, Cho $x = 1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$. Tính giá trị biểu thức: $P = x^5 - 4x^4 + x^3 - x^2 - 2x + 2015$.

Lời giải

a, Ta có: $x^2 = \left(\sqrt{4 + \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} + \sqrt{4 - \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} \right)^2 = 8 + 2\sqrt{4 + \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} \cdot \sqrt{4 - \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}$

$$\Leftrightarrow x^2 = 8 + 2\sqrt{6 - 2\sqrt{5}} = 8 + 2\sqrt{(\sqrt{5} - 1)^2} = 8 + 2(\sqrt{5} - 1) = 6 + 2\sqrt{5} = (\sqrt{5} + 1)^2.$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{5} + 1. \text{ Từ đó ta suy ra } (x-1)^2 = 5 \Leftrightarrow x^2 - 2x = 4.$$

Ta biến đổi: $P = \frac{(x^2 - 2x)^2 - 2(x^2 - 2x) + 12}{x^2 - 2x + 12} = \frac{4^2 - 3 \cdot 4 + 12}{4 + 12} = 1.$

b, Ta có: $x = 1 + \sqrt[3]{2} \Rightarrow (x-1)^3 = 2 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 3x - 3 = 0$. Ta biến đổi biểu thức P thành:

$$P = x^2(x^3 - 3x^2 + 3x - 3) + x(x^3 - 3x^2 + 3x - 3) + (x^3 - 3x^2 + 3x - 3) + 1945 = 1945.$$

c, Để ý rằng: $x = \sqrt[3]{2^2} + \sqrt[3]{2} + 1$ ta nhân thêm hai vế với $\sqrt[3]{2} - 1$ để tận dụng hằng đẳng thức:

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2). \text{ Khi đó ta có: } (\sqrt[3]{2} - 1)x = (\sqrt[3]{2} - 1)(\sqrt[3]{2^2} + \sqrt[3]{2} + 1) = 1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{2}x = x + 1 \Leftrightarrow 2x^3 = (x+1)^3 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 - 3x - 1 = 0.$$

Ta biến đổi: $P = x^5 - 4x^4 + x^3 - x^2 - 2x + 2015 = (x^2 - x + 1)(x^3 - 3x^2 - 3x - 1) + 2016 = 2016.$

Ví dụ 4

a) Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $a\sqrt{1-b^2} + b\sqrt{1-c^2} + c\sqrt{1-a^2} = \frac{3}{2}$. Chứng minh rằng:

$$a^2 + b^2 + c^2 = \frac{3}{2}.$$

b) Tìm các số thực x, y, z thỏa mãn điều kiện: $x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{2-z^2} + z\sqrt{3-x^2} = 3$.

(Trích đề thi tuyển sinh vào lớp 10 chuyên Toán – Trường chuyên ĐHSPT Hà Nội, 2014).

c) Tìm các số thực x, y thỏa mãn điều kiện: $2(x\sqrt{y-4} + y\sqrt{x-4}) = xy$.

d) Giả sử $(x; y)$ là các số thực thỏa mãn $(x + \sqrt{3+x^2})(y + \sqrt{3+y^2}) = 9$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^2 + xy + y^2$.

e) Tìm GTLN, GTNN của biểu thức: $P = \sqrt[4]{1+x} + \sqrt[4]{1-x} + \sqrt[4]{1-x^2}$.

Lời giải

a, Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số không âm ta có:

$$a\sqrt{1-b^2} + b\sqrt{1-c^2} + c\sqrt{1-a^2} \leq \frac{a^2+1-b^2}{2} + \frac{b^2+1-c^2}{2} + \frac{c^2+1-a^2}{2} = \frac{3}{2}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} a = \sqrt{1-b^2} \\ b = \sqrt{1-c^2} \\ c = \sqrt{1-a^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 1-b^2 \\ b^2 = 1-c^2 \\ c^2 = 1-a^2 \end{cases} \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = \frac{3}{2} \text{ (đpcm)}.$

b, Ta viết lại giả thiết thành: $2x\sqrt{1-y^2} + 2y\sqrt{2-z^2} + 2z\sqrt{3-x^2} = 6$

Áp dụng bất đẳng thức: $2ab \leq a^2 + b^2$ ta có:

$$2x\sqrt{1-y^2} + 2y\sqrt{2-z^2} + 2z\sqrt{3-x^2} \leq x^2 + 1 - y^2 + y^2 + 2 - z^2 + z^2 + 3 - x^2 = 6. \text{ Suy ra } VT \leq VP.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} x = \sqrt{1-y^2} \\ y = \sqrt{2-z^2} \\ z = \sqrt{3-x^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x, y, z \geq 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \\ y^2 + z^2 = 2 \\ z^2 + x^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 3; x, y, z \geq 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \\ y^2 + z^2 = 2 \\ z^2 + x^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow x=1; y=0; z=\sqrt{2}.$$

c, $a = \sqrt{x-4}, b = \sqrt{y-4}$ với $a, b \geq 0$ thì phương trình đã cho trở thành:

$$2(a^2 + 4)b + 2(b^2 + 4)a = (a^2 + 4)(b^2 + 4).$$

Chia 2 vế cho $(a^2 + 4)(b^2 + 4)$ thì phương trình trở thành: $\frac{2b}{b^2 + 4} + \frac{2a}{a^2 + 4} = 1.$

Để ý rằng $a=0$ hoặc $b=0$ không thỏa mãn phương trình.

Xét $a, b > 0$. Theo bất đẳng thức AM - GM ta có: $b^2 + 4 \geq 2\sqrt{4b^2} = 4b, a^2 + 4 \geq 4a$. Suy ra

$$VT \leq \frac{2a}{4a} + \frac{2b}{4b} = 1, \text{ dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi } \begin{cases} a^2 = 4 \\ b^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = 2 \Leftrightarrow x = y = 8. \text{ Vậy}$$

$x=8, y=8$ là nghiệm của phương trình.

d, Đặt $a = x + \sqrt{3+x^2} > 0 \Rightarrow a - x = \sqrt{3+x^2} \Rightarrow a^2 - 2ax + x^2 = 3 + x^2 \Rightarrow x = \frac{a^2 - 3}{2a}.$

Tương tự đặt $b = y + \sqrt{3+y^2} > 0 \Rightarrow y = \frac{b^2 - 3}{2b}$. Khi đó $x + y = \frac{a}{2} + \frac{b}{2} - \frac{3}{2a} - \frac{3}{2b}.$

Theo giả thiết ta có: $ab = 9 \Rightarrow x + y = \frac{a}{2} + \frac{9}{2a} - \frac{3}{2a} - \frac{a}{6} = \frac{a}{3} + \frac{3}{a} \geq 2\sqrt{\frac{a}{3} \cdot \frac{3}{a}} = 2$. Lại có

$$x^2 + xy + y^2 = \frac{3}{4}(x+y)^2 + \frac{1}{4}(x-y)^2 \geq \frac{3}{4}(x+y)^2 \Rightarrow x^2 + xy + y^2 \geq 3. \text{ Dấu đẳng thức xảy ra}$$

$$\Leftrightarrow x = y = 1. \text{ Vậy } (x^2 + xy + y^2)_{\min} = 3.$$

e, Đặt $a = \sqrt[4]{1+x}, b = \sqrt[4]{1-x} \Rightarrow a, b \geq 0, a^4 + b^4 = 2$. Ta có: $P = a + b + ab$. Áp dụng bất đẳng thức ở (***) ta có

$$2(a^4 + b^4) \geq (a^2 + b^2)^2 \geq \left[\frac{1}{2}(a+b)^2 \right]^2 = \frac{(a+b)^4}{4} \Rightarrow (a+b)^4 \leq 8(a^4 + b^4) = 16 \Leftrightarrow a+b \leq 2.$$

Suy ra $P \leq a + b + \frac{(a+b)^2}{4} \leq 3$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = 1 \Leftrightarrow x = 0$.

Ta cũng có: $a^4 + b^4 \leq a^4 + 2a^2b^2 + b^4 = (a^2 + b^2)^2 \Rightarrow a^2 + b^2 \geq \sqrt{2}$, mà

$$a^2 + b^2 \leq a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2 \text{ với mọi } a, b \geq 0. \text{ Suy ra } a+b \geq \sqrt{a^2 + b^2} \geq \sqrt{2}. \text{ Vậy}$$

$P = a + b + ab \geq a + b \geq \sqrt[4]{2}$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = 0$ hoặc $b = 0$ tức là $x = 1$ hoặc $x = -1$.

Ví dụ 5

Cho $x, y, z > 0$ và $xy + yz + zx = 1$

- a) Tính giá trị biểu thức $P = x\sqrt{\frac{(1+y^2)(1+z^2)}{1+x^2}} + y\sqrt{\frac{(1+z^2)(1+x^2)}{1+y^2}} + z\sqrt{\frac{(1+x^2)(1+y^2)}{1+z^2}}$.
- b) Chứng minh rằng : $\frac{x}{1+x^2} + \frac{y}{1+y^2} - \frac{z}{1+z^2} = \frac{2xy}{\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)(1+z^2)}}$.

Lời giải

a) Để ý rằng $1+x^2 = x^2 + xy + yz + zx = (x+y)(x+z)$

Tương tự đối với $1+y^2; 1+z^2$ ta có:

$$x\sqrt{\frac{(1+y^2)(1+z^2)}{1+x^2}} = x\sqrt{\frac{(y+x)(y+z)(z+x)(z+y)}{(x+y)(x+z)}} = x(y+z)$$

Suy ra $P = x(y+z) + y(z+x) + z(x+y) = 2(xy + yz + zx) = 2$

b) Tương tự như câu a)

Ta có:

$$\begin{aligned} \frac{x}{1+x^2} + \frac{y}{1+y^2} - \frac{z}{1+z^2} &= \frac{x}{(x+y)(x+z)} + \frac{y}{(x+y)(y+z)} - \frac{z}{(z+y)(z+x)} \\ &= \frac{x(y+z) + y(z+x) - z(x+y)}{(x+y)(y+z)(z+x)} = \frac{2xy}{(x+y)(y+z)(z+x)} = \frac{2xy}{\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)(1+z^2)}} \end{aligned}$$

Ví dụ 6

a) Tìm $x_1, x_2, \dots, x_n$ thỏa mãn : $\sqrt{x_1^2 - 1^2} + 2\sqrt{x_2^2 - 2^2} + \dots + n\sqrt{x_n^2 - n^2} = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)$

b) Cho $f(n) = \frac{4n + \sqrt{4n^2 - 1}}{\sqrt{2n+1} + \sqrt{2n-1}}$ với n nguyên dương. Tính $f(1) + f(2) + \dots + f(40)$.

Lời giải

a, Đẳng thức tương đương với: $(\sqrt{x_1^2 - 1^2} - 1)^2 + (\sqrt{x_2^2 - 2^2} - 2)^2 + \dots + (\sqrt{x_n^2 - n^2} - n)^2 = 0$.

Hay $x_1 = 2, x_2 = 2.2^2, \dots, x_n = 2.n^2$

b, Đặt $x = \sqrt{2n+1}, y = \sqrt{2n-1} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 4n \\ xy = \sqrt{4n^2 - 1} \\ x^2 - y^2 = 2 \end{cases}$

Suy ra $f(n) = \frac{x^2 + xy + y^2}{x+y} = \frac{x^3 - y^3}{x^2 - y^2} = \frac{1}{2}(x^3 - y^3) = \frac{1}{2}(\sqrt{(2n+1)^3} - \sqrt{(2n-1)^3})$. Áp dụng vào bài

toán ta có : $f(1) + f(2) + \dots + f(40) = \frac{1}{2}[(\sqrt{3^3} - \sqrt{1^3}) + (\sqrt{5^3} - \sqrt{3^3}) + \dots + (\sqrt{81^3} - \sqrt{79^3})]$

$$\frac{1}{2}(\sqrt{81^3} - \sqrt{1^3}) = 364.$$

Ví dụ 7

a, Cho số nguyên dương $n \geq 2$. Tính giá trị biểu thức sau theo n :

$$P = \sqrt{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2}} + \dots + \sqrt{1 + \frac{1}{(n+2)^2} + \frac{1}{(n+3)^2}}.$$

b, Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn: $a + b + c = \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} = 2$. Chứng minh:

$$\frac{\sqrt{a}}{1+a} + \frac{\sqrt{b}}{1+b} + \frac{\sqrt{c}}{1+c} = \frac{2}{\sqrt{(1+a)(1+b)(1+c)}}$$

Lời giải

Với mọi số thực a, b, c khác 0 sao cho: $a + b + c = 0$ thì

$$\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2 = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{2}{ab} + \frac{2}{bc} + \frac{2}{ca} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2 = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{2(a+b+c)}{abc} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$$

Áp dụng vào bài toán ta có:

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{(-3)^2} = \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)^2 \Rightarrow \sqrt{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3}.$$

Áp dụng lần lượt với các số hạng còn lại ta thu được:

$$P = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \left(1 + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) + \left(1 + \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right) = n + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+3}.$$

b, Đặt

$$x = \sqrt{a}, y = \sqrt{b}, z = \sqrt{c} \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = x + y + z = 2 \Rightarrow 2(xy + yz + zx) = (x + y + z)^2 - (x^2 + y^2 + z^2) = 2$$

suy ra $xy + yz + zx = 1$ dẫn đến $1 + a = xy + yz + zx + x^2 = (x + y)(x + z)$

Tương tự $1 + b = (y + z)(y + x), 1 + c = (z + x)(z + y)$ suy ra

$$\begin{aligned} VT &= \frac{x}{(x+y)(x+z)} + \frac{y}{(y+z)(y+x)} + \frac{z}{(z+x)(z+y)} = \frac{x(y+z) + y(z+x) + z(x+y)}{(x+y)(y+z)(z+x)} \\ &= \frac{2}{(x+y)(y+z)(z+x)} = \frac{2}{\sqrt{(1+a)(1+b)(1+c)}} \quad (\text{đpcm}) \end{aligned}$$

Dạng 2 : Các câu hỏi liên quan giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của một biểu thức đại số.

Phương pháp : Để giải quyết các bài tập dạng này ta cần chú ý các tính chất cơ bản :

Với số thực $A, B \geq 0$ thì

$$+ \sqrt{A} \geq 0.$$

$$+ A + B \geq 2\sqrt{AB} \quad (\text{Bất đẳng thức AG - GM}). \text{ Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi } A = B.$$

$$+ \sqrt{A^2 + B^2} + \sqrt{C^2 + D^2} \geq \sqrt{(A+C)^2 + (B+D)^2}, \text{ với các số thực } A, B, C, D \geq 0.$$

$$+ (A+B)^2 \leq 2(A^2 + B^2), (A+B)^3 \leq (A^3 + B^3), \text{ với } A, B \geq 0$$

Ví dụ 1.

a) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = \frac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}.$

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của $B = \frac{x+2\sqrt{x}+5}{\sqrt{x}+1}$

c) Tìm giá trị nhỏ nhất của $C = \frac{a+1}{\sqrt{a}-1} + \frac{b}{\sqrt{b}-2} + \frac{c}{\sqrt{c}-3}$ với các số thực a, b, c thỏa mãn

$$a > 1, b > 4, c > 9.$$

d) Cho $x \geq 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $D = \sqrt{1-x} + \sqrt{1+x} + 2\sqrt{x}.$

(Tuyển sinh Hà Nội 2018)e) Cho số thực x thỏa mãn : $0 \leq x \leq 5$. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của;

$$P = x\sqrt{8-x} + (5-x)\sqrt{x+3}.$$

f) Tìm giá trị nhỏ nhất của $A = \frac{x(\sqrt{x+4}\sqrt{x-4} + \sqrt{x-4}\sqrt{x-4})}{\sqrt{x^2-8x+16}}$, với $x > 4$ g) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $G = \sqrt{5x-x^2} + \sqrt{18-3x-x^2}$.**Lời giải**a) Điều kiện : $x \geq 0$, ta viết lại $A = \frac{2(\sqrt{x}+1)-1}{\sqrt{x}+1} = 2 - \frac{1}{\sqrt{x}+1}$, vì $x \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x} \geq 0$. $\Rightarrow \sqrt{x}+1 \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}+1} \leq 1$ dẫn đến $A \geq 2-1=1$, dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=0$ khi đó giá trị nhỏ nhất của A là 1.b) Điều kiện $x \geq 0$. Ta viết lại $B = \frac{(\sqrt{x}+1)^2+4}{\sqrt{x}+1} = \sqrt{x}+1 + \frac{4}{\sqrt{x}+1}$, vì $x \geq 0$ nên $\sqrt{x}+1 \geq 1$.áp dụng bất đẳng thức AM-GM dạng $A+B \geq 2\sqrt{AB}$ với các số thực không âm A, B ta có:

$$\sqrt{x}+1 + \frac{4}{\sqrt{x}+1} \geq 2\sqrt{(\sqrt{x}+1) \cdot \frac{4}{\sqrt{x}+1}} = 4, \text{ dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi}$$

$$\sqrt{x}+1 = \frac{4}{\sqrt{x}+1} \Leftrightarrow (\sqrt{x}+1)^2 = 4 \Leftrightarrow \sqrt{x}+1 = 2 \Leftrightarrow x=1.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của B bằng 1 tại $x=1$.c, Ta có $\frac{a}{\sqrt{a}-1} = \frac{a-1+1}{\sqrt{a}-1} = \sqrt{a}+1 + \frac{1}{\sqrt{a}-1} = \sqrt{a}-1 + \frac{1}{\sqrt{a}-1} + 2$ do $a > 1$ nên $\sqrt{a}-1 > 0$, áp dụng bấtđẳng thức AM-GM cho 2 số thực dương ta có: $\sqrt{a}-1 + \frac{1}{\sqrt{a}-1} \geq 2$ suy ra $\frac{a}{\sqrt{a}-1} \geq 4$, dấu đẳngthức xảy ra khi và chỉ khi $\sqrt{a}-1 = \frac{1}{\sqrt{a}-1} \Leftrightarrow \sqrt{a}-1=1 \Leftrightarrow a=4$.Tương tự ta có: $\frac{b}{\sqrt{b}-2} = \frac{b-4+4}{\sqrt{b}-2} = \sqrt{b}+2 + \frac{4}{\sqrt{b}-2} = \sqrt{b}-2 + \frac{4}{\sqrt{b}-2} + 4 \geq 8$, dấu đẳng thức xảy rakhi và chỉ khi $b=16$;

$$\frac{c}{\sqrt{c}-3} = \frac{c-9+9}{\sqrt{c}-3} = \sqrt{c}+3 + \frac{9}{\sqrt{c}-3} = \sqrt{c}-3 + \frac{9}{\sqrt{c}-3} + 6 \geq 12, \text{ dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi}$$

 $c=36$;Từ đó suy ra $C \geq 24$, dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=4, b=16, c=36$.Hay GTNN của C là 24 tại $a=4, b=16, c=36$.d, Điều kiện $0 \leq x \leq 1$.Ta viết lại $D = \sqrt{1-x} + \sqrt{1+x} + 2\sqrt{x} = \sqrt{1-x} + \sqrt{x} + \sqrt{1+x} + \sqrt{x}$, do $x \geq 0$ suy ra $\sqrt{1+x} + \sqrt{x} \geq 1$. Tacó $(\sqrt{x} + \sqrt{1-x})^2 = x+1-x+2\sqrt{x(1-x)} = 1+2\sqrt{x(1-x)} \geq 1$ suy ra $D \geq 2$, dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=0$.e, Đặt $\sqrt{8-x}=a, \sqrt{x+3}=b$ do $0 \leq x \leq 5$ suy ra $\begin{cases} \sqrt{3} \leq a, b \leq \sqrt{8} \\ a^2+b^2=11 \end{cases}$.Biểu thức P có dạng $P = (a^2-3)b + (b^2-3)a = ab(a+b) - 3(a+b)$ Đặt $a+b=t$ từ giả thiết ta có:

$$(a+b)^2 - 2ab = 11 \Leftrightarrow 4ab = 2t^2 - 22 \leq (a+b)^2 = t^2 \Rightarrow t \leq \sqrt{22}.$$

Mặt khác ta cũng có:

$$\begin{cases} (a-\sqrt{3})(a-\sqrt{8}) \leq 0 \\ (b-\sqrt{3})(b-\sqrt{8}) \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 - (\sqrt{3}+\sqrt{8})a + \sqrt{24} \leq 0 \\ b^2 - (\sqrt{3}+\sqrt{8})b + \sqrt{24} \leq 0 \end{cases} \Rightarrow 11 + 2\sqrt{24} \leq (\sqrt{3}+\sqrt{8})(a+b)$$

hay $a+b \geq 2\sqrt{2} + \sqrt{3}$. Vậy $2\sqrt{2} + \sqrt{3} \leq t \leq \sqrt{22}$.

Ta có: $2P = 2ab(a+b) - 6(a+b) = (t^2 - 11)t - 6t = t(t^2 - 17)$. Từ đó ta có:

$2P \geq (2\sqrt{2} + \sqrt{3})[(2\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 - 17] = (2\sqrt{2} + \sqrt{3})(4\sqrt{6} - 6) = 10\sqrt{3} \Leftrightarrow P \geq 5\sqrt{3}$, dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = \sqrt{3}, b = \sqrt{8}$ hoặc $a = \sqrt{8}, b = \sqrt{3} \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 5$.

Ta có: $2P \leq 5\sqrt{22} \Rightarrow P \leq \frac{5\sqrt{22}}{2}$, dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = \sqrt{\frac{11}{2}} \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$.

Cách khác:

Ta có: $0 \leq x \leq 5$ thì $P = x\sqrt{8-x} + (5-x)\sqrt{x+3} \geq x\sqrt{3} + (5-x)\sqrt{3} = 5\sqrt{3}$. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = 0$ hoặc $x = 5$.

Ta cũng có:

$$P^2 = [x\sqrt{8-x} + (5-x)\sqrt{x+3}]^2 = x^2(8-x) + (5-x)^2(x+3) + 2x(5-x)\sqrt{(8-x)(x+3)}$$

Hay $P^2 = 75 + (5x - x^2)(2\sqrt{(8-x)(x+3)} - 1)$. Theo bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$5x - x^2 = x(5-x) \leq \frac{(x+5-x)^2}{4} = \frac{25}{4} \cdot 2\sqrt{(8-x)(x+3)} \leq 8 - x + x + 3 = 11 \text{ nên:}$$

$$P^2 \leq 75 + \frac{25}{4} \cdot 10 = \frac{275}{2} \Rightarrow P \leq \frac{5\sqrt{22}}{2}. \text{ Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi } 8-x = x+3 \text{ và } x = 5-x$$

hay $x = \frac{5}{2}$. Vậy GTNN của P là $5\sqrt{3}$, GTLN của P là $\frac{5\sqrt{22}}{2}$.

f, Điều kiện để biểu thức A xác định là $x > 4$.

$$A = \frac{x \left(\sqrt{(\sqrt{x-4}+2)^2} + \sqrt{(\sqrt{x-4}-2)^2} \right)}{\sqrt{(x-4)^2}} = \frac{x(|\sqrt{x-4}+2| + |\sqrt{x-4}-2|)}{|x-4|}$$

$$= \frac{x(\sqrt{x-4}+2 + |\sqrt{x-4}-2|)}{x-4}$$

+ Nếu $4 < x < 8$ thì $\sqrt{x-4}-2 < 0$ nên

$$A = \frac{x(\sqrt{x-4}+2 + 2 - \sqrt{x-4})}{x-4} = \frac{4x}{x-4} = 4 + \frac{16}{x-4}$$

Do $4 < x < 8$ nên $0 < x-4 < 4 \Rightarrow A > 8$.

+ Nếu $x \geq 8$ thì $\sqrt{x-4}-2 \geq 0$ nên

$$A = \frac{x(\sqrt{x-4}+2 + \sqrt{x-4}-2)}{x-4} = \frac{2x\sqrt{x-4}}{x-4} = \frac{2x}{\sqrt{x-4}} = 2\sqrt{x-4} + \frac{8}{\sqrt{x-4}} \geq 2\sqrt{16} = 8 \text{ (theo bất đẳng}$$

thức AM-GM). Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $2\sqrt{x-4} = \frac{8}{\sqrt{x-4}} \Leftrightarrow x-4 = 4 \Leftrightarrow x = 8$.

Vậy GTNN của A bằng 8 khi $x = 8$.

g, Điều kiện $\begin{cases} 5x - x^2 \geq 0 \\ 18 + 3x - x^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(5-x) \geq 0 \\ (x+3)(6-x) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 5.$

Ta viết lại: $G = \sqrt{5x - x^2} + \sqrt{5x - x^2 + 18 - 2x}$. Do $5x - x^2 \geq 0$ với mọi x thỏa mãn $0 \leq x \leq 5$ nên ta có $G \geq \sqrt{18 - 2x} \geq \sqrt{18 - 2 \cdot 10} = \sqrt{8}$. Dấu đẳng thức xảy ra tại $x = 5$. Vậy GTNN của G bằng $2\sqrt{2}$ khi $x = 5$.

Ví dụ 2

a, Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $A = \frac{\sqrt{x} + 1}{2\sqrt{x} + 1}$.

b, Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $B = \frac{\sqrt{x}}{x - 2\sqrt{x} + 9}$.

c, Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $C = \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 3\sqrt{x} + 11}$.

d, Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $D = \sqrt{9 - x} + \sqrt{x}$.

e, Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $E = -x^2 + 4\sqrt{(9-x)(1+3x)}$.

f, Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $F = \sqrt{5x - x^2} + \sqrt{18 + 3x - x^2}$.

Lời giải

a, Điều kiện: $x \geq 0$ ta viết lại A thành: $A = \frac{\frac{1}{2}(2\sqrt{x} + 1) + \frac{1}{2}}{2\sqrt{x} + 1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2(2\sqrt{x} + 1)}$.

Vì $x \geq 0$ nên $2\sqrt{x} + 1 \geq 1$ suy ra $\frac{1}{2(2\sqrt{x} + 1)} \leq \frac{1}{2}$ dẫn đến $A \leq 1$. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = 0$.

Vậy GTNN của A bằng 1 khi $x = 0$.

b, Điều kiện: $x \geq 0$ ta có: $x - 2\sqrt{x} + 9 = (\sqrt{x} - 1)^2 + 8 > 0$ suy ra $B \geq 0$

+ Khi $x = 0$ thì $B = 0$ (1)

+ Khi $x > 0$ thì $B > 0$ ta có $\frac{1}{B} = \frac{x - 2\sqrt{x} + 9}{\sqrt{x}} = \sqrt{x} - 2 + \frac{9}{\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{9}{\sqrt{x}} - 2$, áp dụng bất đẳng thức

AM-GM cho các số thực dương ta có: $\sqrt{x} + \frac{9}{\sqrt{x}} \geq 2\sqrt{9} = 6$ suy ra $\frac{1}{B} \geq 4 \Rightarrow B \leq \frac{1}{4}$. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = 9$ (2)

Kết hợp (1), (2) ta suy ra GTLN của B bằng $\frac{1}{4}$ tại $x = 9$.

Chú ý: Học sinh hay mắc sai lầm khi đưa về $\frac{1}{B}$ mà không xét $x = 0$. (Biểu thức $\frac{1}{B}$ chỉ xác định khi $x > 0$).

c, Điều kiện: $x \geq 0$ chú ý: $x - 3\sqrt{x} + 11 = \left(\sqrt{x} - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{31}{4} > 0$,

Nếu $x \leq 1$ thì $C \leq 0$ (3)

Nếu $x > 1$ thì $C > 0$ ta có:

$\frac{1}{C} = \frac{x-3\sqrt{x}+11}{\sqrt{x}-1} = \frac{(\sqrt{x}-1)^2 - (\sqrt{x}-1) + 9}{\sqrt{x}-1} = \sqrt{x}-1 + \frac{9}{\sqrt{x}-1} - 1$, áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho 2 số thực dương ta có: $\sqrt{x}-1 + \frac{9}{\sqrt{x}-1} \geq 6$ suy ra $\frac{1}{C} \geq 5 \Rightarrow C \leq \frac{1}{5}$. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\sqrt{x}-1 = \frac{9}{\sqrt{x}-1} \Leftrightarrow \sqrt{x}-1 = 3 \Leftrightarrow x = 16$ (4).

Kết hợp (3), (4) ta suy ra GTLN của C bằng $\frac{1}{5}$ tại $x = 16$.

d, Điều kiện $0 \leq x \leq 3$. Ta có $D^2 = 9 + 2\sqrt{x(9-x)}$ theo bất đẳng thức AM-GM ta có: $2\sqrt{x(9-x)} \leq x + 9 - x = 9$ nên $D^2 \leq 18 \Leftrightarrow D \leq 3\sqrt{2}$. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = 9 - x \Leftrightarrow x = \frac{9}{2}$. Vậy GTLN của D bằng $3\sqrt{2}$ tại $x = \frac{9}{2}$.

e, Điều kiện $(9-x)(1+3x) \geq 0 \Leftrightarrow (3x-27)(3x+1) \leq 0$ do $3x-27 < 3x+1$ nên suy ra E xác định khi và chỉ khi $\begin{cases} 3x+1 \geq 0 \\ 3x-27 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{3} \leq x \leq 9$.

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có: $2\sqrt{(1+3x)(9-x)} \leq 1+3x+9-x = 10+2x$ suy ra $E \leq -x^2 + 2(10+2x) = 20+4x-x^2 = 24-(x-2)^2 \leq 24$. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = 2$. Vậy GTLN của E bằng 24 tại $x = 2$.

f, Điều kiện: $\begin{cases} 5x-x^2 \geq 0 \\ 18+3x-x^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(5-x) \geq 0 \\ (x+3)(6-x) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 5$.

Ta viết lại $F = \sqrt{x(5-x)} + \sqrt{(6-x)(x+3)}$, áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz dạng $(AX + BY)^2 \leq (A^2 + B^2)(X^2 + Y^2)$ ta có $P^2 \leq (x+6-x)(5-x+x+3) = 48 \Rightarrow P \leq 4\sqrt{3}$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{x}{5-x} = \frac{6-x}{x+3} \Leftrightarrow x = \frac{15}{7}$.

Dạng 3: Tìm điều kiện để biểu thức nhận giá trị nguyên.

Phương pháp:

+ Đối với các biểu thức $P = A + \frac{B}{C}$ với A, B là số nguyên, C nhận giá trị nguyên hoặc vô tỉ thì P nhận giá trị nguyên khi và chỉ khi C là số nguyên và C là ước số của B .

+ Đối với các biểu thức $P = A + \frac{B}{C}$ với A, B là số hữu tỉ, C nhận giá trị thực. Ta thường tìm cách đánh giá P , tức là chặn P theo kiểu $M \leq P \leq N$ từ đó suy ra các giá trị có thể có của P . Hoặc tìm điều kiện của P để tồn tại biến $x, y, \dots$ thỏa mãn yêu cầu bài toán từ đó suy ra các giá trị nguyên có thể có của P .

+ Đối với các bài toán tổng hợp học sinh cần chú ý điều kiện ban đầu để loại các giá trị không thỏa mãn.

Ví dụ 1

a, Tìm các giá trị nguyên của x để $P = \frac{2\sqrt{x}+5}{\sqrt{x}+1}$ là số nguyên.

b, Tìm tất cả các số thực x để $P = \frac{2}{x - \sqrt{x} + 1}$ là số nguyên.

c, Chứng minh: Không tồn tại giá trị thực của x để $P = \frac{3\sqrt{x} + 5}{\sqrt{x} + 2}$ là số nguyên.

Lời giải

a, Điều kiện $x \geq 0$. Ta viết lại $P = \frac{2(\sqrt{x} + 1) + 3}{\sqrt{x} + 1} = 2 + \frac{3}{\sqrt{x} + 1}$. Do x là số nguyên nên $\sqrt{x} + 1$ nhận giá trị nguyên hoặc vô tỉ. Suy ra P là số nguyên khi và chỉ khi $\sqrt{x} + 1$ là số nguyên và $\sqrt{x} + 1$ là ước của 3. Chú ý $\sqrt{x} + 1 \geq 1 \Rightarrow \sqrt{x} + 1 \in \{1; 3\} \Leftrightarrow \sqrt{x} \in \{0; 2\} \Leftrightarrow x \in \{0; 4\}$.

Vậy $x \in \{0; 4\}$ thì P nhận giá trị nguyên.

b, Điều kiện $x \geq 0$.

Do $x \geq 0$ nên $x - \sqrt{x} + 1 \geq \left(\sqrt{x} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$ suy ra $P > 0$ ta có

$$P = \frac{2}{x - \sqrt{x} + 1} = \frac{2}{\left(\sqrt{x} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} < \frac{2}{\frac{3}{4}} = \frac{8}{3}, \text{ như vậy } 0 < P < \frac{8}{3}. \text{ Vì } P \text{ là số nguyên nên } P \text{ có thể}$$

nhận các giá trị $P \in \{1; 2\}$.

$$\text{TH1: } P = 1 \Leftrightarrow x - \sqrt{x} + 1 = 2 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x} - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} \\ \sqrt{x} = \frac{-\sqrt{5} + 1}{2} \end{cases} \text{ do}$$

$$x \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}.$$

$$\text{TH2: } P = 2 \Leftrightarrow x - \sqrt{x} + 1 = 1 \Leftrightarrow x - \sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x}(\sqrt{x} - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ hoặc } x = 1.$$

Vậy $x \in \left\{0; 1; \frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right\}$ thì P nhận giá trị nguyên.

c, Điều kiện $x \geq 0$. Dễ thấy P là số dương. Để ý rằng: $P = \frac{3\sqrt{x} + 5}{\sqrt{x} + 2} < \frac{3\sqrt{x} + 6}{\sqrt{x} + 2} = 3$ suy ra

$0 < P < 3$ vì P là số nguyên nên P có thể nhận các giá trị là 1 hoặc 2.

$$\text{TH1: } P = 1 \Leftrightarrow 3\sqrt{x} + 5 = \sqrt{x} + 2 \Leftrightarrow 2\sqrt{x} = -3 \text{ vô lí.}$$

$$\text{TH2: } P = 2 \Leftrightarrow 3\sqrt{x} + 5 = 2(\sqrt{x} + 2) \Leftrightarrow \sqrt{x} = -1 \text{ vô lí.}$$

Vậy không tồn tại x để P là số nguyên.

Cách khác: Giả sử tồn tại giá trị $x \geq 0$ để $P = \frac{3\sqrt{x} + 5}{\sqrt{x} + 2}$ là số nguyên. Khi đó ta có:

$$P = \frac{3\sqrt{x} + 5}{\sqrt{x} + 2} \Leftrightarrow P\sqrt{x} + 2P = 3\sqrt{x} + 5 \Leftrightarrow \sqrt{x}(P - 3) = 5 - 2P \quad (*)$$

Nếu $P = 3$ thì $(*)$ có dạng $0 = -1$ vô lí, vậy $P \neq 3$. Từ $(*)$ ta cũng suy ra $\sqrt{x} = \frac{5 - 2P}{P - 3}$,

Do $x \geq 0$ ta suy ra P phải thỏa mãn: $\frac{5 - 2P}{P - 3} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2P - 5}{P - 3} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{2P - 5}{2P - 6} \leq 0$, để ý rằng

$2P-5 > 2P-6$ nên điều kiện $\frac{2P-5}{2P-6} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2P-5 \geq 0 \\ 2P-6 < 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{5}{2} \leq P < 3$ (**), do P là số nguyên nên (***) không thể xảy ra. Tóm lại P không thể nhận giá trị nguyên.

III. MỘT SỐ BÀI TOÁN TỔNG HỢP

Bài 1

Cho $A = \frac{x-2}{2+\sqrt{x}}$ ($x \geq 0$), $B = \left(\frac{8x\sqrt{x}-1}{2x-\sqrt{x}} - \frac{8x\sqrt{x}+1}{2x+\sqrt{x}} \right) : \frac{2x+1}{2x-1}$ với $x \geq 0$, $x \neq \frac{1}{2}$, $x \neq -\frac{1}{2}$.

a) Chứng minh khi $x = 3 + 2\sqrt{2}$ thì $A = \frac{5\sqrt{2}-1}{7}$.

b) Rút gọn B và tìm x để $\frac{A}{B} = \frac{x-2}{4\sqrt{x}}$.

Lời giải:

a) Ta có $x = 3 + 2\sqrt{2} = (\sqrt{2}+1)^2 \Rightarrow \sqrt{x} = \sqrt{2}+1$ thay vào A ta có:

$$A = \frac{3+2\sqrt{2}-2}{\sqrt{2}+1+2} = \frac{2\sqrt{2}+1}{3+\sqrt{2}} = \frac{(2\sqrt{2}+1)(3-\sqrt{2})}{(3+\sqrt{2})(3-\sqrt{2})} = \frac{5\sqrt{2}-1}{7}.$$

b) Ta có:

$$\begin{aligned} B &= \left(\frac{8x\sqrt{x}-1}{2x-\sqrt{x}} - \frac{8x\sqrt{x}+1}{2x+\sqrt{x}} \right) : \frac{2x+1}{2x-1} = \left[\frac{(2\sqrt{x}-1)(4x+2\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}(2\sqrt{x}-1)} - \frac{(2\sqrt{x}+1)(4x-2\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}(2\sqrt{x}+1)} \right] : \frac{2x+1}{2x-1} \\ &= \left(\frac{4x+2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} - \frac{4x-2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} \right) : \frac{2x+1}{2x-1} = \frac{4(2x-1)}{2x+1} \Rightarrow \frac{A}{B} = \frac{x-2}{2+\sqrt{x}} : \frac{4(2x-1)}{2x+1} = \frac{(x-2)(2x+1)}{4(\sqrt{x}+2)(2x-1)}, \end{aligned}$$

$$\text{yêu cầu bài toán tương đương với } \frac{(x-2)(2x+1)}{4(\sqrt{x}+2)(2x-1)} = \frac{x-2}{4\sqrt{x}} \Leftrightarrow (x-2) \left[\frac{2x+1}{(\sqrt{x}+2)(2x-1)} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right] = 0$$

$$\text{hay } x=2 \text{ hoặc } \frac{2x+1}{(\sqrt{x}+2)(2x-1)} = \frac{1}{\sqrt{x}} \quad (*). \text{ Ta có}$$

$$\begin{aligned} (*) &\Leftrightarrow \sqrt{x}(2x+1) = (\sqrt{x}+2)(2x-1) \Leftrightarrow 4x-2\sqrt{x}-2=0 \Leftrightarrow 2x-\sqrt{x}-1=0 \Leftrightarrow (\sqrt{x}-1)(2\sqrt{x}+1)=0 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{x}=1 \Leftrightarrow x=1. \text{ Đối chiếu với điều kiện bài toán ta thấy } x=1, x=2 \text{ thỏa mãn.} \end{aligned}$$

Bài 2

Cho biểu thức: $A = \frac{x+9}{x-4}$; $B = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2} + \frac{2\sqrt{x}}{4-x}$ với $x > 0$, $x \neq 4$.

a) Rút gọn biểu thức B.

b) Đặt $P = A : B$. Tính giá trị của P khi $x = \frac{1}{36}$.

c) Tìm giá trị nhỏ nhất của P.

Lời giải:

$$a) B = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2} - \frac{2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \frac{(\sqrt{x}+2)^2 - (\sqrt{x}-2)^2 - 2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \frac{6\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}$$

$$P = A : B = \frac{x+9}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} : \frac{6\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \frac{x+9}{6\sqrt{x}}$$

b) Khi $x = \frac{1}{36} \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{6}$ ta có $P = \frac{\frac{1}{36} + 9}{6 \cdot \frac{1}{6}} = \frac{325}{36}$.

c) $P = \frac{x+9}{6\sqrt{x}} = \frac{1}{6} \left(\sqrt{x} + \frac{9}{\sqrt{x}} \right)$. Theo bất đẳng thức AM – GM ta có: $\sqrt{x} + \frac{9}{\sqrt{x}} \geq 6$. Suy ra $P \geq 1$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\sqrt{x} = \frac{9}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow \sqrt{x} = 3 \Leftrightarrow x = 9$. Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 1 tại $x = 9$.

Bài 3

Cho $A = \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} + \frac{\sqrt{x}+2}{3-\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}+2}{x-5\sqrt{x}+6}$, $B = \frac{1}{\sqrt{x}+1}$ với $x \geq 0$, $x \neq 4$, $x \neq 9$

a) Rút gọn A.

b) Tính giá trị của A khi $x = 7 + 4\sqrt{3}$.

c) Đặt $P = A : B$. Tìm x để $P \leq 4$.

Lời giải:

a) Điều kiện xác định: $\begin{cases} x \geq 0 \\ x \neq 4 \\ x \neq 9 \end{cases}$

Ta có: $A = \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} + \frac{\sqrt{x}+2}{3-\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}+2}{x-5\sqrt{x}+6} = \frac{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3) - (\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2) + \sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)} = \frac{1}{\sqrt{x}-2}$.

b) Khi $x = 7 + 4\sqrt{3} = (2 + \sqrt{3})^2 \Rightarrow \sqrt{x} = 2 + \sqrt{3}$ thì $A = \frac{1}{2 + \sqrt{3} - 2} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

c) Ta có $P = \frac{1}{\sqrt{x}-2} : \frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2} \leq 4 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2} - 4 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+1-4(\sqrt{x}-2)}{\sqrt{x}-2} \leq 0$ hay

$\frac{3(3-\sqrt{x})}{\sqrt{x}-2} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}-2} \geq 0$ (*)

TH1: $\begin{cases} \sqrt{x}-3 \geq 0 \\ \sqrt{x}-2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 9 \\ x > 4 \end{cases} \Rightarrow x \geq 9$ đối chiếu điều kiện suy ra $x > 9$.

TH2: $\begin{cases} \sqrt{x}-3 \leq 0 \\ \sqrt{x}-2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 9 \\ x < 4 \end{cases} \Rightarrow x < 4$ đối chiếu điều kiện suy ra $0 \leq x < 4$.

Vậy $P \leq 4$ khi và chỉ khi $0 \leq x < 4$ hoặc $x > 9$.

Bài 4

Cho biểu thức $A = \frac{2\sqrt{x}+3}{5x-10\sqrt{x}}$, $B = \frac{2}{\sqrt{x}-2} + \frac{3}{2\sqrt{x}+1} - \frac{5\sqrt{x}-7}{2x-3\sqrt{x}-2}$ ($x > 0$, $x \neq 4$).

a) Rút gọn B.

b) Tìm x sao cho $C = B : A$ nhận giá trị là một số nguyên.

Lời giải:

a) Ta có:

$B = \frac{2}{\sqrt{x}-2} + \frac{3}{2\sqrt{x}+1} - \frac{5\sqrt{x}-7}{2x-3\sqrt{x}-2} = \frac{2(2\sqrt{x}+1) + 3(\sqrt{x}-2) - (5\sqrt{x}-7)}{(\sqrt{x}-2)(2\sqrt{x}+1)} = \frac{2\sqrt{x}+3}{(\sqrt{x}-2)(2\sqrt{x}+1)}$. b) Ta

$$\text{có: } A = \frac{2\sqrt{x}+3}{5x-10\sqrt{x}} \text{ nên } C = B:A = \frac{2\sqrt{x}+3}{(\sqrt{x}-2)(2\sqrt{x}+1)} \cdot \frac{5\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)}{2\sqrt{x}+3} = \frac{5\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+1}.$$

Vì

$$\sqrt{x} > 0, \forall x > 0, x \neq 4 \text{ nên } C = \frac{5\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+1} > 0 \text{ ta có: } C = \frac{5\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+1} = \frac{5}{2} - \frac{5}{2(2\sqrt{x}+1)} \leq \frac{5}{2} \Rightarrow 0 < C < \frac{5}{2}$$

Kết hợp với điều kiện C là một số nguyên ta suy ra $C \in \{1; 2\}$

+ Nếu $C = 1 \Leftrightarrow 5\sqrt{x} = 2\sqrt{x} + 1 \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \frac{1}{9}$ thỏa mãn điều kiện.

+ Nếu $C = 2 \Leftrightarrow 5\sqrt{x} = 4\sqrt{x} + 2 \Rightarrow \sqrt{x} = 2 \Rightarrow x = 4$ không thỏa mãn điều kiện.

Vậy $x = \frac{1}{9}$ thì C nhận giá trị là một số nguyên.

Bài 5 Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$, $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$ với $x \geq 0, x \neq 1$.

a) Tìm x để $A = 2$.

Chứng tỏ rằng A. B không phụ thuộc vào x.

c) Tìm x để $A \geq B$.

b)

Lời giải:

a) Ta có: $A = 2 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{x}+1 = 2(\sqrt{x}-1) \Leftrightarrow \sqrt{x} = 3 \Leftrightarrow x = 9.$

b) Ta có: $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} - \frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} = \frac{x-2\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}$
 $= \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$ suy ra $A.B = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} \cdot \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} = 1.$

c) $A \geq B \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} \geq \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} - \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(\sqrt{x}+1)^2 - (\sqrt{x}-1)^2}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{4\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} \geq 0$

Vì $x \geq 0$ nên $\sqrt{x} \geq 0$ suy ra điều kiện là $(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1) \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x}-1 > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} > 1 \Leftrightarrow x > 1.$

Vậy để $A \geq B$ thì điều kiện là : $x > 1.$

Bài 6 Cho biểu thức $P = \frac{x\sqrt{x}-3}{x-2\sqrt{x}-3} - \frac{2(\sqrt{x}-3)}{\sqrt{x}+1} + \frac{\sqrt{x}+3}{3-\sqrt{x}}$ với $x \geq 0, x \neq 9$.

a) Rút gọn biểu thức P.

b) Tính giá trị của P biết $x = 3 - 2\sqrt{2}$.

c) Tìm giá trị nhỏ nhất của P.

Lời giải:

a) Ta có: $P = \frac{x\sqrt{x}-3}{x-2\sqrt{x}-3} - \frac{2(\sqrt{x}-3)}{\sqrt{x}+1} + \frac{\sqrt{x}+3}{3-\sqrt{x}} = \frac{x\sqrt{x}-3-2(\sqrt{x}-3)^2-(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-3)}$
 $= \frac{x\sqrt{x}-3-2x+12\sqrt{x}-18-x-4\sqrt{x}-3}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-3)} = \frac{x\sqrt{x}-3x+8\sqrt{x}-24}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-3)} = \frac{(\sqrt{x}-3)(x+8)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-3)} = \frac{x+8}{\sqrt{x}+1}.$

b) Với $x = 3 - 2\sqrt{2} = (\sqrt{2} - 1)^2 \Rightarrow \sqrt{x} = \sqrt{2} - 1$ thay vào P ta có: $P = \frac{11 - 2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{11\sqrt{2} - 4}{2}$.

c) Ta có: $P = \frac{x-1+9}{\sqrt{x}+1} = \sqrt{x}-1 + \frac{9}{\sqrt{x}+1} = \sqrt{x}+1 + \frac{9}{\sqrt{x}+1} - 2$. Áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta

có: $\sqrt{x}+1 + \frac{9}{\sqrt{x}+1} \geq 2\sqrt{9} = 6 \Rightarrow P \geq 4$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi

$\sqrt{x}+1 = \frac{9}{\sqrt{x}+1} \Leftrightarrow \sqrt{x}+1 = 3 \Leftrightarrow x = 4$. Vậy GTNN của P bằng 4 khi $x = 4$.

Bài 7

Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}}{4\sqrt{x}-3}$, $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} + \frac{\sqrt{x}-10}{x-4}$ với $x \geq 0, x \neq 4, x \neq \frac{9}{16}$.

a) Tính giá trị của A khi $x = 25$.

b) Rút gọn B.

Tìm x để $B = 2A$.

c)

Lời giải:

a) Khi $x = 25$ thì $\sqrt{x} = 5$ suy ra $A = \frac{5}{4.5-3} = \frac{5}{17}$.

b)

$$B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} + \frac{\sqrt{x}-10}{x-4} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} + \frac{\sqrt{x}-10}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2) + \sqrt{x}-10}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \frac{x+3\sqrt{x}-10}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \frac{\sqrt{x}+5}{\sqrt{x}+2}$$

$$c) B = 2A \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+5}{\sqrt{x}+2} = \frac{2\sqrt{x}}{4\sqrt{x}-3} \Leftrightarrow 2\sqrt{x}(\sqrt{x}+2) = (\sqrt{x}+5)(4\sqrt{x}-3) \Leftrightarrow 2x+13\sqrt{x}-15=0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x}-1)(2\sqrt{x}+15)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x}=1 \\ \sqrt{x}=-\frac{15}{2} \end{cases} \text{ do } \sqrt{x} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x}=1 \text{ thỏa mãn hay } x=1.$$

Bài 8: Cho $P = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}+2}\right) + \frac{9\sqrt{x}+14}{x+3\sqrt{x}+2}$ với $x \geq 0, x \neq 1$

a, Rút gọn P

b, Tính giá trị của P khi $x = 4$.

c, Tìm các giá trị của x để P là số tự nhiên.

Lời giải

a, Ta có

$$P = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} \left(\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+2} \right) + \frac{9\sqrt{x}+14}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}+1)} = \frac{2\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}+1)} + \frac{9\sqrt{x}+14}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}+1)} = \frac{2x+11\sqrt{x}+14}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}+1)}$$

$$\text{Hay } P = \frac{(\sqrt{x}+2)(2\sqrt{x}+7)}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}+1)} = \frac{(2\sqrt{x}+7)}{(\sqrt{x}+1)}$$

$$b, \text{ Với } x=4 \text{ thì } \sqrt{x}=2 \text{ suy ra } P = \frac{2.2+7}{2+1} = \frac{11}{3}$$

$$c, \text{ Ta có } P = \frac{2(\sqrt{x}+1)+5}{\sqrt{x}+1} = 2 + \frac{5}{\sqrt{x}+1}$$

Do $x \geq 0$ nên $0 < \frac{5}{\sqrt{x}+1} \leq 5$ suy ra $2 < P \leq 7$. Vì P là số nguyên nên

$$P \in \{3; 4; 5; 6; 7\} \Leftrightarrow \frac{5}{\sqrt{x}+1} \in \{3; 4; 5; 6; 7\} \Leftrightarrow \sqrt{x}+1 \in \left\{5; \frac{5}{2}; \frac{5}{3}; \frac{5}{4}; 1\right\}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} \in \left\{4; \frac{3}{2}; \frac{2}{3}; \frac{1}{4}; 0\right\} \Leftrightarrow x \in \left\{16; \frac{9}{4}; \frac{4}{9}; \frac{1}{16}; 0\right\}$$

Đổi chiều điều kiện ta thấy $x \in \left\{16; \frac{9}{4}; \frac{4}{9}; \frac{1}{16}; 0\right\}$ là các giá trị cần tìm

Cách khác : để P là số nguyên thì điều kiện cần và đủ là: $\frac{5}{\sqrt{x}+1} = m$

(với m là số nguyên dương và $x \geq 0$)

Ta có: $\frac{5}{\sqrt{x}+1} = m \Leftrightarrow m\sqrt{x} + m = 5 \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{5-m}{m}$ do $x \geq 0 \Rightarrow$ điều kiện $\frac{5-m}{m} \geq 0$ do $m > 0 \Rightarrow$

$$5-m \geq 0 \Leftrightarrow m \leq 5 \text{ hay } 0 < m \leq 5 \Rightarrow m \in \{1; 2; 3; 4; 5\} \text{ suy ra } \sqrt{x} \in \left\{4; \frac{3}{2}; \frac{2}{3}; \frac{1}{4}; 0\right\} \Leftrightarrow x \in \left\{16; \frac{9}{4}; \frac{4}{9}; \frac{1}{16}; 0\right\}.$$

Bài 9: Cho biểu thức $P = \left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{ab}-b} + \frac{2\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{ab}-a} \right) : \left(\frac{1}{b\sqrt{a}} - \frac{1}{a\sqrt{b}} \right)$ với $a > 0, b > 0, a \neq b$

a, Chứng minh rằng $P = \sqrt{ab}$

b, Tính giá trị của biểu thức P khi $a = 3 - \sqrt{5}$ và $b = 0,5$

c, Tìm giá trị lớn nhất của P nếu $a^2 + 4b^2 = 8$

Lời giải

Ta có:

$$P = \left[\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}(\sqrt{a}-\sqrt{b})} + \frac{2\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}(\sqrt{a}-\sqrt{b})} \right] : \left(\frac{1}{\sqrt{ab}\sqrt{b}} - \frac{1}{\sqrt{ab}\sqrt{a}} \right) = \frac{a - (2\sqrt{a}-\sqrt{b})\sqrt{b}}{\sqrt{ab}(\sqrt{a}-\sqrt{b})} \cdot \frac{ab}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$$

$$\text{Hay } P = \frac{ab(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{\sqrt{ab}(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2} = \sqrt{ab}$$

$$\text{b, Khi } a = 3 - \sqrt{5}, b = \frac{1}{2} \Rightarrow ab = \frac{3-\sqrt{5}}{2} = \frac{6-2\sqrt{5}}{4} = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} \right)^2 \Rightarrow P = \sqrt{ab} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

c, Theo bất đẳng thức AM-GM ta có: $a^2 + 4b^2 \geq 2\sqrt{a^2 \cdot 4b^2} = 4ab \Rightarrow 4ab \leq 8 \Rightarrow ab \leq 2$. Vậy $P \leq \sqrt{2}$, dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a^2 = 4b^2 = 4 \Leftrightarrow a = 2, b = 1$

Vậy GTLN của P là $\sqrt{2}$

Bài 10: Cho hai biểu thức $A = \frac{7\sqrt{x}-2}{2\sqrt{x}+1}, B = \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-3} - \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+3} - \frac{36}{x-9}$ với $x \geq 0, x \neq 9$

a, Rút gọn B, tìm x để $A=B$

b, Tìm tất cả giá trị của x để A nhận giá trị nguyên dương

Lời giải

a, Ta có

$$B = \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-3} - \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+3} - \frac{36}{x-9} = \frac{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}+3) - (\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}-3) - 36}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} = \frac{12\sqrt{x}-36}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} = \frac{12}{\sqrt{x}+3}$$

$$A = B \Leftrightarrow \frac{12}{\sqrt{x}+3} = \frac{7\sqrt{x}-2}{2\sqrt{x}+1} \Leftrightarrow 12(2\sqrt{x}+1) = (\sqrt{x}+3)(7\sqrt{x}-2) \Leftrightarrow 7x - 5\sqrt{x} - 18 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x}-2)(7\sqrt{x}+9) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = 2 \\ \sqrt{x} = -\frac{9}{7} \end{cases} \Rightarrow \sqrt{x} = 2 \Leftrightarrow x = 4 (TMĐK)$$

b, Ta có: $\frac{\frac{7}{2}(2\sqrt{x}+1) - \frac{11}{2}}{2\sqrt{x}+1} < \frac{\frac{7}{2}(2\sqrt{x}+1)}{(2\sqrt{x}+1)} < \frac{7}{2}$ Vì A là số nguyên dương nên ta có:

$$0 < A < \frac{7}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} A=1 \\ A=2 \\ A=3 \end{cases}$$

TH1: $A=1 \Leftrightarrow \frac{7\sqrt{x}-2}{2\sqrt{x}+1} = 1 \Leftrightarrow 5\sqrt{x} = 3 \Leftrightarrow x = \frac{9}{25}$ Thỏa mãn điều kiện

TH2: $A=2 \Leftrightarrow \frac{7\sqrt{x}-2}{2\sqrt{x}+1} = 2 \Leftrightarrow 3\sqrt{x} = 4 \Leftrightarrow x = \frac{16}{9}$ Thỏa mãn điều kiện

TH3: $A=3 \Leftrightarrow \frac{7\sqrt{x}-2}{2\sqrt{x}+1} = 3 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 5 \Leftrightarrow x = 25$ Thỏa mãn điều kiện

Bài 11: Cho biểu thức $P = \left(\frac{\sqrt{x}}{3+\sqrt{x}} + \frac{2x}{9-x} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}-1}{x-3\sqrt{x}} - \frac{2}{\sqrt{x}} \right)$

a, Tìm điều kiện của x để biểu thức P có nghĩa và rút gọn P

b, Tìm giá trị của x để $P = -\frac{4}{3}$

c, Khi $x > 25$ hãy tìm GTNN của P

Lời giải

Điều kiện: $x > 0; x \neq 9; x \neq 25 (*)$

a, Ta có $P = \left(\frac{\sqrt{x}}{3+\sqrt{x}} + \frac{2x}{9-x} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}-1}{x-3\sqrt{x}} - \frac{2}{\sqrt{x}} \right) =$

$$\left[\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} - \frac{2x}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)} \right] : \left[\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-3)} - \frac{2}{\sqrt{x}} \right]$$

$$\Leftrightarrow P = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-3) - 2x}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} : \frac{\sqrt{x}-1-2(\sqrt{x}-3)}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)} = -\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+3)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} \cdot \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-3)}{5-\sqrt{x}} = \frac{x}{\sqrt{x}-5}$$

b, $P = -\frac{4}{3} \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x}-5} = -\frac{4}{3} \Leftrightarrow 3x + 4\sqrt{x} - 20 = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x}-2)(3\sqrt{x}+10) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 2 \Leftrightarrow x = 4$

Thỏa mãn (*)

c, Khi $x > 25$ thì $\sqrt{x}-5 > 0$. Ta có: $P = \frac{x}{\sqrt{x}-5} = \sqrt{x} + 5 + \frac{25}{\sqrt{x}-5} = \sqrt{x}-5 + \frac{25}{\sqrt{x}-5} + 10$. Áp dụng bất

đẳng thức cô si dạng $a+b \geq 2\sqrt{ab}$ ta có: $\sqrt{x}-5 + \frac{25}{\sqrt{x}-5} \geq 2\sqrt{25} = 10$ Suy ra $P \geq 20$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\sqrt{x}-5=\frac{25}{\sqrt{x}-5} \Leftrightarrow (\sqrt{x}-5)^2=25 \Leftrightarrow \sqrt{x}-5=5 \Leftrightarrow x=100$
thỏa mãn (*). Vậy GTNN của P là 20 khi $x=100$

Bài 12. Cho biểu thức $A = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} - \frac{1}{x-\sqrt{x}} \right), B = \frac{\sqrt{x}+1}{x-1}$ Với $x>0, x \neq 1$

a, Rút gọn $P = A:B$

b, Tìm các giá trị của m để tồn tại x sao cho $P\sqrt{x} = m + \sqrt{x}$

Lời giải

a, Ta có $A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} - \frac{1}{x-\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x} \cdot \sqrt{x}-1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} = \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$ $P = A:B = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{x-1}{\sqrt{x}+1} = \frac{x-1}{\sqrt{x}}$

b, Theo giả thiết ta có : $P\sqrt{x} = m + \sqrt{x} \Leftrightarrow x-1 = m + \sqrt{x}$ Đặt $\sqrt{x} = t$, điều kiện $t>0, t \neq 1$

Phương trình trở thành: $t^2-t-m-1=0$. Để phương trình có nghiệm điều kiện là

$$\Delta = 1+4m+4 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq -\frac{5}{4}. \text{ Khi đó theo hệ thức vi ét ta có: } t_1+t_2=1 > 0 \text{ suy ra trong hai}$$

nghiệm tồn tại ít nhất một nghiệm dương. Như vậy ta chỉ cần tìm điều kiện để $t=1$ không phải là nghiệm. Tức là $1-1-m-1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -1$. Vậy điều kiện cần tìm là: $m \geq -\frac{5}{4}, m \neq -1$

Bài 13. Cho biểu thức $P = \left[\frac{x+3\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-1)} - \frac{x+\sqrt{x}}{x-1} \right] : \left(\frac{1}{\sqrt{x}+1} + \frac{1}{\sqrt{x}-1} \right)$ Với $x>0, x \neq 1$

a, Rút gọn P

b, Tính P khi $x = 3+2\sqrt{3}$

c, Với giá trị nào của x thì $\frac{1}{P} - \frac{\sqrt{x}+1}{8} \geq 1$.

Lời giải

a, Ta có

$$P = \left[\frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-1)} - \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} \right] : \left[\frac{2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} \right] = \left(\frac{(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}-1} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} \right) : \frac{2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x}-1} : \frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} \right)$$

b, Ta có $x = 3+2\sqrt{3} = (1+\sqrt{2})^2 \Rightarrow \sqrt{x} = 1+\sqrt{2}$ nên $P = \frac{1}{2} \left(\frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{(2+\sqrt{2})(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

c, $\frac{1}{P} - \frac{\sqrt{x}+1}{8} - 1 = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}+1}{8} - 1 = \frac{16\sqrt{x} - (\sqrt{x}+1)^2 - 8(\sqrt{x}+1)}{8(\sqrt{x}+1)} = \frac{-x+6\sqrt{x}-9}{8(\sqrt{x}+1)} = \frac{(\sqrt{x}-3)^2}{8(\sqrt{x}+1)}$ Vì

$$(\sqrt{x}-3)^2 \geq 0, \forall x > 0, x \neq 1 \text{ nên } \frac{(\sqrt{x}-3)^2}{8(\sqrt{x}+1)} \geq 0 \text{ suy ra } \frac{1}{P} - \frac{\sqrt{x}+1}{8} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{P} - \frac{\sqrt{x}+1}{8} \geq 1$$

Kết hợp với điều kiện đề bài ta suy ra $\frac{1}{p} - \frac{\sqrt{x}+1}{8} = 1 \Leftrightarrow (\sqrt{x}-3)^2 = 0 \Leftrightarrow x=9$

Bài 14. Cho biểu thức: $P = \left(\frac{x-2}{x+2\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}+2} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$ với $x > 0, x \neq 1$

a, Rút gọn P

b, Tìm các giá trị của x để $2P = 2\sqrt{x} + 5$

c, chứng minh : $P + \sqrt{x} > 3$.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{a, Ta có } P &= \left(\frac{x-2}{x+2\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}+2} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} = \left[\frac{x-2}{x+(\sqrt{x}+2)} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)} \right] \cdot \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} = \frac{x+\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)} \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} = \\ &= \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)} \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} = \frac{\sqrt{x}+1}{x} \end{aligned}$$

với $x > 0, x \neq 1$

b, $2P = 2\sqrt{x} + 5$

$$\Leftrightarrow 2 \left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} \right) = 2\sqrt{x} + 5 \Leftrightarrow 2x + 5\sqrt{x} = 2\sqrt{x} + 2 \Leftrightarrow 2x + 3\sqrt{x} - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x}+2)(2\sqrt{x}-1) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$$

c, Ta có: $P + \sqrt{x} = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} + \sqrt{x} = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{x}$. Theo bất đẳng thức cô si dạng $a+b \geq 2\sqrt{ab}$

ta có: $\frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{x} \geq 2$ suy ra $P \geq 3$. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow x=1$ không thỏa mãn điều kiện $x \neq 1$. Vậy $P > 3$ với mọi $x > 0, x \neq 1$

Bài 15. Cho $P = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} - \frac{x-\sqrt{x}-1}{x-2\sqrt{x}} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+1} - \frac{x-5}{x-\sqrt{x}-2} \right)$

a, Rút gọn P

b, So sánh P với 4

c, Tìm x thỏa mãn điều kiện: $x\sqrt{x} \cdot (P-2) + x+4 = 3\sqrt{x^3+4x}$

Lời giải

a, Ta có P=

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} - \frac{x-\sqrt{x}-1}{x-2\sqrt{x}} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+1} - \frac{x-5}{x-\sqrt{x}-2} \right) = \frac{x-x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)} : \frac{x-4-x+5}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)} \\ &= \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)} \cdot (\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2) = \frac{(\sqrt{x}+1)^2}{\sqrt{x}} \end{aligned}$$

b, Ta có $P-4 = \frac{(\sqrt{x}+1)^2}{\sqrt{x}} - 4 = \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{\sqrt{x}} \geq 0 \Rightarrow P \geq 4$, Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x=1$

c, Tìm x thỏa mãn điều kiện $x\sqrt{x} \cdot (P-2) + x+4 = 3\sqrt{x^3+4x}$

$$\text{Ta có } \left[\frac{(\sqrt{x}-1)^2}{\sqrt{x}} - 2 \right] x\sqrt{x} + x+4 = 3\sqrt{x^3+4x} \Leftrightarrow x^2 + 2x + 4 = 3\sqrt{x(x^2+4)}$$

Chia hai vế cho $x^2 + 4 > 0$ ta thu được: $1 + \frac{2x}{x^2 + 4} = 3\sqrt{\frac{x}{x^2 + 4}}$. Đặt $t = \sqrt{\frac{x}{x^2 + 4}}$ với $t > 0$ ta có $2t^2$

$$-3t + 1 = 0 \Leftrightarrow (2t - 1)(t - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Nếu $t = 1, \sqrt{\frac{x}{x^2 + 4}} = 1 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 0$ vô nghiệm do $\Delta = -15 < 0$

Nếu $t = \frac{1}{2}, \sqrt{\frac{x}{x^2 + 4}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ thỏa mãn điều kiện

Kết luận $x = 2$

CHỦ ĐỀ 2: HÀM SỐ BẬC NHẤT, HÀM SỐ BẬC HAI

I. HÀM SỐ BẬC NHẤT

KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Định nghĩa:

+ Hàm số bậc nhất là hàm số được cho bởi công thức $y = ax + b$ trong đó a và b là các số thực cho trước và $a \neq 0$.

+ Khi $b = 0$ thì hàm số bậc nhất trở thành hàm số $y = ax$, biểu thị tương quan tỉ lệ thuận giữa y và x

2. Tính chất:

a. Hàm bậc nhất, xác định với mọi giá trị $x \in \mathbb{R}$

b. Trên tập số thực, hàm số $y = ax + b$ đồng biến khi $a > 0$ và nghịch biến khi $a < 0$.

3. Đồ thị hàm số: $y = ax + b$ ($a \neq 0$)

+ Đồ thị hàm số $y = ax + b$ là đường thẳng cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng b và cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng $-\frac{b}{a}$.

+ a gọi là hệ số góc của đường thẳng $y = ax + b$

4. Cách vẽ đồ thị hàm số $y = ax + b$

+ Vẽ hai điểm phân biệt của đồ thị rồi vẽ đường thẳng đi qua 2 điểm.

+ Thường vẽ đường thẳng đi qua 2 giao điểm của đồ thị với các trục tọa độ $A\left(-\frac{b}{a}; 0\right), B(0; b)$.

+ **Chú ý:** Đường thẳng đi qua $M(m; 0)$ song song với trục tung có phương trình: $x - m = 0$. Đường thẳng đi qua $N(0; n)$ song song với trục hoành có phương trình: $y - n = 0$

5. Kiến thức bổ sung:

Trong mặt phẳng tọa độ cho hai điểm $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ thì $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

Điểm $M(x; y)$ là trung điểm của AB thì $x = \frac{x_1 + x_2}{2}; y = \frac{y_1 + y_2}{2}$.

6. Điều kiện để hai đường thẳng song song. Hai đường thẳng vuông góc.

Cho hai đường thẳng $(d_1): y = ax + b$ và đường thẳng $(d_2): y = a'x + b'$, $a, a' \neq 0$.

$(d_1) // (d_2) \Leftrightarrow a = a'$ và $b \neq b'$.

$(d_1) \equiv (d_2) \Leftrightarrow a = a'$ và $b = b'$

(d_1) cắt $(d_2) \Leftrightarrow a \neq a'$.

$(d_1) \perp (d_2) \Leftrightarrow a \cdot a' = -1$.

Chú ý: Gọi φ là góc tạo bởi đường thẳng $y = ax + b$ và trục Ox , nếu $a > 0$ thì $\tan \varphi = a$.

II. MỘT SỐ BÀI TOÁN TRÊN MẶT TỌA ĐỘ

Ví dụ 1.

Cho đường thẳng $(d_1): y = x + 2$ và đường thẳng $(d_2): y = (2m^2 - m)x + m^2 + m$.

a. Tìm m để $(d_1) // (d_2)$.

- b. Gọi A là điểm thuộc đường thẳng (d_1) có hoành độ $x=2$. Viết phương trình đường thẳng (d_3) đi qua A vuông góc với (d_1) .
- c. Khi $(d_1) \parallel (d_2)$. Hãy tính khoảng cách giữa hai đường thẳng $(d_1), (d_2)$.
- d. Tính khoảng cách từ gốc tọa độ O đến đường thẳng (d_1) và tính $S_{\triangle OMN}$ với M, N lần lượt là giao điểm của (d_1) với các trục tọa độ Ox, Oy .

Lời giải

a. Đường thẳng $(d_1) \parallel (d_2)$ khi và chỉ khi $\begin{cases} 2m^2 - m = 1 \\ m^2 + m \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m-1)(2m+1) = 0 \\ (m-1)(m+2) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = -\frac{1}{2}$

Vậy với $m = -\frac{1}{2}$ thì $(d_1) \parallel (d_2)$.

b. Vì $A \in (d_1)$ có hoành độ $x=2$ suy ra tung độ điểm A là $y=2+2=4$ suy ra $A(2;4)$.

Đường thẳng (d_1) có hệ số góc là $a=1$, đường thẳng (d_2) có hệ số góc là $a' \Rightarrow a' \cdot 1 = -1 \Rightarrow a' = -1$.

Đường thẳng (d_3) có dạng $y = -x + b$. Vì (d_3) đi qua $A(2;4)$ suy ra $4 = -2 + b \Rightarrow b = 6$. Vậy đường thẳng (d_3) là $y = -x + 6$.

c. Khi $(d_1) \parallel (d_2)$ thì khoảng cách giữa hai đường thẳng (d_1) và (d_2) cũng chính là khoảng cách giữa hai điểm A, B lần lượt thuộc (d_1) và (d_2) sao cho $AB \perp (d_1); AB \perp (d_2)$.

Hình vẽ: Gọi B là giao điểm của đường thẳng (d_3) và (d_2) .

Phương trình hoành độ giao điểm của (d_2) và (d_3) là

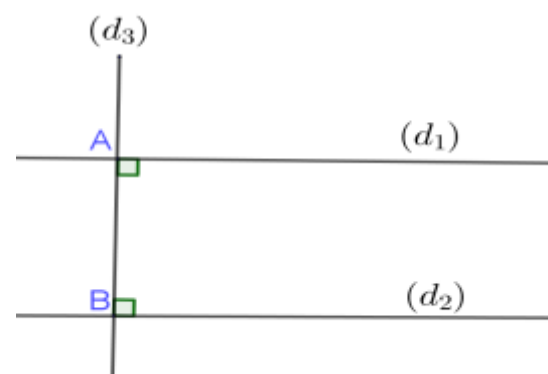
$$-x + 6 = x - \frac{1}{4} \Leftrightarrow x = \frac{25}{8} \Rightarrow y = \frac{23}{8} \Rightarrow B\left(\frac{25}{8}; \frac{23}{8}\right)$$

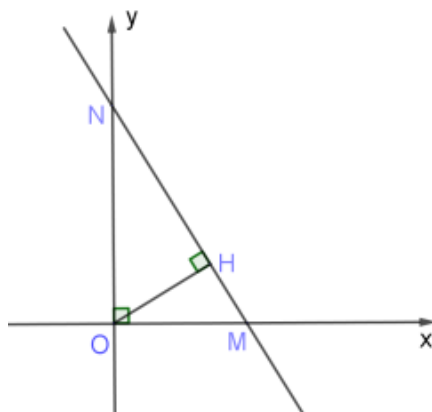
Vậy độ dài đoạn thẳng AB là:

$$AB = \sqrt{\left(\frac{25}{8} - 2\right)^2 + \left(\frac{23}{8} - 4\right)^2} = \frac{9\sqrt{2}}{8}$$

d. Gọi M, N lần lượt là giao điểm của đường thẳng (d_1) với các trục tọa độ Ox, Oy . Ta có:

Cho $y=0 \Rightarrow x=-2 \Rightarrow A(-2;0)$, cho $x=0 \Rightarrow y=-2 \Rightarrow N(0;-2)$. Từ đó suy ra $OM = ON = 2 \Rightarrow MN = 2\sqrt{2}$. Tam giác OMN vuông cân tại O . Gọi H là hình chiếu vuông góc của O lên MN ta có $OH = \frac{1}{2}MN = \sqrt{2}$ và $S_{\triangle OMN} = \frac{1}{2}OM \cdot ON = 2$ (đvdt)





Chú ý: Nếu tam giác OMN không vuông cân tại O . Ta có thể tính OH theo cách:

Trong tam giác vuông OMN ta có:

$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OM^2} + \frac{1}{ON^2}$ (*). Từ đó để tính khoảng cách từ điểm O đến đường thẳng (d) ta làm theo cách:

+ Tìm các giao điểm M, N của (d) với các trục tọa độ.

+ Áp dụng công thức tính đường cao từ đỉnh góc vuông trong tam giác vuông OMN (công thức (*)) để tính đoạn OH .

Bằng cách làm tương tự ta có thể chứng minh được công thức sau:

Cho điểm $M(x_0; y_0)$ và đường thẳng $ax + by + c = 0$. Khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng là:

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Ví dụ 2. Cho đường thẳng $mx + (2 - 3m)y + m - 1 = 0$ (d).

- Tìm điểm cố định mà đường thẳng (d) luôn đi qua.
- Tìm m để khoảng cách từ gốc tọa độ đến đường thẳng (d) là lớn nhất.
- Tìm m để đường thẳng (d) cắt các trục tọa độ Ox, Oy lần lượt tại A, B sao cho tam giác OAB cân.

Lời giải

a. Gọi $I(x_0; y_0)$ là điểm cố định mà đường thẳng (d) luôn đi qua với mọi m khi đó ta có:

$$mx_0 + (2 - 3m)y_0 + m - 1 = 0, \forall m \Leftrightarrow m(x_0 - 3y_0 + 1) + 2y_0 - 1 = 0, \forall m \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 - 3y_0 + 1 = 0 \\ 2y_0 - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\text{Hay } \begin{cases} x_0 = \frac{1}{2} \\ y_0 = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow I\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right).$$

b. Gọi H là hình chiếu vuông góc của O lên đường thẳng (d) . Ta có: $OH \leq OI$ suy ra OH lớn nhất bằng OI khi và chỉ khi $H \equiv I \Leftrightarrow OI \perp (d)$. Đường thẳng qua O có

phương trình: $y = ax$ do $I\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right) \in OI \Rightarrow \frac{1}{2} = a \cdot \frac{1}{2} \Leftrightarrow a = 1 \Rightarrow OI: y = x$.

Đường thẳng (d) được viết lại như sau: $mx + (2 - 3m)y + m - 1 = 0 \Leftrightarrow (2 - 3m)y = -mx + 1 - m$.

+ Để ý rằng với $m = \frac{2}{3}$ thì đường thẳng $(d): x - \frac{1}{2} = 0$ song song với trục Oy nên khoảng cách từ O đến đường thẳng (d) là: $\frac{1}{2}$.

+ Nếu $m \neq \frac{2}{3}$ đường thẳng (d) có thể viết lại: $y = \frac{m}{3m-2}x + \frac{m-1}{3m-2}$. Điều kiện để $(d) \perp OI$ là $\frac{m}{3m-2} \cdot 1 = -1 \Leftrightarrow m = 2 - 3m \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}$. Khi đó khoảng cách $OI = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Vậy $m = \frac{1}{2}$ là giá trị cần tìm.

c. Ta có thể giải bài toán theo hai cách sau:

Cách 1: Dễ thấy $m = \frac{2}{3}$ không thỏa mãn điều kiện (Do (d) không cắt Oy). Xét $m \neq \frac{2}{3}$, đường thẳng (d) cắt Ox, Oy tại các điểm A, B tạo thành tam giác cân OAB . Do $\widehat{AOB} = 90^\circ \Rightarrow \triangle OAB$ vuông tại O . Suy ra hệ số góc của đường thẳng (d) phải bằng 1 hoặc -1 và đường thẳng (d) không đi qua gốc O .

$$\begin{cases} \frac{m}{3m-2} = 1 \\ \frac{m}{3m-2} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = \frac{1}{2} \end{cases} \text{ Ta thấy chỉ có giá trị } m = \frac{1}{2} \text{ là thỏa mãn điều kiện bài toán.}$$

Cách 2. Dễ thấy $m = \frac{2}{3}, m = 0$ không thỏa mãn điều kiện.

Xét $m \notin \left\{0; \frac{2}{3}\right\}$, đường thẳng (d) có thể viết lại: $y = \frac{m}{3m-2}x + \frac{m-1}{3m-2}$

Đường thẳng (d) cắt trục Ox tại điểm A có tung độ bằng 0 nên

$\frac{m}{3m-2}x + \frac{m-1}{3m-2} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1-m}{m} \Rightarrow A\left(\frac{1-m}{m}; 0\right) \Rightarrow OA = \left|\frac{1-m}{m}\right|$, đường thẳng (d) cắt trục Oy tại điểm có hoành độ bằng 0 nên $y = \frac{m-1}{3m-2} \Rightarrow B\left(0; \frac{m-1}{3m-2}\right) \Rightarrow OB = \left|\frac{m-1}{3m-2}\right|$. Điều kiện để tam giác

OAB cân là $OA = OB \Leftrightarrow \left|\frac{1-m}{m}\right| = \left|\frac{m-1}{3m-2}\right| \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ |m| = |3m-2| \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = \frac{1}{2} \end{cases}$ Giá trị $m = 1$ không thỏa mãn,

do đường thẳng (d) đi qua gốc tọa độ.

Kết luận: $m = \frac{1}{2}$.

Ví dụ 3:

Cho hai đường thẳng $(d_1): mx + (m-1)y - 2m + 1 = 0$, $(d_2): (1-m)x + my - 4m + 1 = 0$

- Tìm các điểm cố định mà $(d_1), (d_2)$ luôn đi qua.
- Tìm m để khoảng cách từ điểm $P(0; 4)$ đến đường thẳng (d_1) là lớn nhất.
- Chứng minh hai đường thẳng trên luôn cắt nhau tại điểm I . Tìm quỹ tích điểm I khi m thay đổi.
- Tìm giá trị lớn nhất của diện tích tam giác IAB với A, B lần lượt là các điểm cố định mà $(d_1), (d_2)$ đi qua.

Lời giải

a. Ta viết lại $(d_1): mx + (m-1)y - 2m + 1 = 0 \Leftrightarrow m(x+y-2) + 1 - y = 0$. Từ đó dễ dàng suy ra đường thẳng (d_1) luôn đi qua điểm cố định $A(1;1)$.

Tương tự viết lại $(d_2): (1-m)x + my - 4m + 1 = 0 \Leftrightarrow m(y-x-4) + 1 + x = 0$ suy ra (d_2) luôn đi qua điểm cố định: $B(-1;3)$.

b. Để ý rằng đường thẳng (d_1) luôn đi qua điểm cố định: $A(1;1)$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của P lên (d_1) thì khoảng cách từ A đến (d_1) là $PH \leq PA$.

Suy ra khoảng cách lớn nhất là PA khi $P \equiv H \Leftrightarrow PH \perp (d_1)$. Gọi $y = ax + b$ là phương trình đường thẳng đi qua $P(0;4), A(1;1)$ ta có hệ: $\begin{cases} a \cdot 0 + b = 4 \\ a \cdot 1 + b = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 4 \\ a = -3 \end{cases}$ suy ra phương trình đường thẳng $PA: y = -3x + 4$.

Xét đường thẳng $(d_1): mx + (m-1)y - 2m + 1 = 0$.

Nếu $m = 1 \Rightarrow (d_1): x - 1 = 0$ không thỏa mãn điều kiện.

Khi $m \neq 1 \Rightarrow (d_1): y = \frac{m}{1-m}x + \frac{2m-1}{m-1}$.

Điều kiện để $(d_1) \perp PA: \frac{m}{1-m}(-3) = -1 \Leftrightarrow m = \frac{1}{4}$.

c.

Nếu $m = 0 \Rightarrow (d_1): y - 1 = 0, (d_2): x + 1 = 0$ suy ra hai đường thẳng này luôn vuông góc với nhau và cắt nhau tại $I(-1;1)$.

Nếu $m = 1$ thì $(d_1): x - 1 = 0, (d_2): y - 3 = 0$ suy ra hai đường thẳng này luôn vuông góc với nhau và cắt nhau tại $I(1;3)$.

Nếu $m \neq \{0;1\}$ thì ta viết lại $(d_1): y = \frac{m}{1-m}x + \frac{2m-1}{m-1}$ và $(d_2): y = \frac{m-1}{m}x + \frac{4m-1}{m}$.

Ta thấy $\left(\frac{m}{1-m}\right)\left(\frac{m-1}{m}\right) = -1 \Rightarrow (d_1) \perp (d_2)$.

Do đó hai đường thẳng này luôn cắt nhau tại 1 điểm I .

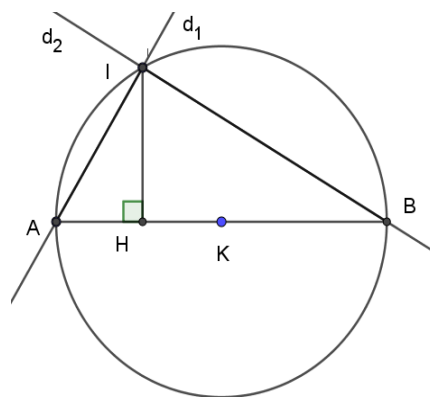
Tóm lại với mọi giá trị của m thì hai đường thẳng $(d_1), (d_2)$ luôn vuông góc và cắt nhau tại điểm I . Mặt khác theo câu a) ta có $(d_1), (d_2)$ lần lượt đi qua hai điểm cố định A, B suy ra tam giác IAB vuông tại A . Nên I nằm trên đường tròn đường kính AB .

d. Ta có $AB = \sqrt{(-1-1)^2 + (3-1)^2} = 2\sqrt{2}$. Dựng

$IH \perp AB$ thì

$$S_{\triangle IAB} = \frac{1}{2} IH \cdot AB \leq \frac{1}{2} IK \cdot AB = \frac{1}{2} \frac{AB}{2} \cdot AB = \frac{AB^2}{4} = 2. \text{ Vậy}$$

giá trị lớn nhất của diện tích tam giác IAB là 2 khi và chỉ khi $IH = IK$. Hay tam giác IAB vuông cân tại I .



Ứng dụng của hàm số bậc nhất trong chứng minh bất đẳng thức và tìm GTLN, GTNN

Ta có các kết quả quan trọng sau:

+ Xét hàm số $y = f(x) = ax + b$ với $m \leq x \leq n$ khi đó GTLN, GTNN của hàm số sẽ đạt được tại $x=m$ hoặc $x=n$. Nói cách khác: $\min_{m \leq x \leq n} f(x) = \min \{f(m); f(n)\}$ và $\max_{m \leq x \leq n} f(x) = \max \{f(m); f(n)\}$.

Như vậy, để tìm GTLN, GTNN của hàm số $y = f(x) = ax + b$ với $m \leq x \leq n$ ta chỉ cần tính các giá trị biên là $f(m), f(n)$ và so sánh hai giá trị đó để tìm GTLN, GTNN.

+ Cũng từ tính chất trên ta suy ra: Nếu hàm số bậc nhất $y = f(x) = ax + b$ có $f(m), f(n) \geq 0$ thì $f(x) \geq 0$ với mọi giá trị của x thỏa mãn điều kiện: $m \leq x \leq n$.

Ví dụ 1: Cho các số thực $0 \leq x, y, z \leq 2$. Chứng minh rằng: $2(x + y + z) - (xy + yz + zx) \leq 4$.

Lời giải:

Ta coi y, z như là các tham số, x là ẩn số thì bất đẳng thức cần chứng minh có thể viết lại như sau: $f(x) = (2 - y - z) + 2(y + z) - yz \leq 0$. Để chứng minh $f(x) \leq 0$ ta cần chứng minh:

$\begin{cases} f(0) \leq 0 \\ f(2) \leq 0 \end{cases}$. Thật vậy ta có:

+ $f(0) = 2(y + z) - yz - 4 = (y - 2)(2 - z) \leq 0$ với y, z thỏa mãn: $0 \leq y, z \leq 2$.

+ $f(2) = 2(2 - y - z) + 2(y + z) - yz - 4 = -yz \leq 0$ với y, z thỏa mãn: $0 \leq y, z \leq 2$.

Từ đó ta suy ra điều phải chứng minh: Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $(x, y, z) = (0; 2; 2)$ hoặc các hoán vị của bộ số trên.

Ví dụ 2:

Cho các số thực không âm x, y, z thỏa mãn điều kiện: $x + y + z = 1$. Tìm GTLN của biểu thức $P = xy + yz + zx - 2xyz$.

Lời giải

Không mất tính tổng quát ta giả sử $z = \min(x, y, z) \Rightarrow z \leq \frac{x + y + z}{3} = \frac{1}{3}$. Ta có

$0 \leq xy \leq \frac{(x + y)^2}{4} = \frac{(1 - z)^2}{4}$. $P = xy(1 - 2z) + (x + y)z = xy(1 - 2z) + z(1 - z)$. Ta coi z là tham số xy là

ẩn số thì $f(xy) = xy(1 - 2z) + z(1 - z)$ là hàm số bậc nhất của xy với $0 \leq xy \leq \frac{(1 - z)^2}{4}$. Để ý rằng

$1 - 2z > 0$ suy ra hàm số $f(xy) = xy(1 - 2z) + z(1 - z)$ luôn đồng biến. Từ đó suy ra

$$f(xy) \leq f\left[\frac{(1 - z)^2}{4}\right] = (1 - 2z)\frac{(1 - z)^2}{4} + z(1 - z) = \frac{-2z^3 + z^2 + 1}{4}$$

$$= \frac{7}{27} - \left(\frac{1}{2}z^3 - \frac{1}{4}z^2 + \frac{1}{108}\right) = \frac{7}{27} - \frac{1}{2}\left(z - \frac{1}{3}\right)^2 \left(z + \frac{1}{6}\right) \leq \frac{7}{27}. \text{ Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi}$$

$$x = y = z = \frac{1}{3}.$$

Ví dụ 3

Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn điều kiện $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng $5(a^2 + b^2 + c^2) - 6(a^3 + b^3 + c^3) \leq 1$.

Lời giải

Không mất tính tổng quát ta giả sử: $a = \min\{a, b, c\} \Rightarrow a \leq \frac{1}{3}$. Bất đẳng thức tương đương với

$$5[a^2 + (b+c)^2 - 2bc] \leq 6[a^3 + (b+c)^3 - 3bc(b+c)] + 1$$

$$\Leftrightarrow 5[a^2 + (1-a)^2 - 2bc] \leq 6[a^3 + (1-a)^3 - 3bc(1-a)] + 1 \Leftrightarrow (9a-4)bc + (2a-1)^2 \geq 0. \text{ Đặt } t = bc \text{ thì}$$

$$0 < t \leq \left(\frac{b+c}{2}\right)^2 = \left(\frac{1-a}{2}\right)^2. \text{ Ta cần chứng minh } f(t) = (9a-4)t + (2a-1)^2 \geq 0 \text{ với mọi}$$

$$t \in \left(0; \left(\frac{1-a}{2}\right)^2\right). \text{ Do } 9a-4 < 0 \text{ suy ra hàm số } f(t) \text{ nghịch biến. Suy ra}$$

$$f(t) \geq f\left(\left(\frac{1-a}{2}\right)^2\right) = \frac{1}{4}a(3a-1)^2 \geq 0. \text{ Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi } a = b = c = \frac{1}{2}.$$

III. HÀM SỐ BẬC HAI

KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Hàm số $y = ax^2 (a \neq 0)$: hàm số xác định với mọi số thực x .

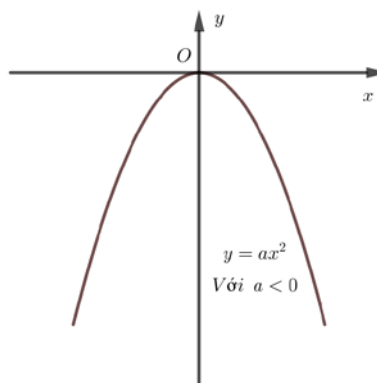
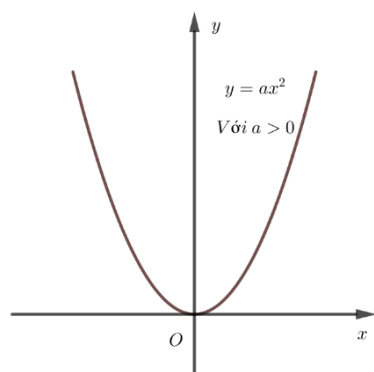
Tính chất biến thiên:

+) Nếu $a > 0$ thì hàm số đồng biến khi $x > 0$, nghịch biến khi $x < 0$.

+) Nếu $a < 0$ thì hàm số đồng biến khi $x < 0$, nghịch biến khi $x > 0$.

Đồ thị hàm số là một đường Parabol nhận gốc O làm đỉnh, nhận trục tung làm trục đối xứng.

Khi $a > 0$ thì parabol có bề lõm quay lên trên, khi $a < 0$ thì parabol có bề lõm quay xuống dưới.



Ví dụ 1:

a, Hãy xác định hàm số $y = f(x) = ax^2$ biết rằng đồ thị của nó đi qua điểm $A(2; 4)$.

b, Vẽ đồ thị của hàm số đã cho

c, Tìm các điểm trên parabol có tung độ bằng 16.

d, Tìm m sao cho $B(m; m^3)$ thuộc parabol.

e, Tìm các điểm trên parabol khác gốc tọa độ cách đều hai trục tọa độ.

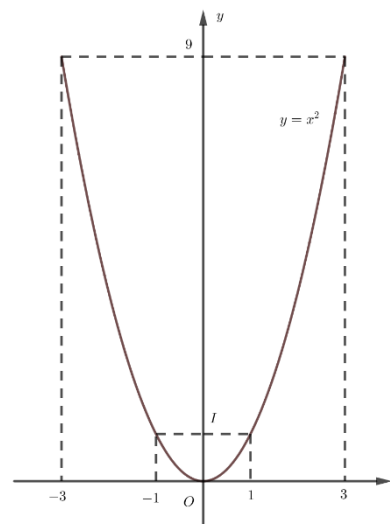
Lời giải

a, Ta có $A \in (P) \Leftrightarrow 4 = a.2^2 \Leftrightarrow a = 1$

b, Đồ thị parabol có đỉnh là gốc tọa độ $O(0;0)$ bề lõm quay lên trên, có trục đối xứng là Oy đi qua các điểm $M(1;1), N(-1;1), E(3;9), F(-3;9)$

c, Gọi C là điểm thuộc (P) có tung độ bằng 16.

Ta có: $y_c = 16 \Leftrightarrow x_c^2 = 16 \Leftrightarrow x_c = \pm 4$. Vậy $C(4;16)$ hoặc $C(-4;16)$.



d. Thay tọa độ điểm B vào (P) ta được: $m^3 = m^2 \Leftrightarrow m^3 - m^2 = 0 \Leftrightarrow m^2(m-1) = 0 \Leftrightarrow m = 0$ hoặc $m = 1$.

e. Gọi D là điểm thuộc (P) cách đều hai trục tọa độ. Ta có: $d(D, Ox) = |y_D| = x_D^2; d(D, Oy) = |x_D|$. Theo giả thiết ta có: $x_D^2 = |x_D| \Leftrightarrow |x_D| = 0$ (loại) hoặc $|x_D| = 1$. Vậy $D(1;1)$ hoặc $D(-1;1)$.

Ví dụ 2.

Một xe tải có chiều rộng là 2,4 m chiều cao là 2,5 m muốn đi qua một cái cổng hình parabol. Biết khoảng cách giữa hai chân cổng là 4 m và khoảng cách từ đỉnh cổng tới mỗi chân cổng là $2\sqrt{5}$ m (Bỏ qua độ dày của cổng).

a. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy gọi parabol $(P): y = ax^2$ với $a < 0$ là hình biểu diễn cổng mà xe tải muốn đi qua. Chứng minh $a = -1$.

b. Hỏi xe tải có đi qua cổng được không? Tại sao?

(Trích đề tuyển sinh vào 10 – trường THPT chuyên ĐHSPT Hà Nội 2015 – 2016)

Lời giải

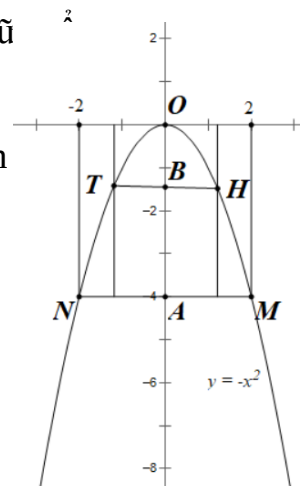
a. Giả sử trên mặt phẳng tọa độ, độ dài các đoạn thẳng được tính theo đơn vị mét. Do khoảng cách giữa hai chân cổng là 4 m nên $MA = NA = 2$ m. Theo giả thiết ta có $OM = ON = 2\sqrt{5}$, áp dụng định lý Pitago ta tính được: $OA = 4$ vậy $M(2; -4), N(-2; -4)$. Do $M(2; -4)$ thuộc parabol nên tọa độ điểm M thỏa mãn phương trình: $(P): y = ax^2$ hay $-4 = a.2^2 \Rightarrow a = -1$ và $(P): y = -x^2$.

b. Để đáp ứng chiều cao trước hết xe tải phải đi vào chính giữa

Xét đường thẳng $(d): y = -\frac{3}{2}$ (ứng với chiều cao của xe).

Đường thẳng này cắt Parabol tại hai điểm có tọa độ thỏa mãn

$$\begin{cases} x^2 = \frac{3}{2} \\ y = -\frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3\sqrt{2}}{2}; y = -\frac{3}{2} \\ x = -\frac{3\sqrt{2}}{2}; y = -\frac{3}{2} \end{cases}$$



Suy ra tọa độ hai giao điểm là $T\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}; -\frac{3}{2}\right); H\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}; \frac{3}{2}\right) \Rightarrow HT = 3\sqrt{2} > 2,4$.

Vậy xe tải có thể đi qua cổng.

Ví dụ 3.

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường thẳng $d: y = -1$ và điểm $F(0;1)$. Tìm tất cả những điểm I sao cho khoảng cách từ I đến d bằng IF .

Lời giải

Giả sử điểm $I(x; y)$. Khi đó khoảng cách từ I đến d bằng $|y+1|$ và $IF = \sqrt{x^2 + (y-1)^2}$. Như vậy $(y+1)^2 = x^2 + (y-1)^2$. Từ đây suy ra $y = \frac{1}{4}x^2$. Do đó tập hợp tất cả những điểm I sao cho khoảng cách từ I đến d bằng IF là đường Parabol $(P_1): y = \frac{1}{4}x^2$.

Ví dụ 4.

- Xác định điểm M thuộc đường Parabol $(P): y = x^2$ sao cho độ dài đoạn IM là nhỏ nhất, trong đó $I(0;1)$.
- Giả sử điểm A chạy trên Parabol $(P): y = x^2$. Tìm tập hợp trung điểm J của đoạn OA .

Lời giải

- Giả sử điểm M thuộc đường parabol $(P): y = x^2$ suy ra $M(m; m^2)$ khi đó

$IM^2 = m^2 + (m^2 - 1)^2 = m^4 - m^2 + 1$. Vậy $IM = \sqrt{\left(m^2 - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$. Ta thấy IM nhỏ nhất bằng $\frac{\sqrt{3}}{2}$ khi $m = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ hay $M\left(\pm \frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

- Giả sử điểm $A(a; a^2)$ thuộc $(P): y = x^2$. Gọi $I(x_I; y_I)$ là trung điểm đoạn OA .

$$\text{Suy ra } \begin{cases} x_I = \frac{a}{2} \\ y_I = \frac{a^2}{2} = 2x_I^2 \end{cases}.$$

Vậy tập hợp các trung điểm I của đoạn OA là đường parabol $(P_1): y = 2x^2$.

Ví dụ 5.

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai điểm A và B chạy trên parabol $(P): y = x^2$ sao cho $A, B \neq O(0;0)$ và $OA \perp OB$. Giả sử I là trung điểm của đoạn AB .

- Tìm quỹ tích điểm trung điểm I của đoạn AB .
- Đường thẳng AB luôn luôn đi qua một điểm cố định.
- Xác định tọa độ điểm A và B sao cho độ dài đoạn AB nhỏ nhất.

Lời giải

- Giả sử $A(a; a^2)$ và $B(b; b^2)$ là hai điểm thuộc (P) . Để $A, B \neq O(0;0)$ và $OA \perp OB$ ta cần điều kiện: $ab \neq 0$ và $OA^2 + OB^2 = AB^2$ hay $ab \neq 0$ và $a^2 + a^4 + b^2 + b^4 = (a-b)^2 + (a^2 - b^2)^2$.

Rút gọn hai vế ta được: $ab = -1$. Gọi $I(x_I; y_I)$ là trung điểm đoạn AB . Khi đó:

$$\begin{cases} x_I = \frac{a+b}{2} \\ y_I = \frac{a^2+b^2}{2} = \frac{(a+b)^2 - 2ab}{2} = 2x_I^2 + 1 \end{cases}$$

Vậy tọa độ điểm I thỏa mãn phương trình $y = 2x^2 + 1$.

Ta cũng có thể tìm điều kiện để $OA \perp OB$ theo cách sử dụng hệ số góc: Đường thẳng OA có hệ số góc là $k_1 = \frac{a^2}{a} = a$, đường thẳng OB có hệ số góc là $k_2 = \frac{b^2}{b} = b$. Suy ra điều kiện để $OA \perp OB$ là $ab = -1$

b) Phương trình đường thẳng đi qua A và B là $(AB): \frac{x-a}{b-a} = \frac{y-a^2}{b^2-a^2}$ hay

$(AB): y = (a+b)x - ab = (a+b)x + 1$. Từ đây ta dễ dàng suy ra đường thẳng $(AB): y = (a+b)x + 1$ luôn luôn đi qua điểm cố định $(0;1)$.

c) Vì $OA \perp OB$ nên $ab = -1$. Độ dài đoạn $AB = \sqrt{(a-b)^2 + (a^2-b^2)^2}$ hay

$AB = \sqrt{a^2+b^2 - 2ab + a^4 + b^4 - 2a^2b^2}$. Áp dụng bất đẳng thức Cô si ta có $a^2 + b^2 \geq 2\sqrt{a^2b^2} = 2|ab|$, $a^4 + b^4 \geq 2a^2b^2$. Ta có: $AB \geq \sqrt{2|ab| + 2 + 2a^2b^2 - 2a^2b^2} = 2$. Vậy AB ngắn nhất bằng 2 khi $a^2 = b^2$, $ab = -1$. Ta có thể chỉ ra cặp điểm đó là: $A(-1;1)$ và $B(1;1)$.

Ví dụ 6

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho parabol $(P): y = x^2$, trên (P) lấy hai điểm $A(-1;1)$, $B(3;9)$.

a, Tính diện tích tam giác OAB .

b, Xác định điểm C thuộc cung nhỏ AB của (P) sao cho diện tích tam giác ABC lớn nhất.

Lời giải:

a, Gọi $y = ax + b$ là phương trình đường thẳng AB .

Ta có $\begin{cases} a(-1) + b = 1 \\ a \cdot 3 + b = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \end{cases}$ suy ra phương trình đường

thẳng AB $(d): y = 2x + 3$. Đường thẳng AB cắt trục Oy tại điểm $I(0;3)$. Diện tích tam giác OAB là:

$$S_{OAB} = S_{OAI} + S_{OBI} = \frac{1}{2}AH.OI + \frac{1}{2}BK.OI.$$

Ta có $AH = 1; BK = 3, OI = 3$. Suy ra $S_{OAB} = 6$ (đvdt).

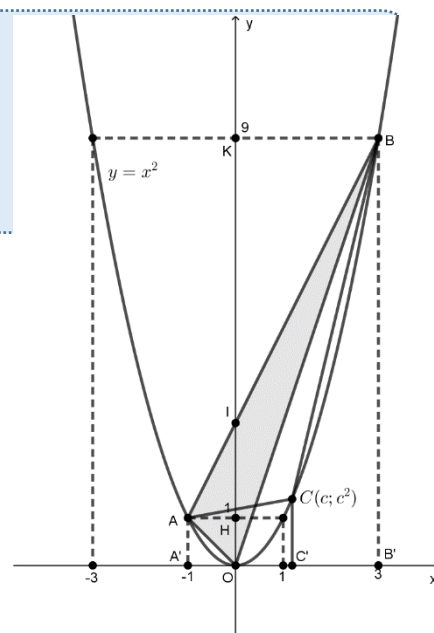
b, Giả sử $C(c; c^2)$ thuộc cung nhỏ (P) với $-1 < c < 3$.

Diện tích tam giác: $S_{ABC} = S_{ABB'A'} - S_{ACC'A'} - S_{BCC'B'}$.

Các tứ giác $ABB'A', AA'C'C, CBB'C'$ đều là hình thang vuông nên ta có:

$$S_{ABC} = \frac{1+9}{2} \cdot 4 - \frac{1+c^2}{2} \cdot (c+1) - \frac{9+c^2}{2} \cdot (3-c) = 8 - 2(c-1)^2 \leq 8.$$

Vậy diện tích tam giác ABC lớn nhất bằng 8 (đvdt) khi $C(1;1)$.



IV. MỘT SỐ VẤN ĐỀ LIÊN QUAN ĐẾN PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

1. Công thức nghiệm phương trình bậc hai.

Kiến thức cần nhớ

Đối với phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) có biệt thức $\Delta = b^2 - 4ac$.

+ Nếu $\Delta < 0$ thì phương trình vô nghiệm.

+ Nếu $\Delta = 0$ thì phương trình có nghiệm kép $x = -\frac{b}{2a}$.

+ Nếu $\Delta > 0$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$; $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$.

Công thức nghiệm thu gọn: Khi $b = 2b'$, ta xét $\Delta' = b'^2 - ac$. Khi đó:

+ Nếu $\Delta' < 0$ thì phương trình vô nghiệm.

+ Nếu $\Delta' = 0$ thì phương trình có nghiệm kép $x = -\frac{b'}{a}$.

+ Nếu $\Delta' > 0$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x_1 = \frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a}$; $x_2 = \frac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a}$.

2. Sự tồn tại nghiệm của phương trình bậc hai.

Để chứng minh một phương trình bậc hai có nghiệm. Thông thường ta chứng minh: $\Delta \geq 0$ dựa trên các kỹ thuật như biến đổi tương đương để đưa về dạng $(Ax + B)^2 \geq 0$, kiến thức về bất đẳng thức, bất phương trình, trong một số bài toán khó ta cần nắm bắt được những tính chất đặc biệt của tam thức bậc hai để vận dụng.

Ngoài các kiến thức cơ sở trong SGK ta cần nắm thêm một số kết quả, bổ đề quan trọng sau:

+ Mọi tam thức bậc hai: $f(x) = ax^2 + bx + c$ với $a \neq 0$ đều có thể phân tích thành dạng

$$f(x) = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a} \text{ với } \Delta = b^2 - 4ac.$$

+ Để chứng minh một phương trình bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) có nghiệm ngoài cách chứng minh $\Delta \geq 0$ ta còn có cách khác như sau: “Chỉ ra số thực α sao cho $a \cdot f(\alpha) \leq 0$ hoặc hai số thực α, β sao cho: $f(\alpha) \cdot f(\beta) \leq 0$ ”.

Thật vậy ta có thể chứng minh điều này như sau:

$$+ \text{ Ta có } a \cdot f(\alpha) = a^2 \left[\left(\alpha + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right] \leq 0 \Rightarrow \left(\alpha + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \leq 0 \Rightarrow \frac{\Delta}{4a^2} \geq \left(\alpha + \frac{b}{2a} \right)^2 \geq 0$$

$\Rightarrow \Delta \geq 0$ suy ra phương trình cso nghiệm.

+ Xét $(a \cdot f(\alpha))(a \cdot f(\beta)) = a^2 f(\alpha) \cdot f(\beta) \leq 0 \Rightarrow$ trong hai số $af(\alpha)$ và $af(\beta)$ có một số không dương, tức là $af(\alpha) \leq 0$ hoặc $af(\beta) \leq 0 \Rightarrow$ phương trình có nghiệm.

Ví dụ 1

Cho phương trình: $(m-1)x^2 - 2(m+1)x + (m-3) = 0$ (1)

a, Giải phương trình (1) khi $m = 2$.

b, Tìm m để phương trình (1) có nghiệm kép.

c, Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt.

Lời giải:

a, Với $m = 2$ ta có phương trình: $x^2 - 6x - 1 = 0$. Ta có $\Delta' = (-3)^2 + 1 = 10$, nên phương trình có 2

nghiệm là: $x = 3 - \sqrt{10}$ và $x = 3 + \sqrt{10}$.

b, Phương trình (1) có nghiệm kép khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} (m-1) \neq 0 \\ \Delta' = (m+1)^2 - (m-1)(m-3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ 6m-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow m = \frac{1}{3}.$$

c, Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi

$$\begin{cases} (m-1) \neq 0 \\ \Delta' = (m+1)^2 - (m-1)(m-3) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ 6m-2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > \frac{1}{3} \\ m \neq 1 \end{cases}.$$

Ví dụ 2

Cho $a+b \geq 0, b+c \geq 0, a+c \geq 0$. Chứng minh rằng phương trình sau có nghiệm:

$$(a+b+a)x^2 - 2\sqrt{3(a^3+b^3+c^3)}x + (a^2+b^2+c^2) = 0.$$

Lời giải:

Nếu $a+b+c=0$ thì từ giả thiết ta suy ra $a=b=c=0$. Do vậy phương trình có vô số nghiệm. Dưới đây ta xét trường hợp $a+b+c \neq 0$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \Delta' &= 3(a^3+b^3+c^3) - (a+b+c)(a^2+b^2+c^2) \\ &= 2(a^3+b^3+c^3) - ab(a+b) - bc(b+c) - ac(a+c) \\ &= (a^3+b^3-ab(a+b)) + (b^3+c^3-bc(b+c)) + (a^3+c^3-ac(a+c)) \\ &= (a+b)(a-b)^2 + (b+c)(b-c)^2 + (a+c)(a-c)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Do $a+b, b+c, a+c \geq 0$. Từ đó suy ra phương trình đã cho có nghiệm.

Ví dụ 3

Cho phương trình: $ax^2 + bcx + b^3 + c^3 - 4abc = 0$ (1)

($a \neq 0$) vô nghiệm. Chứng minh rằng trong hai phương trình sau có một phương trình vô nghiệm và một phương trình có nghiệm: $ax^2 + bx + c = 0$ (2) và $ax^2 + cx + b = 0$ (3).

Lời giải:

Vì (1) vô nghiệm nên ta có:

$$\Delta_1 = b^2c^2 - 4a(b^3 + c^3 - 4abc) < 0 \Leftrightarrow (b^2 - 4ac)(c^2 - 4ab) < 0 \quad (*)$$

Phương trình (2) có: $\Delta_2 = b^2 - 4ac$; Phương trình (3) có: $\Delta_3 = c^2 - 4ab$

Nên $(*) \Leftrightarrow \Delta_2 \Delta_3 < 0 \Rightarrow$ trong hai số Δ_2, Δ_3 luôn có một số dương và một số âm dẫn đến trong hai phương trình (2) và (3) luôn có một phương trình có nghiệm và một phương trình vô nghiệm.

Ví dụ 4

a, Cho các số dương a, b, c thỏa mãn điều kiện $a + 2b + 3c = 1$. Chứng minh rằng có ít nhất một trong hai phương trình sau có nghiệm $4x^2 - 4(2a+1)x + 4a^2 + 192abc + 1 = 0$ và

b, Cho các số a, b, c thỏa mãn điều kiện $a + b + c = 6$. Chứng minh rằng ít nhất một trong ba phương trình sau có nghiệm: $x^2 + ax + 1 = 0$; $x^2 + bx + 1 = 0$; $x^2 + cx + 1 = 0$

c, Chứng minh rằng trong ba phương trình sau có ít nhất một phương trình có nghiệm: $ax^2 + 2bx + c = 0$ (1); $bx^2 + 2cx + a = 0$ (2) và $cx^2 + 2ax + b = 0$ (3).

Lời giải:

a, Hai phương trình trên lần lượt có

$\Delta'_1 = 16a(1 - 48bc)$, $\Delta'_2 = 16b(1 - 24ac)$. Vì a, b là các số dương nên Δ'_1, Δ'_2 lần lượt cùng dấu với $1 - 48bc$ và $1 - 24ac$. Mặt khác ta lại có

$1 - 48bc + 1 - 24ac = 2 - 24c(a + 2b) = 2 - 24c(1 - 3c) = 2(6c - 1)^2 \geq 0$. Dẫn đến $\Delta'_1 + \Delta'_2 \geq 0$. Vậy có ít nhất một trong hai phương trình trên có nghiệm.

b, Ba phương trình đã cho lần lượt có $\Delta_1 = a^2 - 4$; $\Delta_2 = b^2 - 4$; $\Delta_3 = c^2 - 4$.

Do đó $\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 = a^2 + b^2 + c^2 - 12$.

Lại có $3(a^2 + b^2 + c^2) = (a + b + c)^2 + (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \geq (a + b + c)^2$. Suy ra

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{(a + b + c)^2}{3} = \frac{6^2}{3} = 12. \text{ Do đó } a^2 + b^2 + c^2 - 12 \geq 0 \text{ hay } \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 \geq 0.$$

Vậy có ít nhất một trong ba phương trình đã cho có nghiệm.

c, Nếu trong ba số a, b, c có một số bằng 0, chẳng hạn $a = 0 \Rightarrow$ (2) có nghiệm $x = 0$.

Ta xét a, b, c là các số thực khác 0, khi đó ba phương trình đã cho là ba phương trình bậc hai lần lượt có: $\Delta'_1 = b^2 - ac$; $\Delta'_2 = c^2 - ab$; $\Delta'_3 = a^2 - bc$.

Xét tổng $\Delta'_1 + \Delta'_2 + \Delta'_3$ ta có:

$$\Delta'_1 + \Delta'_2 + \Delta'_3 = a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = \frac{1}{2}[(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2] \geq 0. \text{ Suy ra trong ba số}$$

$\Delta'_1, \Delta'_2, \Delta'_3$ có ít nhất một số không âm hay ba phương trình đã cho có ít nhất một phương trình có nghiệm.

Ví dụ 5

a, Cho tam thức bậc hai $f(x) = x^2 + bx + c$ trong đó b, c là các số nguyên. Chứng minh rằng, tồn tại số nguyên k để được $f(k) = f(2015) \cdot f(2016)$.

b, Cho tam thức bậc hai $f(x) = x^2 + bx + c$. Giả sử phương trình $f(x) = x$ có hai nghiệm phân biệt. Chứng minh rằng phương trình $f(f(x)) = x$ có 4 nghiệm nếu: $(b + 1)^2 > 4(b + c + 1)$.

Lời giải:

a, Để chứng minh sự tồn tại của số k ta cần chỉ ra tính chất:

Với mọi đa thức bậc hai dạng $f(x) = x^2 + px + q$.

Ta luôn có $f(f(x) + x) = f(x) \cdot f(x + 1)$ với mọi x . Thật vậy, ta có:

$$\begin{aligned} f(f(x) + x) &= [f(x) + x]^2 + b[f(x) + x] + c = f^2(x) + 2f(x) \cdot x + x^2 + b \cdot f(x) + bx + c \\ &= f^2(x) + 2f(x) \cdot x + b \cdot f(x) + x^2 + bx + c = f^2(x) + 2f(x) \cdot x + bf(x) + f(x) \\ &= f(x)[f(x) + 2x + b + 1] = f(x)[x^2 + 2x + 1 + b(x + 1) + c] = f(x) \cdot f(x + 1) \end{aligned}$$

Trở lại bài toán chọn $x = 2015$ ta có $f(f(2015) + 2015) = f(2015) \cdot f(2016)$. Ta suy ra số k cần

tìm chính là: $k = f(2015) + 2015$.

b, Ta có: $f(f(x)) - x = f^2(x) + bf(x) + c - x$

$= f(x)[f(x) - x] + x[f(x) - x] + b[f(x) - x] + x^2 + bx + c - x$ hay

$f(f(x)) - x = [f(x) - x][f(x) + x + b + 1] = [f(x) - x][x^2 + (b+1)x + b + c + 1]$. Để ý rằng phương trình $x^2 + (b+1)x + b + c + 1 = 0$ có $\Delta = (b+1)^2 - 4(b+c+1) > 0$ và $f(x) - x = 0$ có 2 nghiệm phân biệt nên suy ra $f(f(x)) = x$ có 4 nghiệm.

Chú ý:

+ Để chứng minh trong n số $a_1, a_2, \dots, a_n$ có ít nhất một số không âm (hoặc một số dương) ta chỉ cần chứng minh tổng $k_1a_1 + k_2a_2 + \dots + k_na_n \geq 0$ trong đó $k_1, k_2, \dots, k_n \geq 0$.

Ví dụ 6:

Cho a, b, c là các số thực có tổng khác 0. Chứng minh rằng phương trình sau luôn có nghiệm:
 $a(x-a)(x-c) + b(x-c)(x-a) + c(x-a)(x-b) = 0$ (1)

Lời giải

Cách 1: (1) $\Leftrightarrow (a+b+c)x^2 - 2(ab+bc+ca) + 3abc = 0$ (2)

Vì $a+b+c \neq 0$ nên (2) là phương trình bậc hai, do đó để chứng minh phương trình có nghiệm ta chỉ cần chứng minh $\Delta' \geq 0$.

Ta có $\Delta' = (ab+bc+ca)^2 - 3abc(a+b+c) = a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 - abc(a+b+c)$

$$= \frac{1}{2}[(ab-bc)^2 + (bc-ca)^2 + (ca-ab)^2] \geq 0. \text{ Vậy phương trình đã cho luôn có nghiệm.}$$

Cách 2: Gọi $f(x)$ là vế trái của phương trình (1). Ta có:

$$f(0) = -3abc; f(a) = a(a-b)(a-c); f(b) = b(b-a)(b-c); f(c) = c(c-a)(c-b).$$

$$\Rightarrow f(0).f(a).f(b).f(c) = -3[abc(a-b)(b-c)(c-a)]^2 \leq 0.$$

$\Rightarrow$ trong bốn số $\Rightarrow f(0), f(a), f(b), f(c)$ luôn tồn tại hai số có tích không dương.

Dẫn đến phương trình đã cho luôn có nghiệm.

Ví dụ 7:

Cho a, b, c thỏa mãn: $3a + 4b + 6c = 0$. Chứng minh rằng phương trình sau luôn có nghiệm:
 $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$.

Lời giải

Cách 1:

• Nếu $a = 0 \Rightarrow 4b + 6c = 0 \Rightarrow c = -\frac{2}{3}b \Rightarrow f(x) = b\left(x - \frac{2}{3}\right) \Rightarrow f(x)$ có nghiệm.

• Nếu $a \neq 0$ ta có: $\Delta = b^2 - 4ac = \frac{(3a+6c)^2}{16} - 4ac = \frac{(3a-6c)^2}{16} \geq 0 \Rightarrow f(x) = 0$ có nghiệm.

Cách 2: Ta có: $2f(1) + 4f\left(\frac{1}{2}\right) = 2(a+b+c) + 4\left(\frac{1}{4}a + \frac{1}{2}b + c\right) = 3a + 4b + 6c = 0$.

$$\Rightarrow f(1) = -2f\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow f(1) \cdot f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}f^2\left(\frac{1}{2}\right) \leq 0 \Rightarrow f(x) = 0 \text{ có nghiệm.}$$

Cách 3: Ta có: $f(0) = c$; $f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{9}{16}a + \frac{3}{4}b + c = \frac{9a+12b+16c}{16} = \frac{3(3a+4b+6c)-2c}{16} = -\frac{c^2}{8}$.

$$\Rightarrow f(0) \cdot f\left(\frac{3}{4}\right) \leq 0 \Rightarrow \text{phương trình luôn có nghiệm.}$$

Nhận xét:

Với cách giải thứ hai thì việc khó nhất là phải chứng minh được đẳng thức:

$$2f(1) + 4f\left(\frac{1}{2}\right) = 0.$$

Tại sao ta xét $f(1)$, $f\left(\frac{1}{2}\right)$ và nhân thêm các hệ số 2 và 4. Vậy ngoài hai giá trị $f(1)$, $f\left(\frac{1}{2}\right)$ ta còn có những giá trị nào khác không? Câu trả lời là có, chẳng hạn ta xét $f(1)$, $f\left(\frac{2}{3}\right)$, $f(0)$.

Ta cần xác định hệ số $m, n, p > 0$ sao cho: $mf(1) + nf\left(\frac{2}{3}\right) + pf(0) = 3a + 4b + 6c$. Đồng nhất các

hệ số ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} m + \frac{4}{9}n = 3 \\ m + \frac{2}{3}n = 4 \\ m + n + p = 6 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1, n = \frac{9}{2}, p = \frac{1}{2}. \text{ Vậy ta có:}$$

$2f(1) + 9f\left(\frac{2}{3}\right) + f(0) = 0 \Rightarrow$ trong ba số $f(1)$, $f\left(\frac{2}{3}\right)$, $f(0)$ tồn tại một số không âm và một số không dương, dẫn đến tích hai số đó không dương hay phương trình có nghiệm.

Cách 4: Tại sao ta chỉ ra được $f\left(\frac{3}{4}\right)$. Điều này là hoàn toàn tự nhiên nếu ta cần tạo ra một tỷ lệ $3a : 4b$ để tận dụng giả thiết: $3a + 4b + 6c = 0$.

Ta xét bài toán tổng quát sau:

Ví dụ 8:

Cho các số thực dương m, n, p thỏa mãn: $n < m$; $mp < n^2$ và $\frac{a}{m} + \frac{b}{n} + \frac{c}{p} = 0$. Chứng minh rằng phương trình: $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$ (1) có nghiệm $x \in (0; 1)$.

Lời giải

Để chứng minh (1) có nghiệm $x \in (0; 1)$, ta sẽ chỉ ra các số thực $\alpha, \beta \in (0; 1)$ sao cho $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$.

Vì $\alpha, \beta \in (0; 1)$ và có giả thiết $n < m \Leftrightarrow \frac{n}{m} < 1$ nên dẫn đến ta xét: $f\left(\frac{n}{m}\right) = a\frac{n^2}{m^2} + b\frac{n}{m} + c$.

Mặt khác từ: $\frac{a}{m} + \frac{b}{n} + \frac{c}{p} = 0 \Rightarrow \frac{m}{n^2} \left(a\frac{n^2}{m^2} + b\frac{n}{m} + c \right) + c \left(\frac{1}{p} - \frac{m}{n^2} \right) = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{m}{n^2} f\left(\frac{n}{m}\right) + c \cdot \frac{n^2 - pm}{pn^2} = 0 \Leftrightarrow f\left(\frac{n}{m}\right) = \frac{pm - n^2}{pm} c = \frac{pm - n^2}{pm} f(0).$$

* Xét $c = 0$

- Nếu $a = 0 \Rightarrow b = 0 \Rightarrow f(x)$ là đa thức không, do đó $f(x)$ sẽ có nghiệm trong $(0;1)$.

- Nếu $a \neq 0$, từ giả thiết $\Rightarrow -\frac{b}{a} = \frac{n}{m} < 1$ và $f(x) = x(ax+b) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{a} \in (0;1)$.

* Xét $c \neq 0$, ta có: $f\left(\frac{n}{m}\right) \cdot f(0) = \frac{pm - n^2}{pm} f^2(0) < 0 \Rightarrow f(x)$ có nghiệm $x \in \left(0; \frac{n}{m}\right) \subset (0;1)$.

Vận dụng điều kiện có nghiệm của phương trình bậc hai trong các bài toán GTLN, GTNN

Bài toán 1: Tìm GTLN, GTNN của biểu thức $y = \frac{ax^2 + bx + c}{mx^2 + nx + p}$ với $mx^2 + nx + p > 0, \forall x$.

Phương pháp

Gọi y_0 là một giá trị của biểu thức. Khi đó

$$y_0 = \frac{ax^2 + bx + c}{mx^2 + nx + p} \Leftrightarrow (y_0 m - a)x^2 + (y_0 n - b)x + y_0 p - c = 0. (*)$$

Ta xét 2 trường hợp:

+ Nếu $y_0 m - a = 0 \Leftrightarrow y_0 = \frac{a}{m}$ thay vào (*) ta tìm được x suy ra $y_0 = \frac{a}{m}$ là một giá trị của biểu thức.

+ Nếu $y_0 m - a \neq 0 \Leftrightarrow y_0 \neq \frac{a}{m}$ thì (*) là phương trình bậc hai ẩn x . Điều kiện để phương trình có nghiệm là: $\Delta \geq 0$. Từ đó ta suy ra điều kiện của y_0 . Trên cơ sở đó ta tìm được GTLN, GTNN (nếu có) của biểu thức.

+ Ngoài ra trong quá trình chứng minh bất đẳng thức ta cần nắm kết quả sau:

Ta có: $a \cdot f(x) = a^2 \left[\left(x + \frac{b}{a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right] = a^2 \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4}$. Từ đó suy ra: Nếu $\Delta \leq 0$ thì

$a \cdot f(x) \geq 0 \Leftrightarrow a, f(x)$ luôn cùng dấu. Một kết quả thường xuyên sử dụng trong giải toán là:
"Nếu tam thức bậc hai: $f(x) = ax^2 + bx + c > 0, \Delta \leq 0 \Rightarrow f(x) \geq 0, \forall x$."

Ví dụ 1

Tìm GTLN, GTNN của các biểu thức:

a) $y = \frac{x^2}{x^2 - 5x + 7}.$

b) $P = \frac{x^2 - 8x + 7}{x^2 + 1}.$

c) $A = \frac{2x^2 - 2xy + 9y^2}{x^2 + 2xy + 5y^2}$ với $y \neq 0$.

d) $A = \frac{2x^2 + 12xy}{1 + 2xy + 2y^2}$ biết $x^2 + y^2 = 1$ (Đề Tuyển sinh Đại học khối B – 2008).

Lời giải

a) Do $x^2 - 5x + 7 = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0, \forall x$ suy ra biểu thức y luôn xác định với mọi x . Gọi y_0 là một giá trị của biểu thức khi đó ta có: (*)

+ Nếu $y_0 = 1 \Rightarrow -5x + 7 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{7}{5}$ điều đó có nghĩa là $y_0 = 1$ là một giá trị của biểu thức nhận được.

+ Nếu $y_0 \neq 1$ thì (*) là một phương trình bậc hai. Phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq y_0 \leq \frac{28}{3}$. Để ý rằng với mỗi giá trị $y_0 = 0$ hoặc $y_0 = \frac{28}{3}$ thì $\Delta = 0$ nên

+ GTNN của y là 0 khi và chỉ khi $x = -\frac{5y_0}{2(y_0 - 1)} = 0$.

+ GTLN của y là $\frac{28}{3}$ khi và chỉ khi $x = -\frac{5y_0}{2(y_0 - 1)} = -\frac{5 \cdot \frac{28}{3}}{2\left(\frac{28}{3} - 1\right)} = \frac{14}{5}$.

b) ĐKXD: $\forall x \in \mathbb{R}$.

Ta có $P = \frac{x^2 - 8x + 7}{x^2 + 1} \Leftrightarrow (P - 1)x^2 + 8x + (P - 7) = 0$ (1). Coi (1) là phương trình bậc hai ẩn x .

Trường hợp 1: $P - 1 = 0 \Leftrightarrow P = 1$ thì $x = \frac{3}{4}$ (*)

Trường hợp 2: $P - 1 \neq 0 \Leftrightarrow P \neq 1$ phương trình (1) có nghiệm khi

$$\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow P^2 - 8P - 9 \leq 0 \Leftrightarrow (P + 1)(P - 9) \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq P \leq 9 \quad (**).$$

Kết hợp (*) và (**) ta có $\min P = -1; \max P = 9$.

c) $A = \frac{2x^2 - 2xy + 9y^2}{x^2 + 2xy + 5y^2}$. Biểu thức A có dạng đẳng cấp bậc hai.

Ta chia tử số và mẫu số cho y^2 và đặt $t = \frac{x}{y}$ thì $A = \frac{2t^2 - 2t + 9}{t^2 + 2t + 5}$. Ta có $t^2 + 2t + 5 = (t + 1)^2 + 4 > 0$ với mọi t . Gọi A_0 là một giá trị của biểu thức. Khi đó ta có:

$$A_0 = \frac{2t^2 - 2t + 9}{t^2 + 2t + 5} \Leftrightarrow (A_0 - 2)t^2 + (2A_0 + 2)t + 5A_0 - 9 = 0 \quad (*).$$

+ Nếu $A_0 = 2$ thì $t = -\frac{1}{6}$ suy ra $A_0 = 2$ là một giá trị của biểu thức nhận được.

+ Nếu $A_0 \neq 2$ thì (*) là một phương trình bậc hai có

$$\Delta' = (A_0 + 1)^2 - (A_0 - 2)(5A_0 - 9) - 4A_0^2 + 21A_0 - 17. \text{ Điều kiện để phương trình có nghiệm là}$$

$$\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow -4A_0^2 + 21A_0 - 17 \geq 0 \Leftrightarrow (1 - A_0)(4A_0 - 17) \geq 0 \Leftrightarrow 1 \leq A_0 \leq \frac{17}{4}. \text{ Từ đó ta có GTNN của } A \text{ là}$$

1 khi và chỉ khi $t = -\frac{A_0+1}{A_0-2} = 2 \Leftrightarrow x = 2y$. GTLN của A là $\frac{17}{4}$ khi và chỉ khi

$$t = -\frac{A_0+1}{A_0-2} = -\frac{7}{3} \Leftrightarrow x = -\frac{7}{3}y.$$

d) Nếu $y = 0$ thì $x^2 = 1 \Rightarrow P = 2x^2 = 2$.

Xét $y \neq 0$ đặt $x = ty$ thì $A = \frac{2x^2+12xy}{1+2xy+2y^2} = \frac{2x^2+12xy}{x^2+2xy+3y^2} = \frac{2(t^2+6t)}{t^2+2t+3}$. Giải tương tự như câu b)

ta có $-6 \leq A \leq 3$. Suy ra GTNN của A là -6 đạt được khi và chỉ khi $x = \frac{3}{\sqrt{13}}$; $y = \frac{-2}{\sqrt{13}}$ hoặc

$x = -\frac{3}{\sqrt{13}}$; $y = \frac{2}{\sqrt{13}}$. GTLN của A là 3 đạt được khi và chỉ khi $x = \frac{3}{\sqrt{10}}$; $y = \frac{1}{\sqrt{10}}$ hoặc

$$x = -\frac{3}{\sqrt{10}}$$
; $y = -\frac{1}{\sqrt{10}}$.

Ví dụ 2

Cho các số thực x, y, z thỏa mãn điều kiện $\begin{cases} xy + yz + zx = 8 \\ x + y + z = 5 \end{cases}$. Tìm GTLN, GTNN của x .

Lời giải

Ta viết lại hệ phương trình dưới dạng: $\begin{cases} yz = 8 - x(y+z) \\ y+z = 5-x \end{cases}$ (*) hay $\begin{cases} yz = 8 - x(5-x) \\ y+z = 5-x \end{cases}$ (*).

Vì x, y, z là các số thực thỏa mãn (*) nên suy ra y, z là hai nghiệm của phương trình:

$$t^2 - (5-x)t + 8-5x-x^2 = 0 (**).$$

Điều kiện để phương trình (**) có nghiệm là:

$$\Delta = (5-x)^2 - 4(8-5x-x^2) = -3x^2 + 10x - 7 \geq 0 \Leftrightarrow (7-3x)(1-x) \geq 0 \text{ hay } 1 \leq x \leq \frac{7}{3}.$$

Khi $x = 1 \Rightarrow t = 2 \Rightarrow y = z = 2$ nên GTNN của x là 1 .

Khi $x = \frac{7}{3} \Rightarrow t = \frac{4}{3} \Rightarrow y = z = \frac{4}{3}$ suy ra GTLN của x là $\frac{7}{3}$.

Ví dụ 3

Cho các số thực x, y, z thỏa mãn điều kiện: $x + y + z = 1$. Tìm GTLN của biểu thức: $P = 9xy + 10yz + 11zx$.

Lời giải

Tyhay $z = 1 - x - y$ vào P ta có: $P = 9xy + z(10y + 11x) = 9xy + (1 - x - y)(10y + 11x)$

$= -11x^2 + (11 - 12y)x - 10y^2 + 10y$ hay $11x^2 + (12y - 11)x + 10y^2 - 10y + P = 0$. Để phương trình có nghiệm điều kiện là $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow (12y - 11)^2 - 4.11(10y^2 - 10y + P) \geq 0$ hay

$$-296y^2 + 176y + 121 - 44P \geq 0$$

$$\Leftrightarrow P \leq -\frac{74}{11} \left(-y^2 + \frac{22}{37}y - \frac{121}{296} \right) = -\frac{74}{11} \left(y - \frac{11}{27} \right)^2 + \frac{495}{148} \leq \frac{495}{148}.$$

Do đó GTLN của P là $\frac{495}{148}$ đạt được khi $x = \frac{25}{74}$; $y = \frac{11}{37}$; $z = \frac{27}{74}$.

Ví dụ 4: Cho các số thực dương a, b, c sao cho $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng:
 $a + ab + 2abc \leq \frac{9}{2}$.

Lời giải

Từ giả thiết ta suy ra $b = 3 - a - c$. Ta biến đổi bất đẳng thức thành:

$a + a(3 - a - c) + 2ac(3 - a - c) - \frac{9}{2} \leq 0 \Leftrightarrow (2c + 1)a^2 + (2c^2 - 5c - 4)a + \frac{9}{2} \geq 0$ coi đây là hàm số bậc hai của a . Xét $f(a) = (2c + 1)a^2 + (2c^2 - 5c - 4)a + \frac{9}{2}$ ta có hệ số của a^2 là $2c + 1 > 0$ và ta có:
 $\Delta = (2c^2 - 5c - 4)^2 - 18(2c + 1) = (2c - 1)^2(c^2 - 4c - 2) = (2c - 1)^2[c(c - 3) - c - 2] \leq 0$ do $0 < c < 3$. Suy ra $f(a) \geq 0$, dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = \frac{3}{2}, b = 1, c = \frac{1}{2}$.

Ví dụ 5: Tìm GTLN, GTNN của hàm số $y = \left| 1 - \left(\frac{2}{x^2 + 1} \right) |x^2 + 4x + 1| \right|$.

Lời giải

Ta xét hàm số $A = \left(\frac{2}{x^2 + 1} \right) |x^2 + 4x + 1|$. Dễ thấy $A \geq 0$.

Ta viết lại $A = 2 \left| \frac{x^2 + 4x + 1}{x^2 + 1} \right|$. Xét biểu thức $p = \frac{x^2 + 4x + 1}{x^2 + 1} \Leftrightarrow (p - 1)x^2 - 4x + p - 1 = 0$ (*)

Nhận xét $p = 1$ là một giá trị của biểu thức.

Khi $p \neq 1$ (*) là phương trình bậc hai của x nên điều kiện để phương trình có nghiệm là

$\Delta' = 4 - (p - 1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow -2 \leq p - 1 \leq 2 \Leftrightarrow -1 \leq p \leq 3$. Từ đó suy ra $0 \leq A \leq 6$.

Do đó GTLN của y là 5 khi $p = 3 \Leftrightarrow x = 1$.

GTNN của y là 0 khi $A = 1$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2}{x^2 + 1} \right) |x^2 + 4x + 1| = 1 \Leftrightarrow 2|x^2 + 4x + 1| = (x^2 + 1) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + 8x + 2 = x^2 + 1 \\ 2x^2 + 8x + 2 = -x^2 - 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 8x + 1 = 0 \\ 3x^2 + 8x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \pm \sqrt{15} \\ x = \frac{-4 \pm \sqrt{13}}{3} \end{cases}$$

V. ĐỊNH LÝ VI-ET VỚI PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Định lý Vi-ét: Nếu x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$)

$$\text{thì } \begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \end{cases} \quad (*)$$

Ghi chú: Trước khi sử dụng định lý Vi-ét, chúng ta cần kiểm tra điều kiện phương trình có nghiệm, nghĩa là $\Delta \geq 0$.

Một số ứng dụng cơ bản của định lý Vi-ét.

+ Nhầm nghiệm của một phương trình bậc hai.

Nếu $a+b+c=0$ thì phương trình có hai nghiệm là $x_1=1; x_2=\frac{c}{a}$.

Nếu $a-b+c=0$ thì phương trình có hai nghiệm là $x_1=-1; x_2=-\frac{c}{a}$.

+ Tính giá trị của biểu thức $g(x_1, x_2)$ trong đó $g(x_1, x_2)$ là biểu thức đối xứng giữa hai nghiệm x_1, x_2 của phương trình (*):

Bước 1: Kiểm tra điều kiện $\Delta \geq 0$, sau đó áp dụng định lý Vi-ét.

Bước 2: Biểu diễn biểu thức $g(x_1, x_2)$ theo $S = x_1 + x_2, P = x_1 \cdot x_2$ từ đó tính được $g(x_1, x_2)$.

- Một số biểu thức đối xứng giữa hai nghiệm thường gặp.

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = S^2 - 2P;$$

$$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) = S^3 - 3SP;$$

$$x_1^4 + x_2^4 = (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2x_1^2x_2^2 = (S^2 - 2P)^2 - 2P^2 = S^4 - 4S^2P + 2P^2;$$

$$|x_1 - x_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2} = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2} = \sqrt{S^2 - 4P}; \dots$$

- Lập phương trình bậc hai có hai nghiệm x_1, x_2 cho trước:

Bước 1: Tính $S = x_1 + x_2; P = x_1x_2$.

Bước 2: Phương trình bậc hai nhận hai nghiệm x_1, x_2 là $X^2 - S.X + P = 0$.

- Tìm điều kiện để phương trình bậc hai (*) (a, b, c phụ thuộc tham số m), có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện cho trước $h(x_1, x_2) = 0$ (1)

Bước 1: Tìm điều kiện để phương trình (*) có nghiệm, nghĩa là $\Delta \geq 0$. Sau đó áp dụng định lý Vi-ét để tính $S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ (2) và $P = x_1 \cdot x_2$ (3) theo m .

Bước 2: Giải hệ phương trình (1), (2), (3) (thường sử dụng phương pháp thế) để tìm m , sau đó chú ý kiểm tra điều kiện của tham số m ở bước 1.

- Phân tích đa thức bậc hai thành nhân tử: Nếu phương trình (*) có hai nghiệm x_1, x_2 thì $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.
- Chứng minh bất đẳng thức liên quan đến nghiệm của phương trình bậc hai ta cần chú ý đến các điều kiện ràng buộc sau:

$$\text{Nếu } x_1 \leq m \leq x_2 \Leftrightarrow (x_1 - m)(x_2 - m) \leq 0.$$

$$\text{Nếu } m \leq x_1 \leq x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 \geq 2m \\ (x_1 - m)(x_2 - m) \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{Nếu } x_1 \leq x_2 \leq m \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 2m \\ (x_1 - m)(x_2 - m) \geq 0 \end{cases}$$

- Dấu của nghiệm phương trình bậc hai: $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$)

Bài toán 1: Phương trình có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow ac < 0$.

Bài toán 2: Phương trình có hai nghiệm trái dấu trong đó nghiệm dương có giá trị tuyệt đối

bé hơn (hoặc nghiệm âm có giá trị tuyệt đối lớn hơn) $\Leftrightarrow \begin{cases} ac < 0 \\ S < 0 \end{cases}$.

Bài toán 3: Phương trình có hai nghiệm trái dấu trong đó nghiệm dương có giá trị tuyệt đối lớn hơn (hoặc nghiệm âm có giá trị tuyệt đối bé hơn) $\Leftrightarrow \begin{cases} ac < 0 \\ S > 0 \end{cases}$.

Bài toán 4: Phương trình có hai nghiệm phân biệt cùng dấu $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \end{cases}$.

Bài toán 5: Phương trình có hai nghiệm dương $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases}$.

Bài toán 6: Phương trình có hai nghiệm âm $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ S < 0 \\ P > 0 \end{cases}$.

Bài toán 7: Phương trình có một nghiệm bằng 0 và một nghiệm dương $\Leftrightarrow \begin{cases} P = 0 \\ S > 0 \end{cases}$.

Bài toán 8: Phương trình có một nghiệm bằng 0 và một nghiệm âm $x_1 < x_2 < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} P = 0 \\ S < 0 \end{cases}$.

Bài toán 9: Phương trình có đúng một nghiệm dương:

Trường hợp 1: Phương trình có hai nghiệm trái dấu.

Trường hợp 2: Phương trình có nghiệm kép dương $\Leftrightarrow \Delta = 0, -\frac{b}{2a} > 0$.

Trường hợp 3: Phương trình có một nghiệm bằng 0 và nghiệm còn lại dương.

Bài toán 10: Phương trình có đúng một nghiệm âm $\Rightarrow$ Giải tương tự như bài toán 9.

Chú ý: Nếu chỉ là phương trình có nghiệm mà không nói phân biệt thì thay $\Delta > 0$ bằng $\Delta \geq 0$.

VI. MỘT SỐ VÍ DỤ VỀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

Ví dụ 1: Cho phương trình: $x^2 - 2(m-1)x + m^2 - 3 = 0$ (x là ẩn, m là tham số). Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 sao cho $x_1^2 + 4x_1 + 2x_2 - 2mx_1 = 1$.

Lời giải

Phương trình đã cho có hai nghiệm khi và chỉ khi $\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow -2m + 4 \geq 0 \Leftrightarrow m \leq 2$.

Vì x_1 là nghiệm của phương trình nên $x_1^2 - 2(m-1)x_1 + m^2 - 3 = 0 \Rightarrow x_1^2 = 2(m-1)x_1 - m^2 + 3$

thay vào ta có $x_1^2 + 4x_1 + 2x_2 - 2mx_1 = 1 \Leftrightarrow 2(m-1)x_1 - m^2 + 3 + 4x_1 + 2x_2 - 2mx_1 = 1$

$\Leftrightarrow 2(x_1 + x_2) - m^2 + 2 = 0$. Theo hệ thức Vi-ét: $x_1 + x_2 = 2(m-1)$ suy ra.

$$-m^2 + 2 + 4(m-1) = 0 \Leftrightarrow m^2 - 4m + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 + \sqrt{2} \\ m = 2 - \sqrt{2} \end{cases} \quad (2).$$

Đối chiếu với điều kiện ta thấy $m = 2 - \sqrt{2}$.

Ví dụ 2: Cho phương trình: $x^2 - 2mx + (m-1)^3 = 0$ (m là tham số).

a) Giải phương trình khi $m = -1$.

b) Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt trong đó có một nghiệm bằng bình phương nghiệm còn lại.

Lời giải

a) Khi $m = -1$, ta có phương trình $x^2 + 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x+4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -4 \end{cases}$.

b) Điều kiện để phương trình có hai nghiệm phân biệt là: $\Delta' = m^2 - (m-1)^2 > 0$ (*)

Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình, theo hệ thức Vi-ét ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m & (1) \\ x_1 \cdot x_2 = (m-1)^3 & (2) \end{cases}$.

Giả sử $x_1 = x_2^2$, thay vào (2), ta được $x_2 = m-1; x_1 = (m-1)^2$. Thay hai nghiệm x_1, x_2 vào (1), ta được $(m-1)^2 + (m-1) = 2m \Leftrightarrow m^2 - 3m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 3 \end{cases}$, kiểm tra điều kiện (*) ta thấy cả 2 giá trị m đều thỏa mãn.

Ví dụ 3: Cho phương trình bậc hai: $x^2 - 2(m-1)x + m^2 - 2m - 3 = 0$ với m là tham số.

+ Chứng minh rằng: Phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m .

+ Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình. Tìm m để $x_1 + 4 = \sqrt{x_2}$.

Lời giải

+ Xét phương trình bậc hai $x^2 - 2(m-1)x + m^2 - 2m - 3 = 0$ với m là tham số.

Ta có: $\Delta' = (m-1)^2 - (m^2 - 2m - 3) = 4 > 0$ nên phương trình luôn có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 .

+ Ta tính được hai nghiệm của phương trình là: $x = m-3$ và $x = m+1$.

Trường hợp 1: $x_1 = m-3; x_2 = m+1$ điều kiện bài toán trở thành:

$$m+1 = \sqrt{m+1} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -1 \\ (m+1)^2 - (m+1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -1 \\ (m+1)m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = -1 \end{cases} \text{ (thỏa mãn điều kiện).}$$

Trường hợp 2: $x_1 = m+1; x_2 = m-3$ điều kiện bài toán trở thành: $m+4 = \sqrt{m-3}$

$$\text{Phương trình tương đương với: } \begin{cases} m+4 \geq 0 \\ (m+4)^2 = m-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -4 \\ m^2 + 7m + 19 = 0 \end{cases} \text{ vô nghiệm.}$$

Do $m^2 + 7m + 19 = 0$ có $\Delta = 7^2 - 4 \cdot 19 < 0$.

Tóm lại $m = 0$ hoặc $m = -1$.

Ví dụ 4: Tìm m để phương trình $x^2 - (2m-1)x + m^2 + m - 3 = 0$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2

sao cho $A = \frac{x_1 + x_2 + 1}{x_1^2 + x_2^2 + 2(x_1 + x_2 + x_1 x_2) + 5}$ lớn nhất.

Lời giải

Ta có $\Delta = (2m-1)^2 - 4(m^2 + m - 3) = 13 - 8m$. Để phương trình có 2 nghiệm phân biệt thì

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow 13 - 8m > 0 \Leftrightarrow m < \frac{13}{8}. \text{ Theo hệ thức Vi-ét ta có: } \begin{cases} x_1 + x_2 = 2m-1 \\ x_1 \cdot x_2 = m^2 + m - 3 \end{cases}$$

$$\text{Thay vào } A = \frac{x_1 + x_2 + 1}{x_1^2 + x_2^2 + 2(x_1 + x_2 + x_1 x_2) + 5} = \frac{2m}{4m^2 + 4} = \frac{m}{2(m^2 + 1)}.$$

Ta có $A - \frac{1}{4} = \frac{m}{2(m^2 + 1)} - \frac{1}{4} = \frac{-(m-1)^2}{4(m^2 + 1)} \leq 0$ với mọi giá trị m , suy ra $A \leq \frac{1}{4}$. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $m = 1$.

Ví dụ 5:

Tìm tất cả các giá trị nguyên của m để phương trình: $x^2 - 2(m+1)x + m^2 + 4 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn: $x_1^2 + 2(m+1)x_2 \leq 3m^2 + 16$.

Lời giải

Xét phương trình: $x^2 - 2(m+1)x + m^2 + 4 = 0 (*)$. Ta có: $\Delta' = (m+1)^2 - (m^2 + 4) = 2m - 3$

Điều kiện để phương trình (*) có hai nghiệm x_1, x_2 là $\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow m \geq \frac{3}{2}$. Vì x_1 là nghiệm của phương trình (*) nên: $x_1^2 - 2(m+1)x_1 + m^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow x_1^2 = 2(m+1)x_1 - m^2 - 4$, điều kiện bài toán trở thành: $2(m+1)x_1 - m^2 - 4 + 2(m+1)x_2 \leq 3m^2 + 16 \Leftrightarrow 2(m+1)(x_1 + x_2) - 4m^2 - 20 \leq 0$

The hệ thức Vi-et: $x_1 + x_2 = 2(m+1)$ thay vào ta có:

$4(m+1)^2 - 4m^2 - 20 \leq 0 \Leftrightarrow 8m - 16 \leq 0 \Leftrightarrow m \leq 2$. Kết hợp với điều kiện ban đầu ta suy ra:

$\frac{3}{2} \leq m \leq 2$, do m là số nguyên nên ta suy ra: $m = 2$.

Ví dụ 6:

Tìm m để phương trình: $x^2 + 2(m+1)x + m^2 + 2m - 8 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 sao cho: $x_1 - 2x_2 = 1$.

Lời giải:

Điều kiện để phương trình có hai nghiệm phân biệt là:

$\Delta' > 0 \Leftrightarrow (m+1)^2 - (m^2 + 2m - 8) > 0 \Leftrightarrow 9 > 0$ đúng với mọi m.

Khi đó $\sqrt{\Delta'} = 3$ nên phương trình có hai nghiệm là:

$$\begin{cases} x = \frac{-(m+1)-3}{1} = -m-4 \\ x = \frac{-(m+1)+3}{1} = -m+2 \end{cases}$$

Ta xét hai trường hợp:

TH1: $\begin{cases} x_1 = -m-4 \\ x_2 = -m+2 \end{cases}$ yêu cầu bài toán tương đương với: $-m-4-2(-m+2)=1 \Leftrightarrow m=9$ thỏa mãn điều kiện.

TH2: $\begin{cases} x_1 = -m+2 \\ x_2 = -m-4 \end{cases}$ yêu cầu bài toán tương đương với: $-m+2-2(-m-4)=1 \Leftrightarrow m=-9$ thỏa mãn điều kiện.

Vậy $m \in \{-9; 9\}$.

Ngoài cách làm trên, ta có thể xử lý giả thiết: $x_1 - 2x_2 = 1$ theo cách: Do vai trò bình đẳng của x_1, x_2 nên điều kiện $x_1 - 2x_2 = 1$ tương đương với $(x_1 - 2x_2 - 1)(x_2 - 2x_1 - 1) = 0$ hay

$5x_1x_2 - 2(x_1^2 + x_2^2) + (x_1 + x_2) + 1 = 0 \Leftrightarrow 9x_1x_2 - 2(x_1 + x_2)^2 + x_1 + x_2 + 1 = 0 (*)$.

Áp dụng định lý Vi-et ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -2m-2 \\ x_1x_2 = m^2 + 2m-8 \end{cases}$ thay vào (*) ta thu được:

$9(m^2 + 2m - 8) - 2(2m + 2)^2 - 2m - 2 + 1 = 0 \Leftrightarrow m^2 - 81 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 9$.

Ví dụ 7:

Cho phương trình: $(m-10)x^2 + 2(m-10)x + 2 = 0$ (m là tham số).

- a. Tìm m để phương trình trên có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 .
- b. Chứng minh rằng khi phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thì:
 $x_1^3 + x_2^3 + x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 < -4$.

Lời giải:

a. Xét phương trình $(m-10)x^2 + 2(m-10)x + 2 = 0$ (1)

Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $\begin{cases} m-10 \neq 0 \\ \Delta' = (m-10)^2 - 2(m-10) > 0 \end{cases}$

Xét $(m-10)^2 - 2(m-10) > 0 \Leftrightarrow (m-10)(m-12) > 0$. Do $m-10 > m-12$ nên bất phương trình xảy ra khi và chỉ khi $m-10 < 0$ hoặc $m-12 > 0$ hay $m < 10$ hoặc $m > 12$.

b. Theo định lý Vi-et ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -2 \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{2}{m-10} \end{cases}$

$$x_1^3 + x_2^3 + x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 + 4 = (x_1 + x_2)^3 - 2x_1 x_2 (x_1 + x_2) + 4 = -8 - \frac{4}{m-10} - (-2) + 4 = \frac{4(12-m)}{m-10}$$

+ Nếu $m > 12$ thì $12-m < 0$; $m-10 > 0$.

+ Nếu $m < 10$ thì $12-m > 0$; $m-10 < 0$.

Suy ra $x_1^3 + x_2^3 + x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 + 4 < 0$, do đó: $x_1^3 + x_2^3 + x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 < -4$.

Ví dụ 8:

Cho phương trình: $x^2 - (2m-1)x + m^2 + m - 3 = 0$ (1) (x là ẩn số).

- a. Định m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 .
- b. Định m để: $x_1(x_1-1) + x_2(x_2-1) = 18$.

Lời giải:

a. Ta có: $\Delta = (2m-1)^2 - 4(m^2 + m - 3) = 13 - 8m$. Để phương trình có hai nghiệm phân biệt thì

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow 13 - 8m > 0 \Leftrightarrow m < \frac{13}{8}.$$

b. Theo hệ thức Vi-et ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m-1 \\ x_1 x_2 = m^2 - 3m \end{cases}$ Yêu cầu bài toán được viết lại thành:

$$(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 - (x_1 + x_2) - 18 = 0 \Leftrightarrow (2m-1)^2 - 2(m^2 + m - 3) - (2m-1) - 18 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2m^2 - 8m - 10 = 0 \Leftrightarrow (m+1)(m-5) \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = 5 \end{cases}.$$

Đối chiếu với điều kiện ta thấy $m = -1$ là giá trị thỏa mãn.

Ví dụ 9:

Cho phương trình: $x^2 - (4m-1)x + 3m^2 - 2m = 0$.

- a. Giải phương trình khi $m = 1$.
- b. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 sao cho:

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} - (x_1 + x_2) - \frac{2}{x_1 x_2} = -2.$$

Lời giải:

a. Khi $m = 1$ phương trình trở thành: $x^2 - 3x + 1 = 0$, $\Delta = 5$ suy ra phương trình có hai nghiệm

là: $x = \frac{3-\sqrt{5}}{2}; x = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

b. Xét phương trình: $x^2 - (4m-1)x + 3m^2 - 2m = 0$

có $\Delta = (4m-1)^2 - 4(3m^2 - 2m) = 4m^2 + 1 > 0, \forall m$ nên phương trình luôn luôn có hai nghiệm phân biệt.

Để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 sao cho $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} - (x_1 + x_2) - \frac{2}{x_1 x_2} = -2$ trước hết ta cần

tìm điều kiện để hai nghiệm của phương trình khác 0. Tức là $3m^2 - 2m \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq \frac{2}{3} \end{cases}$

Ta viết lại yêu cầu của bài toán thành:

$$\frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} - (x_1 + x_2) - \frac{2}{x_1 x_2} + 2 = 0 \Leftrightarrow (x_1 + x_2 - 2) \left(\frac{1}{x_1 x_2} - 1 \right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 x_2 = 1 \end{cases}$$

Theo hệ thức Vi-ét ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m - 1 \\ x_1 x_2 = m^2 + m - 3 \end{cases}$. Từ đó suy ra $\begin{cases} 4m - 1 = 1 \\ 3m^2 - 2m = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{1}{2} \\ m = 1 \\ m = \frac{1}{3} \end{cases}$

Đối chiếu với điều kiện ban đầu suy ra: $m \in \left\{ \frac{1}{3}; \frac{1}{2}; 1 \right\}$.

Ví dụ 10:

Cho phương trình: $x^2 - (m-2)x - 3 = 0$ (m là tham số). Chứng minh phương trình luôn luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 với mọi m . Tìm m để các nghiệm thỏa mãn hệ thức:

$$\sqrt{x_1^2 + 2018} - x_1 = \sqrt{x_2^2 + 2018} + x_2.$$

(Tuyển sinh lớp 10 tỉnh Thanh Hóa 2018).

Lời giải:

Ta có: $\Delta = (m-2)^2 + 12 > 0, \forall m$ nên phương trình luôn luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 với mọi m .

Ta có: $\sqrt{x_1^2 + 2018} - x_1 = \sqrt{x_2^2 + 2018} + x_2 \Leftrightarrow \sqrt{x_1^2 + 2018} - \sqrt{x_2^2 + 2018} = x_1 + x_2$

$$\Leftrightarrow \frac{x_1^2 - x_2^2}{\sqrt{x_1^2 + 2018} + \sqrt{x_2^2 + 2018}} = x_1 + x_2 \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \quad (1) \\ \sqrt{x_1^2 + 2018} + \sqrt{x_2^2 + 2018} = x_1 - x_2 \quad (2) \end{cases}$$

Theo định lý Vi-et ta có: $x_1 + x_2 = m - 2$. Khi đó:

(1) $\Leftrightarrow m - 2 = 0 \Leftrightarrow m = 2$.

(2) không xảy ra. Thật vậy:

Do $\sqrt{x_1^2 + 2018} > |x_1|; \sqrt{x_2^2 + 2018} > |x_2| \Rightarrow \sqrt{x_1^2 + 2018} + \sqrt{x_2^2 + 2018} > |x_1| + |x_2| \geq x_1 - x_2$.

Vậy: $m = 2$.

Ví dụ 11*:

Giả sử phương trình $x^2 + ax + b = 0$ có hai nghiệm lớn hơn 1. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2 - a - 2b}{b - a + 1} \geq \frac{2\sqrt{b}}{1 + \sqrt{b}}.$$

Lời giải:

Theo định lí Vi-et ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -a \\ x_1 \cdot x_2 = b \end{cases}$. Bất đẳng thức cần chứng minh có dạng :

$$\frac{x_1}{1+x_1} + \frac{x_2}{1+x_2} \geq \frac{2\sqrt{x_1x_2}}{1+\sqrt{x_1x_2}}. \text{ Hay : } \frac{x_1}{1+x_1} + 1 + \frac{x_2}{1+x_2} + 1 \geq \frac{2\sqrt{x_1x_2}}{1+\sqrt{x_1x_2}} + 2.$$

$$(x_1 + x_2 + 1) \left(\frac{1}{1+x_1} + \frac{1}{1+x_2} \right) \geq \frac{2(1+2\sqrt{x_1x_2})}{1+\sqrt{x_1x_2}} (*) . \text{ Theo bất đẳng thức Cô-si ta có:}$$

$$x_1 + x_2 + 1 \geq 2\sqrt{x_1x_2} + 1. \text{ Để chứng minh (*) ta quy về chứng minh : } \frac{1}{1+x_1} + \frac{1}{1+x_2} \geq \frac{2}{1+\sqrt{x_1x_2}} \text{ với}$$

$x_1, x_2 > 1$. Quy đồng và rút gọn bất đẳng thức trên tương đương với:

$$(\sqrt{x_1x_2} - 1)(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2})^2 \geq 0. \text{ (Điều này hiển nhiên đúng). Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi:}$$

$$x_1 = x_2 \Leftrightarrow a^2 = 4b.$$

Ví dụ 12 :

Giải phương trình bậc hai : $ax^2 + bx + c = 0$ có hai nghiệm thuộc $[0;3]$. Tìm giá trị lớn nhất

và nhỏ nhất của biểu thức : $Q = \frac{18a^2 - 9ab + b^2}{9a^2 - 3ab + ac}.$

Lời giải :

Vì phương trình bậc hai có hai nghiệm nên $a \neq 0$. Biểu thức Q có dạng đẳng thức cấp bậc hai

ta chia cả tử và mẫu của Q cho a^2 thì $Q = \frac{18 - 9\frac{b}{a} + \left(\frac{b}{a}\right)^2}{9 - \frac{b}{a} + \frac{c}{a}}.$ Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương

trình, theo Vi-et ta có : $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$. Vậy : $Q = \frac{18 - 9\frac{b}{a} + \left(\frac{b}{a}\right)^2}{9 - \frac{b}{a} + \frac{c}{a}} = \frac{18 + 9(x_1 + x_2) + (x_1 + x_2)^2}{9 + 3(x_1 + x_2) + x_1x_2}$

* Ta có GTLN của Q : Ta đánh giá $(x_1 + x_2)^2$ qua x_1x_2 với điều kiện $x_1, x_2 \in [0;3]$.

$$\text{Giả sử } 0 \leq x_1 \leq x_2 \leq 3 \Rightarrow \begin{cases} x_1^2 \leq x_1x_2 \\ x_2^2 \leq 9 \end{cases} \Rightarrow (x_1 + x_2)^2 = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 \leq 9 + 3x_1x_2$$

$$\Rightarrow Q \leq \frac{18 + 9(x_1 + x_2) + (x_1 + x_2)^2}{9 + 3(x_1 + x_2) + x_1x_2} = 3.$$

Ta cũng có thể đánh giá theo cách :

$$0 \leq x_1; x_2 \leq 3 \Rightarrow \begin{cases} x_1(x_1 - 3) \leq 0 \\ x_2(x_2 - 3) \leq 0 \\ (x_1 - 3)(x_2 - 3) \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1^2 + x_2^2 \leq 3(x_1 + x_2) \\ x_1x_2 + 9 \geq 3(x_1 + x_2) \end{cases} \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 \leq 9 + x_1x_2$$

$$\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 \leq 3x_1x_2 + 9 \Rightarrow Q = \frac{18 + 9(x_1 + x_2) + (x_1 + x_2)^2}{9 + 3(x_1 + x_2) + x_1x_2} \leq \frac{18 + 9(x_1 + x_2) + 9 + 3x_1x_2}{9 + 3(x_1 + x_2) + x_1x_2} = 3.$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 = 3 \\ x_1 = 0; x_2 = 3 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} -\frac{b}{a} = 6 \\ \frac{c}{a} = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -6a \\ c = 9a \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} -\frac{b}{a} = 3 \\ \frac{c}{a} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -3a \\ c = 0 \end{cases}$$

Ta có $Q - 2 = \frac{3(x_1 + x_2) + x_1^2 + x_2^2}{9 + 3(x_1 + x_2) + x_1 x_2} \geq 0 \Rightarrow Q \geq 2$. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x_1 = x_2 = 0 \Leftrightarrow b = c = 0$.

Vậy GTLN của Q là 3, GTNN của Q là 2.

Ví dụ 13*:

Cho phương trình $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$ trong đó a, b, c là các số nguyên và $a > 0$, có hai nghiệm trong khoảng $(0; 1)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của a .

Lời giải:

Gọi $x_1, x_2 \in (0; 1)$ là hai nghiệm phân biệt của phương trình đã cho $\Rightarrow f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$. Vì a, b, c là các số nguyên và $a > 0 \Rightarrow f(0) = c = ax_1 x_2, f(1) = a + b + c = a(1 - x_1)(1 - x_2)$ là các số nguyên dương.

Áp dụng BĐT Cauchy ta có: $x_1(1 - x_1) \leq \frac{1}{4}; x_2(1 - x_2) \leq \frac{1}{4} \Rightarrow x_1 x_2 (1 - x_1)(1 - x_2) < \frac{1}{16}$ (2) (do $x_1 \neq x_2$

nên không có đẳng thức). Từ (1) và (2) $\Rightarrow \frac{a^2}{16} > 1 \Rightarrow a \geq 5$ (do a là số nguyên dương)

Xét đa thức $f(x) = 5x(x - 1) + 1$ ta thấy $f(x)$ thỏa mãn điều kiện bài toán.

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức bằng 5.

Ví dụ 14 *

Chứng minh $a_n = \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n - 2$ là số chính phương với mọi số tự nhiên lẻ.

Lời giải

Ta có: $a^n = \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n - 2 = \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]^2$

Xét dãy $S_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$, ta chứng minh b_n là một số nguyên.

Xét $x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}; x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 x_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow x_1, x_2$ là nghiệm của phương trình $x^2 - x - 1 = 0$

Ta có $S_{n+1} = x_1^{n+1} + x_2^{n+1} = (x_1^n + x_2^n)(x_1 + x_2) - x_1 x_2 (x_1^{n-1} + x_2^{n-1})$ hay $S_{n+1} = S_n - S_{n-1}$

Ta có $S_1 = 1; S_2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = 3; S_3 = S_2 - S_1 = 2$. Từ đó bằng phép toán quy nạp ta dễ dàng chứng minh được S_n là số nguyên. Suy ra $a_n = (S_n)^2$ là số chính phương

Ví dụ 15*

Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $a \neq 0; 2a + 3b + 6c = 0$. Chứng minh rằng: Phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 và tìm giá trị nhỏ nhất của $P = |x_1 - x_2|$

Giải

Ta có $\Delta = b^2 - 4ac = \frac{2(2a^2 - 6ac + 18c^2)}{9} = \frac{[a^2 + (a-3c)^2 + 9c^2]}{9} > 0$ do $a \neq 0$ nên phương trình luôn có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2

$$\text{Ta có } P^2 = (x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = \frac{b^2}{a^2} - 4\frac{c}{a} = \frac{b^2 - 4ac}{a^2} = \frac{2}{9} \left(\frac{2a^2 - 6ac + 18c^2}{a^2} \right)$$

$$\text{Hay } P^2 = \frac{4}{9} \left[1 - \frac{3c}{a} + 9 \left(\frac{c}{a} \right)^2 \right] = \frac{4}{9} \left[\left(\frac{3c}{a} - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{4} \right] \geq \frac{1}{3} \Rightarrow P \geq \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow \frac{3c}{2} - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow a = 6c, b = -6c. \text{ Vậy } \min P = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

VII. CÁC BÀI TOÁN TƯƠNG GIAO CỦA ĐƯỜNG THẲNG VÀ PARABOL

KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Khi cần biện luận số giao điểm của một đường thẳng (d) và Parabol (P): $y = ax^2$ ta cần chú ý:

a) Nếu đường thẳng (d): $y = m$ (là đường thẳng song song với trục Ox) ta có thể dựa vào đồ thị để biện luận hoặc biện luận dựa vào $ax^2 = m$

b) Nếu đường thẳng (d): $y = mx + n$ ta thường xét phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là: $ax^2 = mx + n \Leftrightarrow ax^2 - mx - n = 0$ từ đó ta xét số giao điểm dựa trên số nghiệm của phương trình $ax^2 - mx - n = 0$ bằng cách xét dấu của Δ

Trong trường hợp đường thẳng (d) cắt đồ thị hàm số (P) tại 2 điểm phân biệt A, B thì:

$A(x_1; mx_1 + n), B(x_2; mx_2 + n)$ Khi đó ta có:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + m^2(x_2 - x_1)^2} = \sqrt{(m^2 + 1) \left[(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 \right]}$$
 Mọi câu hỏi liên quan đến nghiệm x_1, x_2 ta đều quy về định lý Viet

Chú ý: Đường thẳng (d) có hệ số góc a và đi qua điểm $M(x_0; y_0)$ thì có dạng

$$y = a(x - x_1) + y_0$$

Ví dụ 1:

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho Parabol (P): $y = \frac{x^2}{2}$ và đường thẳng (d): $y = -\frac{2}{m}x + 2$ với $m \neq 0$.

a) Khi $m = \frac{3}{4}$ tìm tọa độ các giao điểm của (d) và (P).

b) Chứng minh đường thẳng (d) luôn cắt (P) tại 2 điểm M, N nằm ở 2 phía trục tung. Gọi I là điểm cố định mà (d) luôn đi qua. Tìm m để diện tích tam giác CID bằng $4\sqrt{5}$ với C, D lần lượt là hình chiếu vuông góc của M, N trên Ox

Lời giải:

Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) là: $\frac{x^2}{2} = -\frac{2}{m}x + 2$ với $m \neq 0$ hay

$$mx^2 + 4x - 4m = 0$$

a) Khi $m = \frac{4}{3}$ thì (*) trở thành: $4x^2 + 12x - 16 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+4) = 0 \Leftrightarrow x=1$

hoặc $x = -4$. Vậy (d) cắt (P) tại 2 giao điểm là $A\left(1; \frac{1}{2}\right), B(-4; 8)$.

Vì $\Delta' = 4 + 4m > 0$ với mọi $m \neq 0$ nên phương trình (*) luôn có 2 nghiệm phân biệt tức là (d) cắt (P) tại 2 điểm phân biệt. Hơn nữa $x_1, x_2 = \frac{-4m}{m} = -4 < 0$ nên hai giao điểm luôn nằm về hai

phía trục tung. Giả sử $M(x_1; y_1), N(x_2; y_2)$ với $x_1 < 0 < x_2$ khi đó ta có: $C(x_1; 0), D(x_2; 0)$.

Dễ thấy parabol luôn đi qua điểm cố định là $I(0; 2)$ nên

$$OI = 2, CD = |x_1| + |x_2| = x_2 - x_1$$

Suy ra diện tích tam giác ICD bằng

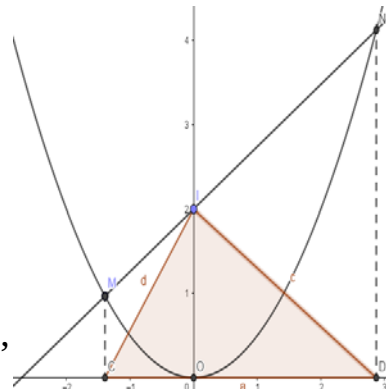
$$S = \frac{1}{2} OI \cdot CD = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (x_2 - x_1) = (x_2 - x_1)$$

$$\Rightarrow S^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2$$

Theo hệ thức Vi ét ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{-4}{m} \\ x_1x_2 = -4 \end{cases}$ suy ra $S^2 = \frac{16}{m^2} + 16$,

từ giả thiết suy ra

$$S^2 = \frac{16}{m^2} + 16 = 80 \Leftrightarrow m^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow m = \pm \frac{1}{2}. \text{ Vậy } m = \pm \frac{1}{2} \text{ để diện tích tam giác ICD bằng } 4\sqrt{5}$$



Ví dụ 2:

Trong mặt phẳng cho Parabol (P): $y = x^2$ và đường thẳng (d): $y = (m-2)x + 3$.

a) Chứng minh rằng khi m thay đổi (P) luôn cắt (d) tại 2 điểm phân biệt nằm về 2 phía trục tung.

b) Gọi x_1, x_2 là các hoành độ giao điểm A, B của (d) với (P) và $x_1 < 0 < x_2$. Xét các điểm $A(x_1; x_1^2), B(x_2; x_2^2), C(x_1; 0), D(x_2; 0)$. Tìm m để hai tam giác AOC và BOD có diện tích bằng nhau

Lời giải

a) Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là: $x^2 = (m-2)x + 3 \Leftrightarrow X^2 - (m-2)x - 3 = 0$ (*)

Ta có: $\Delta = (m-2)^2 + 12$. vì $(m-2)^2 \geq 0 \forall m$ nên $\Delta \geq 12 > 0$. Suy ra phương trình (*) luôn có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 hay đường thẳng (d) luôn cắt (P) tại 2 điểm phân biệt A, B. Theo hệ thức Vi-ét ta cũng có $x_1x_2 = -3 < 0$ suy ra 2 giao điểm A, B nằm về 2 phía trục tung.

b) Vì các điểm A, C có cùng hoành độ và $C \in Ox$

nên $AC \perp CO$ tương tự $BD \perp OD$

Tam giác ACO vuông tại C, BDO vuông tại D nên ta có:

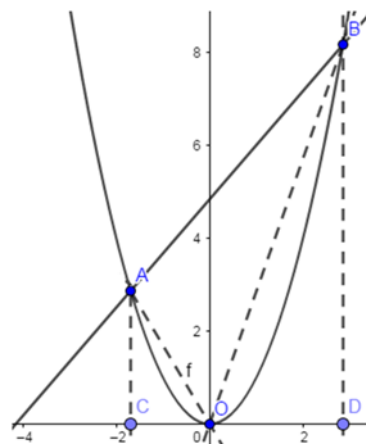
$$S_{AOC} = \frac{1}{2} OC \cdot AC = |x_1| |y_1| = \frac{-x_1 \cdot x_1^2}{2} = -\frac{x_1^3}{2},$$

$$S_{BOD} = \frac{1}{2} OD \cdot BD = \frac{1}{2} |x_2| |y_2| = \frac{x_2 \cdot x_2^2}{2} = \frac{x_2^3}{2}$$

Yêu cầu bài toán tương đương với

$$-\frac{1}{2} x_1^3 = \frac{1}{2} x_2^3 \Leftrightarrow x_1^3 + x_2^3 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -x_2 \Leftrightarrow x_1 + x_2 = 0$$

Theo hệ thức Vi-ét ta có $x_1 + x_2 = m - 2 \Rightarrow m - 2 = 0 \Leftrightarrow m = 2$.



Ví dụ 3:

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho parabol (P): $y = x^2$, đường thẳng (d): $y = mx + 3 - m$ và $M(1; 3) \in (d)$. Chứng minh rằng (d) cắt (P) tại 2 điểm phân biệt $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ nằm về hai phía điểm M. Giả sử $x_1 < x_2$, tìm m để $MA = 2MR$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) là: $x^2 = mx + 3 - m \Leftrightarrow x^2 - mx + m - 3 = 0$ ta có: $\Delta = m^2 - 4(m - 3) = m^2 - 4m + 12 = (m - 2)^2 + 8$, do $(m - 2)^2 \geq 0 \forall m$ suy ra $\Delta \geq 8 > 0$ nên phương trình luôn có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 , hay (d) luôn cắt (P) tại 2 điểm phân biệt

$A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$. Vì $(x_1 - 1)(x_2 - 1) = x_1 x_2 - (x_1 + x_2) + 1$

Theo hệ thức Vi-ét ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = m \\ x_1 x_2 = m - 3 \end{cases}$ suy ra $(x_1 - 1)(x_2 - 1) = m - 3 - m + 1 = -2 < 0$ suy ra trong 2

nghiệm x_1, x_2 có 1 nghiệm nhỏ hơn 1, 1 nghiệm lớn hơn 1. Hay A, B nằm về 2 phía điểm M. Gọi C, E, D lần lượt là hình chiếu vuông góc của A, M, B lên trục Ox thì $C(x_1; 0), E(1; 0), D(x_2; 0)$

Ta có $CE = 1 - x_1, ED = x_2 - 1$.

Do $AM = 2BM \Rightarrow CE = 2DE$ (Định lý Thales)

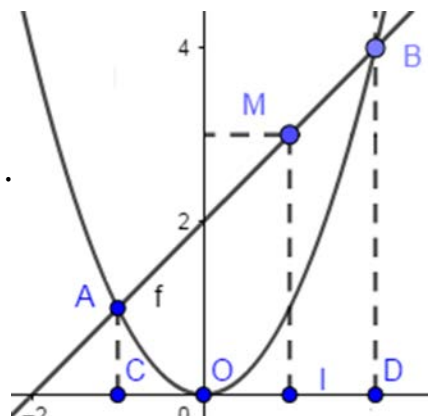
Hay $1 - x_1 = 2(x_2 - 1) \Leftrightarrow x_1 + 2x_2 = 3 \Leftrightarrow (x_1 + x_2) + x_2 = 3$.

Kết hợp với (*) ta có $x_2 = 3 - m, x_1 = m - (3 - m) = 2m - 3$.

Do $x_1 x_2 = m - 3$ nên suy ra

$$(3 - m)(2m - 3) = m - 3 \Leftrightarrow (m - 3)(m - 1) = 0$$

suy ra $m = 3$ hoặc $m = 1$ đối chiếu với điều kiện ta thấy cả 2 giá trị m đều thỏa mãn.

**Ví dụ 4:**

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường thẳng (d): $y = (2m + 1)x - (m^2 + m)$ và parabol (P): $y = x^2$

a) Khi $m = 1$ tìm tọa độ giao điểm của (P) và (d)

b) Tìm tất cả các giá trị m để đường thẳng (d) cắt (P) tại 2 điểm có hoành độ lần lượt là x_1, x_2 sao cho $\sqrt{2x_1} + 1 = x_2$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) là

$$x^2 = (2m + 1)x - m^2 - m \Leftrightarrow x^2 - (2m + 1)x + m^2 + m = 0$$

a) Khi $m = 1$ ta có $x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow (x - 1)(x - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$

Với $x = 1$ thì $y = 1$, với $x = 2$ thì $y = 4$. Vậy (d) cắt (P) tại 2 điểm A(1; 1) và B(2; 4)

b) Để (d) cắt (P) tại 2 điểm phân biệt là $\Delta > 0 \Leftrightarrow (2m + 1)^2 - 4(m^2 + m) > 0 \Leftrightarrow 1 > 0$ luôn đúng.

Vậy (d) luôn cắt (P) tại 2 điểm x_1, x_2

Ta có $x^2 - (2m + 1)x + m^2 + m = 0 \Leftrightarrow (x - m)(x - m - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = m \\ x = m + 1 \end{cases}$

TH1 : $x_1 = m, x_2 = m+1$ thay vào điều kiện $\sqrt{2x_1} + 1 = x_2$ ta có:

$$\sqrt{2m} + 1 = m+1 \Leftrightarrow \sqrt{2m} = m \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 0 \\ m^2 - 2m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 2 \end{cases} \text{ kiểm tra lại ta thấy cả 2 giá trị } m \text{ đều thỏa mãn.}$$

TH2: $x_1 = m+1, x_2 = m$ thay vào điều kiện: $\sqrt{2x_1} + 1 = x_2$ ta có:

$$\sqrt{2(m+1)} + 1 = m \Leftrightarrow \sqrt{2(m+1)} = m-1 \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 1 \\ m^2 - 4m - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 1 \\ (m-2)^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 1 \\ m = 2 \pm \sqrt{5} \end{cases}$$

đối chiếu điều kiện $m = \sqrt{5} + 2$ thỏa mãn.

Ví dụ 5:

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho parabol (P): $y = 2x^2$ và đường thẳng (d): $y = -2mx + m + 1$

Tìm m để đường thẳng (d) cắt (P) tại 2 điểm phân biệt x_1, x_2 sao cho $\frac{1}{(2x_1-1)^2} + \frac{1}{(2x_2-1)^2} = 2$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) là:

$$2x^2 = -2mx + m + 1 \Leftrightarrow 2x^2 + 2mx - m - 1 = 0. \text{ Ta có}$$

$\Delta' = m^2 - 2(-m-1) = m^2 + 2m + 2 = (m+1)^2 + 1 > 0 \forall m$ nên phương trình có 2 nghiệm phân biệt
 $\Rightarrow$ đường thẳng (d) luôn cắt parabol (P) tại 2 điểm phân biệt A, B ta thấy

$$2\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2m\left(\frac{1}{2}\right) - m - 1 \neq 0 \forall m \text{ nên 2 nghiệm phương trình luôn khác } \frac{1}{2}$$

$$\text{Ta có: } \frac{1}{(2x_1-1)^2} + \frac{1}{(2x_2-1)^2} = \left(\frac{1}{2x_1-1} + \frac{1}{2x_2-1}\right)^2 - \frac{2}{(2x_1-1)(2x_2-1)}.$$

$$= 4 \left[\frac{x_1 + x_2 - 1}{4x_1x_2 - 2(x_1 + x_2) + 1} \right]^2 - \frac{2}{4x_1x_2 - 2(x_1 + x_2) + 1}. \text{ Theo hệ thức Vi-et ta có:}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -m \\ x_1x_2 = -\frac{m+1}{2} \end{cases}$$

Thay vào ta có :

$$\frac{1}{(2x_1-1)^2} + \frac{1}{(2x_2-1)^2} = 4 \left[\frac{-m-1}{-2(m+1) + 2m+1} \right]^2 = 4(m+1)^2 + 2. \text{ Yêu cầu bài toán tương đương với } 4(m+1)^2 + 2 = 2 \Leftrightarrow m = -1. \text{ Vậy } m = -1 \text{ là giá trị cần tìm.}$$

Ví dụ 6. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy cho parabol (P): $y = x^2$ và đường thẳng (d) : $y = (m-1)x + 1$ (m là tham số).

a. Chứng minh : Khi m thay đổi thì (d) luôn cắt (P) tại 2 điểm phân biệt .

b. Gọi x_1, x_2 là hoành độ các giao điểm của (d) và (P). Tìm m sao cho

$$x_1^2x_2 + x_2^2x_1 - 2x_1^3x_2^3 = 3.$$

Giải

a. Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là:

$$x^2 = (m-1)x + 1 \Leftrightarrow x^2 - (m-1)x - 1 = 0 (*)$$

Do $\Delta = (m-1)^2 + 4 \geq 4$ với mọi m nên phương trình (*) có 2 nghiệm phân biệt.

Suy ra đường thẳng (d) luôn cắt parabol tại 2 điểm phân biệt.

b. Ta có : $x_1^2 x_2 + x_2^2 x_1 - 2x_1^3 x_2^3 = 3 \Leftrightarrow x_1 x_2 (x_1 + x_2) - 2x_1^3 x_2^3 = 3$.

Theo hệ thức Vi-et ta có :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = m-1 \\ x_1 \cdot x_2 = -1 \end{cases} \text{ thay vào đó ta có } -1(m-1) + 2 = 3 \Leftrightarrow m = 0 \text{ thỏa mãn điều kiện.}$$

Ví dụ 7. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường thẳng (d): $y = 2(m-1)x + 2m - 4$ và parabol (P): $y = x^2$.

a. Tìm tọa độ giao (P): $y = x^2$ điểm của (P) và (d) khi $m = 3$.

b. Gọi x_1, x_2 là hoành độ các giao điểm của (P) và (d). Tìm m để $x_1^2 + x_2^2 = 4$.

Giải

Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) là:

$$x^2 = 2(m-1)x + 2m - 4 \Leftrightarrow x^2 - 2(m-1)x - 2m + 4 = 0 (*)$$

a. Khi $m = 3$ thay vào (*) ta có:

$$x^2 - 4x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 = 2 \Leftrightarrow |x-2| = \sqrt{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 = \sqrt{2} \\ x-2 = -\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + \sqrt{2} \\ x = 2 - \sqrt{2} \end{cases}$$

Khi $x = 2 + \sqrt{2} \Rightarrow y = (2 + \sqrt{2})^2 = 6 + 4\sqrt{2}$ khi $x = 2 - \sqrt{2} \Rightarrow y = (2 - \sqrt{2})^2 = 6 - 4\sqrt{2}$. Vậy các giao điểm của (d) và (P) là: $A(2 + \sqrt{2}; 6 + 4\sqrt{2}), B(2 - \sqrt{2}; 6 - 4\sqrt{2})$.

b. Để đường thẳng (d) cắt (P) tại 2 điểm điều kiện là phương trình (*) có 2 nghiệm phân biệt. Hay $\Delta' = (m-1)^2 + 2m - 4 > 0 \Leftrightarrow m^2 - 3 > 0 \Leftrightarrow |m| > \sqrt{3}$. Yêu cầu bài toán là:

$$x_1^2 + x_2^2 = 4 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 - 4 = 0 (3).$$

Theo hệ thức Vi-ét ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m-1) \\ x_1 x_2 = -2m + 4 \end{cases}$. Thay vào (3) ta được:

$$4(m-1)^2 - 2(-2m+4) - 4 = 0 \Leftrightarrow m^2 - m - 2 = 0 \Leftrightarrow (m+1)(m-2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = 2 \end{cases} \text{ Đối}$$

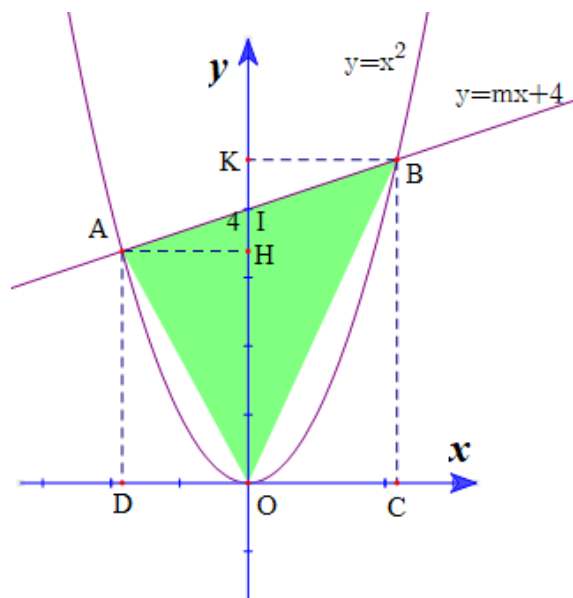
chiếu với điều kiện bài toán ta thấy được $m = 2$ thỏa mãn.

Ví dụ 8. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho parabol (P): $y = x^2$ và đường thẳng (d): $y = mx + 4$. Tìm tất cả các giá trị của m để đường thẳng (d) cắt đồ thị tại hai điểm phân biệt A, B sao cho diện tích tam giác OAB bằng 8.

Giải

Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) là: $x^2 = mx + 4 \Leftrightarrow x^2 - mx - 4 = 0$. Ta có

$\Delta = m^2 + 16 > 0$ với mọi m nên phương trình luôn có 2 nghiệm phân biệt, suy ra đường thẳng (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B.



Đề ý rằng đường thẳng (d) luôn đi qua điểm cố định $I(0;4)$ nằm trên trục tung. Ngoài ra nếu gọi $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ thì $x_1 \cdot x_2 = -4 < 0$ nên hai giao điểm A, B nằm về hai phía trục tung. Giả sử $x_1 < 0 < x_2$ thì ta có

$$S_{OAB} = S_{OAI} + S_{OBI} = \frac{1}{2}AH \cdot OI + \frac{1}{2}BK \cdot OI \text{ với } H, K \text{ lần lượt là hình chiếu vuông góc của } A, B \text{ trên trục } Oy. \text{ Ta có } OI = 4, AH = |x_1| = -x_1, BK = |x_2| = x_2.$$

$$\text{Suy ra } S_{OAB} = 2(x_2 - x_1)$$

$$\Rightarrow S_{OAB}^2 = 4(x_2 - x_1)^2 = 4[(x_2 + x_1)^2 - 4x_1x_2]. \text{ Theo định lý Vi-ét ta có } x_1 + x_2 = m, x_1x_2 = -4.$$

Thay vào ta có $S_{OAB}^2 = 4(m^2 + 16) = 64 \Leftrightarrow m = 0$. Điểm mấu chốt của bài toán là phát hiện A, B nằm về 2 phía trục tung thông qua $x_1x_2 < 0$ để phân chia tam giác OAB thành 2 tam giác OAI , OBI . Ngoài cách làm trên ta cũng có thể tính diện tích tam giác OAB theo cách khác là: Giả sử $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ với $x_1 < 0 < x_2$. Gọi D, C là hình chiếu vuông góc của A, B lên trục Ox ta tính được:

$$CD = |x_2 - x_1|, OD = |x_1| = -x_1; OC = |x_2| = x_2; AD = y_1 = x_1^2, BC = y_2 = x_2^2.$$

Ta có $ABCD$ là hình thang vuông tại D, C . Tam giác ADO vuông tại D . Tam giác BCO vuông tại C và $S_{OAB} = S_{ABCD} - S_{ADO} - S_{BCO}$. Từ đó ta tính được:

$$S_{OAB} = S_{ABCD} - S_{ADO} - S_{BCO}$$

$$S_{OAB} = \frac{1}{2}(AD + BC) \cdot CD - \frac{1}{2}BD \cdot DO = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)(x_2 - x_1) - \frac{1}{2}x_1^2x_2 + \frac{1}{2}x_2^2x_1 = \frac{1}{2}(x_2 - x_1)$$

$$\text{Nên } S_{OAB}^2 = \frac{1}{4}(x_2 - x_1)^2 = \frac{1}{2}[(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2].$$

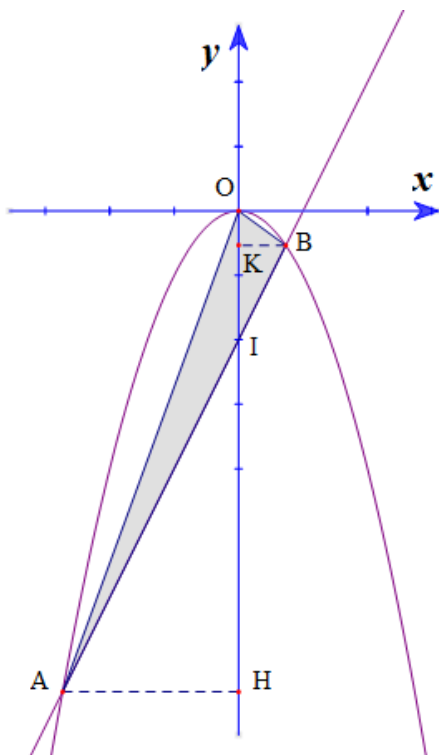
Ví dụ 9. Trên hệ trục tọa độ Oxy cho parabol: $(P): y = -x^2$ và đường thẳng $(d): y = 2x - m^2 + 1$.

a. Khi $m = -\sqrt{3}$, chứng tỏ rằng (d) luôn cắt (P) tại 2 điểm phân biệt A, B . Từ đó tính diện tích tam giác OAB .

b. Với giá trị nào của m thì (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt D, E sao cho khoảng cách từ D đến trục Oy bằng khoảng cách từ E đến Oy .

Giải

- a. Khi $m = -\sqrt{3}$ thì $x^2 + 2x - 2 = 0$ ta có $\Delta' = 1 + 2 = 3 > 0$ và nên phương trình luôn có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 . Hay (d) luôn cắt (P) tại 2 điểm phân biệt A, B.



Theo hệ thức Vi-ét ta có: $x_1 \cdot x_2 = -2 < 0$ nên hai giao điểm A, B nằm về hai phía trục Oy, giả sử $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ với $x_1 < 0 < x_2$ ta có hình vẽ:

Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A, B lên trục Oy thì

$AH = |x_1| = -x_1$, $BK = |x_2| = x_2$, đường thẳng (d) cắt trục Oy tại

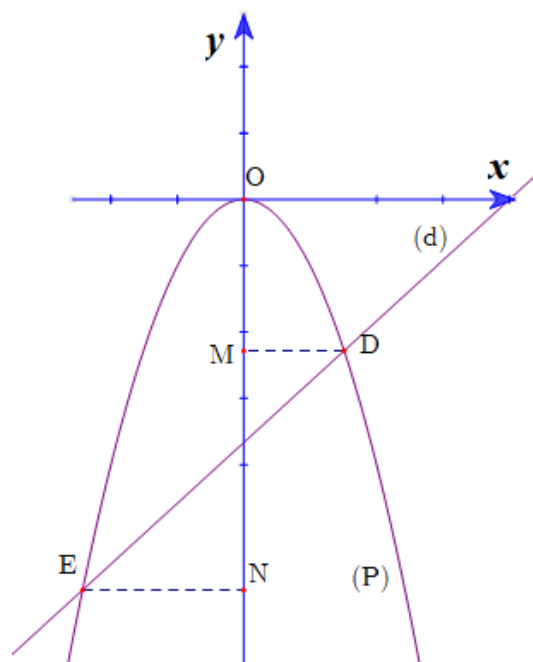
$I(0; -2) \Rightarrow OI = 2$. Ta có

$$S_{OAB} = S_{AOI} + S_{BOI} = \frac{1}{2}AH \cdot OI + \frac{1}{2}BK \cdot OI = \frac{1}{2}2(x_2 - x_1) = x_2 - x_1. \text{ Suy ra}$$

$$S_{OAB}^2 = (x_2 - x_1)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2. \text{ Theo hệ thức Vi-ét ta có: } x_1 + x_2 = -2x_1x_2 = -2 \text{ suy ra } S_{OAB}^2 = 12 \Rightarrow S_{OAB} = 2\sqrt{3}.$$

b. Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P)

$-x^2 = 2x - m^2 + 1 \Leftrightarrow x^2 + 2x - m^2 + 1 = 0$. Ta có $\Delta' = m^2$, để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt thì $\Delta' > 0 \Leftrightarrow m^2 > 0 \Leftrightarrow m \neq 0$.



Khi đó hai điểm $D(x_1; y_1)$, $E(x_2; y_2)$ gọi M , N lần lượt là hình chiếu vuông góc của D, E lên trục Oy thì khoảng cách từ D, E đến trục Oy tương ứng là độ dài của đoạn thẳng DM , EN ta có:

$DM = |x_1|$, $EN = |x_2|$, yêu cầu bài toán tương đương với

$|x_1| = 2|x_2| \Leftrightarrow |x_1| - 2|x_2| = 0$ (*), do vai trò D, E như nhau nên điều kiện (*) có thể viết lại thành :

$(|x_1| - 2|x_2|)(x_2 - 2|x_1|) = 0 \Leftrightarrow -2x_1^2 - 2x_2^2 + 5|x_1x_2| = 0$. Theo hệ thức Vi-ét ta có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -2 \\ x_1x_2 = 1 - m^2 \end{cases}$$

Suy ra $-2(x_1 + x_2)^2 + 4x_1x_2 + 5|x_1x_2| = 0 \Leftrightarrow -8 + 4(1 - m^2) + 5|1 - m^2| = 0$ (1).

Trường hợp 1: $1 - m^2 < 0 \Leftrightarrow m > 1$ hoặc $m < -1$ đẳng thức (1) trở thành :

$$(m^2 - 1) - 4m^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow m^2 = \frac{4}{3} \text{ (loại)}.$$

Trường hợp 2: $1 - m^2 > 0 \Leftrightarrow -1 < m < 1$

đẳng thức (1) trở thành: $5(1 - m^2) + 4(1 - m^2) - 8 = 0$

$$\Leftrightarrow m^2 = \frac{1}{9} \Leftrightarrow m = \pm \frac{1}{3} \text{ thỏa mãn điều kiện .}$$

Tóm lại $m = \pm \frac{1}{3}$ là các giá trị cần tìm.

Ví dụ 10. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho parabol (P) có phương trình. Gọi (d) là đường thẳng đi qua $I(0; -2)$ và có hệ số góc k .

a. Viết phương trình đường thẳng (d) và chứng minh đường thẳng (d) luôn cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt A, B khi k thay đổi.

b. Gọi H, K theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của A, B trên trục hoành. Chứng minh rằng tam giác IHK vuông tại I .

Giải

a. Đường thẳng (d) có dạng : $y = kx + b$ vì (d) đi qua $A(0; -2)$ suy ra $-2 = k.0 + b \Rightarrow b = -2$. Vậy (d): $y = kx - 2$

Xét phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P): $\frac{-x^2}{2} = kx - 2 \Leftrightarrow x^2 + 2kx - 4 = 0$ (1).

Ta có $\Delta' = k^2 + 4 > 0$ với mọi k , suy ra (1) có hai nghiệm phân biệt. Vậy (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt.

b. Giả sử (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 .

Suy ra $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ thì $H(x_1; 0)$, $K(x_2; 0)$. Khi đó $IH^2 = x_1^2 + 4$,

$IK^2 = x_2^2 + 4$, $KH^2 = (x_1 - x_2)^2$. Theo định lý Vi-ét thì $x_1 x_2 = -4$ nên

$IH^2 + IK^2 = x_1^2 + x_2^2 + 8 = KH^2$. Vậy tam giác IHK vuông tại I .

Ví dụ 11. Cho parabol (P): $y = \frac{x^2}{2}$ và đường thẳng (d): $y = 2x - m + 1$. Tìm m để đường thẳng (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ sao cho $x_1 x_2 (x_1 + x_2) + 48 = 0$

Giải

Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) là :

$$\frac{x^2}{2} = 2x - m + 1 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 2m - 2 = 0 \quad (*)$$

Để (d) cắt (P) tại 2 điểm phân biệt thì phương trình (*) phải có 2 nghiệm phân biệt, hay

$\Delta' = 4 - 2m + 2 > 0 \Leftrightarrow m < 3$. Khi đó ta có $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ với $y_1 = \frac{x_1^2}{2}$, $y_2 = \frac{x_2^2}{2}$ suy ra

$$x_1 x_2 (y_1 + y_2) + 48 = 0 \Leftrightarrow x_1 x_2 \left(\frac{x_1^2}{2} + \frac{x_2^2}{2} \right) + 48 = 0 \Leftrightarrow x_1 x_2 (y_1 + y_2) + 96 = 0.$$

Áp dụng hệ thức Vi-ét ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 4 \\ x_1 x_2 = 2m - 2 \end{cases}$, thay vào ta có:

$$(2m - 2)[16 - 4m + 4] + 96 = 0 \Leftrightarrow (m - 1)(5 - m) + 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow m^2 - 6m - 7 = 0 \Leftrightarrow (m + 1)(m - 7) = 0 \text{ hay}$$

$m = -1$ hoặc $m = 7$. Đối chiếu với điều kiện ban đầu ta suy ra $m = -1$.

Lời giải

Khi $m = 7$. Đường thẳng (d) có dạng $y = x + 6$.

Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P)

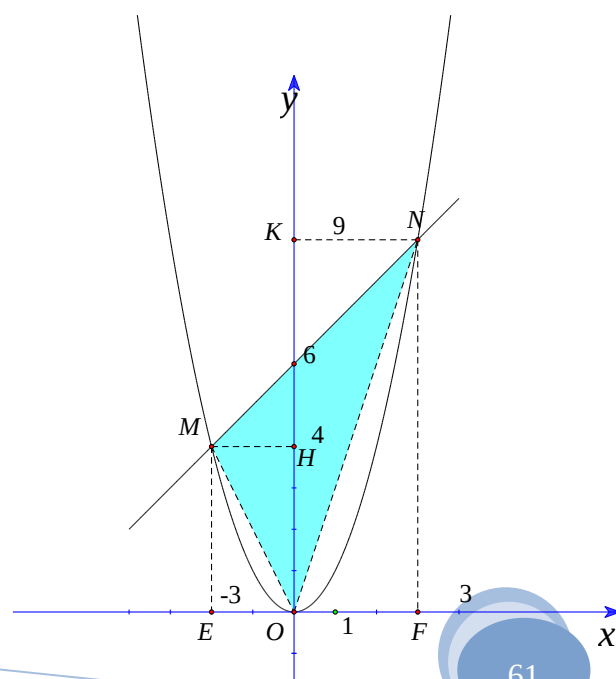
là: $x^2 = x + 6 \Leftrightarrow x^2 - x - 6 = 0 (*)$. Do $\Delta = 25 > 0$

nên phương trình (*) có 2 nghiệm phân biệt

$x_1; x_2$. Suy ra đường thẳng (d) luôn cắt parabol

tại 2 điểm phân biệt M, N.

Mặt khác $x_1 x_2 < 0$ nên hai giao điểm M, N nằm về 2 phía trục Oy .



Ta giả sử $M(x_1; y_1), N(x_2; y_2)$ với $x_1 < 0 < x_2$.

Ta thấy đường thẳng (d) cắt trục Oy tại điểm cố định là $I(0;6)$ nên ta có:

Gọi E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của M, N lên trục Ox . H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của M, N lên trục Oy .

Ta có:

$$E(x_1; 0), F(x_2; 0) \Rightarrow MH = OE = |x_1| = -x_1$$

$$NK = OF = |x_2| = x_2, OI = 6. \text{ Từ đó suy ra } S_{OMN} = S_{OMI} + S_{ONI} = \frac{1}{2}OI \cdot (MH + NK) = 3(x_2 - x_1)$$

Từ đó ta có: $S_{OAB}^2 = 9(x_2 - x_1)^2 = 9[(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2]$. Áp dụng hệ thức Vi – ét ta có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 x_2 = -6 \end{cases}$$

$$\text{Thay vào ta có: } S_{OAB}^2 = 9(x_2 - x_1)^2 = 9[1 + 24] = 225 \Rightarrow S = 15$$

Ta có thể tính trực tiếp như sau: Giải phương trình (*) suy ra $\begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = 3 \end{cases}$ nên các giao điểm là

$$M(-2; 4), N(3; 9) \Rightarrow E(-2; 0), F(3; 0) \Rightarrow MH = 2, NK = 3. \text{ Từ đó tính được:}$$

$$S_{OMN} = S_{OMI} + S_{ONI} = \frac{1}{2}OI(MH + NK) = 3(3 + 2) = 15. \text{ Cách giải này sẽ hiệu quả khi } x_1, x_2 \text{ không phải là số vô tỷ.}$$

Ví dụ 13.

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho parabol (P): $y = x^2$ và đường thẳng (d): $y = mx - m + 2$
a, Chứng minh rằng: Đường thẳng (d) luôn cắt Parabol (P) tại hai điểm phân biệt.

b, Gọi x_1, x_2 là các hoành độ giao điểm của (d) và (P). Tìm m để: $\frac{x_1^2 - 2}{x_1 - 1} + \frac{x_2^2 - 2}{x_2 - 1} = 4$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là: $x^2 = mx - m + 2$

$$\Leftrightarrow x^2 - mx + m - 2 = 0(*). \text{ Ta có: } \Delta = m^2 - 4(m - 2) = m^2 - 4m + 8 = (m - 2)^2 + 4$$

Do $(m - 2)^2 \geq 0, \forall m \Rightarrow \Delta \geq 4 > 0$. Phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt $x_1, x_2 \forall m$ suy ra (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt.

$$\text{Vì } x_1, x_2 \text{ là hai nghiệm của phương trình } (*) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1^2 - mx_1 + m - 2 = 0 \\ x_2^2 - mx_2 + m - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1^2 - 2 = m(x_1 - 1) \\ x_2^2 - 2 = m(x_2 - 1) \end{cases}$$

Do $1^2 - m + m - 2 = -1 \neq 0 \Rightarrow$ phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt khác 1.

$$\text{Suy ra } \begin{cases} \frac{x_1^2 - 2}{x_1 - 1} = m \\ \frac{x_2^2 - 2}{x_2 - 1} = m \end{cases}. \text{ Yêu cầu bài toán tương đương với } 2m = 4 \Leftrightarrow m = 2.$$

Vậy $m = 2$.

Ví dụ 14.

Cho Parabol P: $y = x^2$ và đường thẳng (d): $y = mx + 1$.

a) Chứng minh rằng đường thẳng (d) luôn cắt Parabol (P) tại hai điểm phân biệt với mọi giá trị m .

b) Gọi $A(x_1, y_1)$ và $B(x_2, y_2)$ là giao điểm của (d) và (P). Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $M = (y_1 - 1)(y_2 - 1) + 2(x_1 + x_2) + 3$

Lời giải.

a) Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là $x^2 = mx + 1 \Leftrightarrow x^2 - mx - 1 = 0$.

Ta có $\Delta = m^2 + 4 > 0, \forall m$. Suy ra đường thẳng (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt

$A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$.

b) Xét $M = (y_1 - 1)(y_2 - 1) + 2(x_1 + x_2) + 3$. Vì các giao điểm nằm trên đường thẳng

(d): $y = mx + 1$ nên ta có $y_1 = mx_1 + 1, y_2 = mx_2 + 1$ với x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $x^2 - mx - 1 = 0$.

Từ đó suy ra $M = mx_1mx_2 + 2(x_1 + x_2) + 3 = m^2x_1x_2 + 2(x_1 + x_2) + 3$.

Theo hệ thức Vi-ét ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = m \\ x_1x_2 = -1 \end{cases}$ thay vào M ta được

$$M = -m^2 + 2m + 3 = 4 - (m^2 - 2m + 1) = 4 - (m - 1)^2$$

Do $(m - 1)^2 \geq 0, \forall m$ suy ra $M \leq 4$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $m = 1$. Vậy GTNN của M là 4 khi $m = 1$.

Ví dụ 15.

Cho parabol (P): $y = x^2$ và đường thẳng (d): $y = mx - m^2 - 3$. Tìm m để (d) và (P) cắt nhau tại 2 điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 sao cho x_1, x_2 là độ dài 2 cạnh của tam giác vuông có cạnh huyền là $\sqrt{33}$.

Lời giải:

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là: $x^2 = mx - m^2 - 3 \Leftrightarrow x^2 - mx + m^2 + 3 = 0$.

Điều kiện để (P) cắt (d) tại 2 điểm phân biệt là phương trình có 2 nghiệm phân biệt:

$\Delta = m^2 - 4(-m^2 - 3) > 0 \Leftrightarrow 5m^2 + 12 > 0$. Điều kiện này luôn đúng nên suy ra phương trình có 2 nghiệm phân biệt.

Theo hệ thức Vi-ét ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = m \\ x_1x_2 = m^2 + 3 \end{cases}$. Vì x_1, x_2 là độ dài 2 cạnh góc vuông của một tam

giác nên x_1, x_2 phải là các số dương suy ra điều kiện $\begin{cases} x_1 + x_2 = m > 0 \\ x_1x_2 = m^2 + 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 0$. Từ giả thiết

ta cũng có: $x_1^2 + x_2^2 = \frac{5}{2} \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 - 33 = 0 \Leftrightarrow m^2 - 2(-m^2 - 3) - 33 = 0 \Leftrightarrow m^2 = 9 \Leftrightarrow m = \pm 3$

Đối chiếu với điều kiện ta thấy chỉ có $m = 3$ thỏa mãn điều kiện.

Ví dụ 16

Cho hàm số (P): $y = x^2$ và đường thẳng (d): $-ax + y = 2$ với $a \neq 0$. Chứng minh: (P) luôn cắt (d) tại hai điểm phân biệt $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ nằm về 2 phía trục tung. Tìm a để $(y_1 + 1)(y_2 + 1) + 5x_1x_2 = 0$.

Lời giải:

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là: $x^2 = ax + 2 \Leftrightarrow x^2 - ax - 2 = 0$.

Vì $\Delta = a^2 + 8 > 0$ với mọi giá trị a nên (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt $A(x_1; y_1),$

$B(x_2; y_2)$. Do $x_1 x_2 < 0$ nên hai điểm A, B nằm về hai phía trục tung. Yêu cầu bài toán tương đương với $(y_1 + 1)(y_2 + 1) + 5x_1 x_2 = 0 \Leftrightarrow (ax_1 + 3)(ax_2 + 3) + 5x_1 x_2 = 0$
 $\Leftrightarrow a^2 x_1 x_2 + 3a(x_1 + x_2) + 9 + 5x_1 x_2 = 0$.

Theo hệ thức Vi-ét ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = a \\ x_1 x_2 = -2 \end{cases}$ thay vào biểu thức ta thu được:

$$-2a^2 + 3a^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow a = \pm 1.$$

Ví dụ 17

Cho parabol (P): $y = \frac{1}{2}x^2$ và đường thẳng (d): $y = mx - \frac{1}{2}m^2 + m + 1$.

a) Với $m = 1$, xác định tọa độ giao điểm A, B của (d) và (P).

b) Tìm các giá trị của m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 sao cho $|x_1 - x_2| = 2$.

(Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 – thành phố Hà Nội, năm 2014).

Lời giải

a, Với $m = 1$ ta có phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là:

$$\frac{1}{2}x^2 = x + \frac{3}{2} \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases} \text{ (do } a + b + c = 0)$$

Ta có: $y(-1) = \frac{1}{2}$; $y(3) = \frac{9}{2}$. Vậy tọa độ các giao điểm là: $A\left(-1; \frac{1}{2}\right)$ và $B\left(3; \frac{9}{2}\right)$

b, Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là:

$$\frac{1}{2}x^2 = mx - \frac{1}{2}m^2 + m + 1 \Leftrightarrow x^2 - 2mx + m^2 - 2m - 2 = 0 \quad (*)$$

Để (P) cắt (d) tại hai điểm phân biệt có hoành độ là x_1, x_2 thì phương trình (*) phải có hai nghiệm phân biệt

$$\text{Khi đó } \Delta' = m^2 - m^2 + 2m + 2 > 0 \Leftrightarrow m > -1$$

Cách 1:

Khi $m > -1$ ta có: $|x_1 - x_2| = 2 \Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 x_2 = 4 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 = 4$

$$\Leftrightarrow 4m^2 - 4(m^2 - 2m - 2) = 4 \Leftrightarrow 8m = -4 \Leftrightarrow m = -\frac{1}{2}$$

Cách 2:

Khi $m > -1$ ta có: $|x_1 - x_2| = 2 \Leftrightarrow \left| \frac{-b + \sqrt{\Delta'}}{a} - \frac{-b - \sqrt{\Delta'}}{a} \right| = 2 \Leftrightarrow 2\sqrt{\Delta'} = 2 \Leftrightarrow 2\sqrt{2m + 2} = 2$

$$\Leftrightarrow 2m + 2 = 1 \Leftrightarrow m = -\frac{1}{2}$$

Ví dụ 18

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho parabol (P): $y = -\frac{1}{2}x^2$, điểm $M(m; 0)$ với m là tham số khác 0 và điểm $I(0; -2)$. Viết phương trình đường thẳng (d) đi qua hai điểm M, I . Chứng minh rằng (P) cắt (d) tại hai điểm phân biệt A, B với độ dài đoạn $AB > 4$.

Lời giải

Phương trình đường thẳng (d): $y = \frac{2}{m}x - 2$.

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là: $-\frac{1}{2}x^2 = \frac{2}{m}x - 2 \Leftrightarrow m^2 + 4x - 4m = 0$.

Ta có: $\Delta' = 4 + 4m^2 > 0, \forall m \Rightarrow$ (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt $A\left(x_1; \frac{-x_1^2}{2}\right); B\left(x_2; \frac{-x_2^2}{2}\right)$

$$AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + \left(\frac{1}{2}x_1^2 - \frac{1}{2}x_2^2\right)^2 = \left[(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2\right] \cdot \left[1 + \frac{1}{4}(x_1 + x_2)^2\right]$$

Theo định lý Vi-et ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{-4}{m} \\ x_1x_2 = -4 \end{cases}$. Vậy $AB^2 = \left(\frac{16}{m^2} + 16\right) \cdot \left(1 + \frac{4}{m^2}\right) > 16 \Rightarrow AB > 4$

Ví dụ 19: Cho parabol (P): $y = x^2$ và đường thẳng (d): $y = mx + 4$.

a) Chứng minh đường thẳng (d) luôn cắt đồ thị (P) tại hai điểm phân biệt A và B. Gọi

$x_1; x_2$ là hoành độ của các điểm A, B. Tìm giá trị lớn nhất của $Q = \frac{2(x_1 + x_2) + 7}{x_1^2 + x_2^2}$.

b) Tìm m để diện tích tam giác OAB bằng 8.

Lời giải

a) Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) là: $x^2 = mx + 4 \Leftrightarrow x^2 - mx - 4 = 0$. Ta có $\Delta = m^2 + 16 > 0$, với mọi M nên phương trình luôn có 2 nghiệm phân biệt, suy ra đường thẳng (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt. Theo định lý Vi-et ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = m \\ x_1x_2 = -4 \end{cases}$ ta có:

$Q = \frac{2m + 7}{m^2 + 8}$. (dùng phương pháp miền giá trị hàm số. Xem thêm phần ứng dụng trong bài toán GTLN, GTNN) ta dễ tìm được giá trị lớn nhất của Q là 1 và GTNN của Q là $-\frac{1}{8}$ đạt được khi $m = 1$ và $m = -8$.

b) Đề ý rằng đường thẳng (d) luôn đi qua điểm cố định I(0;4) nằm trên trục tung. Ngoài ra nếu gọi $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ thì $x_1x_2 = -4 < 0$ nên hai giao điểm A và B nằm về hai phía trục tung. Giả sử $x_1 < 0 < x_2$ thì ta có:

$$S_{OAB} = S_{OAI} + S_{OBI} = \frac{1}{2}AH.OI + \frac{1}{2}BK.OI \text{ với } H, K \text{ lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm}$$

A, B trên trục Oy. Ta có $OI = 4, AH = |x_1| = -x_1, BK = |x_2| = x_2$. Suy ra $S_{OAB} = 2(x_2 - x_1)$

$$\Rightarrow S_{OAB}^2 = 4(x_2 - x_1)^2 = 4((x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2). \text{ Theo định lý Vi-et ta có: } x_1 + x_2 = m, x_1x_2 = -4.$$

Thay vào ta có: $S_{OAB}^2 = 4(m^2 + 16) = 64 \Leftrightarrow m = 0$.

Chú ý: Nếu thay điều kiện $S = 8$ thành diện tích tam giác OAB nhỏ nhất ta cũng có kết quả như trên. Vì $m^2 \geq 0 \Rightarrow S^2 \geq 4(m^2 + 16) \geq 64$.

Ví dụ 20: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng (d): $2x - y - a^2 = 0$ và parabol (P): $y = ax^2$ ($a > 0$).

a) Tìm a để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B. Chứng minh rằng A và B nằm bên phải trục tung.

a) Gọi x_A, x_B là hoành độ của A và B. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = \frac{4}{x_A + x_B} + \frac{1}{x_Ax_B}$

(Trích đề thi vòng 1 THPT chuyên – TP Hà Nội, năm học 2005 – 2006).

Lời giải

a. Xét phương trình $ax^2 = 2x - a^2 \Leftrightarrow ax^2 - 2x + a^2 = 0$ (1).

(d) cắt (P), tại hai điểm phân biệt A, B khi (1) có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow a < 1$. Kết hợp với điều kiện ta có $0 < a < 1$ khi đó (1) có hai nghiệm dương nên A, B nằm ở bên phải trục Oy.

b. Theo định lí Vi-et ta có:
$$\begin{cases} x_A + x_B = \frac{2}{a} > 0 \\ x_A \cdot x_B = a > 0 \end{cases}$$

Ta có: $T = 2a + \frac{1}{a}$ theo bất đẳng thức Cô si ho 2 số dương ta có: $2a + \frac{1}{a} \geq 2\sqrt{2}$.

Vậy $\min T = 2\sqrt{2}$ khi $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Ví dụ 21

Cho parabol (P): $y = x^2$ và đường thẳng (d): $y = mx + 1$.

a. Chứng minh rằng đường thẳng (d) luôn cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt với mọi giá trị m.

b. Gọi $A(x_1; y_1)$ và $B(x_2; y_2)$ là các giao điểm của (d) và (P). Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $M = (y_1 - 1)(y_2 - 1)$.

Lời giải

a. Phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng và parabol là:

$x^2 = mx + 1 \Leftrightarrow x^2 - mx + 1 = 0$ (1) $\Delta = m^2 + 4 > 0$ với mọi m nên (1) có hai nghiệm phân biệt, suy ra (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt $A(x_1; y_1)$ và $B(x_2; y_2)$.

b. Theo định lí Vi-et, ta có: $x_1 + x_2 = m$; $x_1 \cdot x_2 = -1$

$M = (y_1 - 1)(y_2 - 1) = (x_1^2 - 1)(x_2^2 - 1) = x_1^2 x_2^2 + 2x_1 x_2 - (x_1 + x_2)^2 + 1 = -m^2 \leq 0$. Vậy $\max M = 0$ khi $m = 0$.

Ví dụ 22

Trên mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường thẳng (d): $y = -x + 6$ và parabol (P): $y = x^2$.

a. Tìm tọa độ các giao điểm của (d) và (P).

b. Gọi A, B là hai giao điểm của (d) và (P). Tính diện tích tam giác OAB.

(Trích đề tuyển sinh vào lớp 10 THPT Hà Nội, năm 2014)

Lời giải

a. Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là: $x^2 = -x + 6 \Leftrightarrow x^2 + x - 6 = 0$

$\Leftrightarrow x = 2 \vee x = -3$. Ta có $y(2) = 4$; $y(-3) = 9$.

Vậy tọa độ giao điểm của (P) và (d) là B(2;4) và A(-3;9).

b. Gọi A', B' lần lượt là hình chiếu của A, B xuống trục hoành. Ta có

$S_{\Delta OAB} = S_{\Delta A'B'B} - S_{\Delta OAA'} - S_{\Delta OBB'}$. Ta có $A'B' = |x_{B'} - x_{A'}| = x_{B'} - x_{A'} = 5$; $AA' = y_A = 9$; $BB' = y_B = 4$

$S_{\Delta A'B'B} = \frac{AA' + BB'}{2} \cdot A'B' = \frac{9 + 4}{2} \cdot 5 = \frac{65}{2}$ (đvdt), $S_{\Delta OAA'} = \frac{1}{2} A'A \cdot A'O = \frac{27}{2}$ (đvdt)

$$\Rightarrow S_{\Delta OAB} = S_{\Delta A'B'B} - S_{\Delta OAA'} - S_{\Delta OBB'} = \frac{65}{2} - \left(\frac{27}{2} + 4 \right) = 15 \text{ (đvdt)}. \text{ (Xem thêm ví dụ 8)}$$

VIII. ỨNG DỤNG PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI TRONG CÁC BÀI TOÁN SỐ HỌC

Ví dụ 1

Tìm tất cả các giá trị thực của m để phương trình: $x^2 - (2m+1)x - 3 = 0$ (*) có các nghiệm đều là số nguyên.

Lời giải

Điều kiện để phương trình (*) có nghiệm là: $(2m+1)^2 + 12 > 0$ luôn đúng với mọi m .

Gọi 2 nghiệm là x_1, x_2 . Theo hệ thức vi-et ta có: $\begin{cases} x_1 \cdot x_2 = -3 \\ x_1 + x_2 = 2m+1 \end{cases}$. Do x_1, x_2 là các số nguyên nên chỉ có thể xảy ra $x_1 = 1, x_2 = -3$ hoặc $x_1 = -3, x_2 = 1$.

$$\text{TH1: } x_1 = 1, x_2 = -3 \text{ hoặc } x_1 = -3, x_2 = 1 \Rightarrow x_1 + x_2 = 2 \Leftrightarrow 2m+1 = 2 \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}.$$

$$\text{TH2: } x_1 = 1, x_2 = -3 \text{ hoặc } x_1 = -3, x_2 = 1 \Rightarrow x_1 + x_2 = -2 \Leftrightarrow 2m+1 = -2 \Leftrightarrow m = -\frac{3}{2}.$$

$$\text{Tóm lại } m \in \left\{ \frac{1}{2}; -\frac{3}{2} \right\}.$$

Ví dụ 2:

Tìm tất cả các giá trị nguyên dương p để phương trình $x^2 + y^2 + 1 = pxy$ (*) có nghiệm nguyên dương.

Lời giải

Với $p = 3$ ta thấy phương trình có nghiệm $x = y = 1$.

Xét $p \neq 3$ giả sử phương trình có nghiệm $(x_0; y_0)$ là nghiệm nhỏ nhất theo nghĩa

$x_0 + y_0 < x + y$ với $(x; y)$ là nghiệm của (*). Không mất tính tổng quát ta giả sử $x_0 \leq y_0$.

+ Nếu $x_0 = y_0$ thì $2x_0^2 + 1 = px_0^2 \Leftrightarrow x_0^2(p-2) = 1 \Rightarrow p = 3$ trái với giả thiết, từ đó suy ra $x_0 < y_0$.

+ Xét phương trình: $y^2 - px_0y + x_0^2 + 1 = 0$ (**), rõ ràng y_0 là một nghiệm của (**) gọi y_1 là

nghiệm thứ 2 của (**). Theo định lí Vi-et ta có: $\begin{cases} y_1 + y_0 = px_0 \\ y_1 \cdot y_0 = x_0^2 + 1 \end{cases}$ (***). Từ (***) suy ra

$y_1 = px_0 - y_0$ nên y_1 là số nguyên, do cách chọn ta suy ra y_1 nguyên dương và $y_0 \leq y_1$.

Cũng từ (***) ta có: $x_0^2 + 1 - px_0 = y_1y_0 - y_1 - y_0 = (y_1 - 1)(y_0 - 1) - 1 \geq x_0 \cdot x_0 - 1 = x_0^2 - 1$ (do

$y_1 > x_0, y_0 > x_0$). Vậy $x_0^2 + 1 - px_0 \geq x_0^2 - 1 \Leftrightarrow px_0 \leq 2$ suy ra $p = 1$ hoặc $p = 2$. Để ý rằng:

$x^2 + y^2 + 1 > 2xy > xy$ nên $p = 1, p = 2$ thì (*) đều không có nghiệm nguyên dương. Tóm lại $p = 3$ là giá trị cần tìm.

Ví dụ 3:

Tìm tất cả các giá trị nguyên dương p để phương trình $x^2 + y^2 + z^2 = pxyz$ (*) có nghiệm nguyên dương.

Lời giải

Để thấy $p = 1$, phương trình có 1 nghiệm $x = y = z = 3$, khi $p = 3$, phương trình có 1 nghiệm $x = y = z = 1$.

Xét $p \neq 1, p \neq 3$. Ta chứng minh: Phương trình (*) không có nghiệm nguyên dương nào khác

bằng phản chứng.

Giả sử phương trình có một nghiệm $(x_0; y_0; z_0)$ sao cho $x_0 \leq y_0 \leq z_0$ và $x_0 + y_0 + z_0 \leq x + y + z$ với mọi nghiệm $(x; y; z)$ khác.

+ Nếu $y_0 < z_0$ xét phương trình bậc hai: $z^2 - py_0 z + x_0^2 + y_0^2 = 0$ (**). ta thấy z_0 là một nghiệm của phương trình này, gọi nghiệm thứ hai là z_1 . Theo định lí Vi-et ta có:
$$\begin{cases} z_1 + z_0 = px_0 y_0 \\ z_1 \cdot z_0 = x_0^2 + y_0^2 \end{cases}$$

Từ đó ta cũng suy ra z_1 là số nguyên dương và $(x_0; y_0; z_1)$ là nghiệm của (**). Từ cách chọn ta suy ra $z_1 \geq z_0$ nên $x_0^2 + y_0^2 - px_0 y_0 = z_1 z_0 - z_1 = (z_1 - 1)(z_0 - 1) - 1 \geq y_0 y_0 - 1 = y_0^2 - 1$ suy ra $1 \geq x_0(py_0 - x_0)$ vì $py_0 \geq px_0 > x_0 \Rightarrow x_0 = 1$ thay vào ta có $y^2 + z^2 + 1 = pyz$ theo ví dụ 2 thì phương trình không có nghiệm nếu $p \neq 3$.

+ Nếu $y_0 = z_0$ ta có: $2y_0^2 - py_0^2 + x_0^2 = 0 \Leftrightarrow x_0^2 = y_0^2(px_0 - 2) \geq x_0^2(px_0 - 2) \Rightarrow px_0 \leq 3$ vì $px_0 > 2$ nên $px_0 = 3 \Rightarrow p = 1$ hoặc $p = 3$ mâu thuẫn.

Tóm lại: $p \in \{1; 3\}$

Hoàn toàn tương tự ta chứng minh được bài toán sau: Phương trình: $x^2 + y^2 - pxy + p = 0$ có nghiệm nguyên dương khi và chỉ khi $p = 5$.

Ví dụ 4:

Cho 2 số nguyên dương x, y thỏa mãn: $\frac{x^2 + y^2 + 1}{xy}$ (*) là số nguyên. Chứng minh:

$$\frac{x^2 + y^2 + 1}{xy} = 3.$$

Lời giải

Ta xét tập $S = \left\{ (x; y) \mid x, y \in \mathbb{N}, \frac{x^2 + y^2 + 1}{xy} = k \in \mathbb{Z} \right\}$ dễ thấy $x = y = 1$ thỏa mãn điều kiện suy ra

$$S = \emptyset.$$

Xét $(x_0; y_0) \in S$ sao cho $x_0 + y_0$ nhỏ nhất theo nghĩa $x_0 + y_0 \leq x + y$ với $(x; y) \in S$. Giả sử $x_0 \geq y_0$. Xét phương trình: $x^2 - ky_0 x + y_0^2 + 1 = 0$ (*) thì x_0 là một nghiệm của phương trình (*) ngoài ra phương trình này cũng có 1 nghiệm $x_1 \in \mathbb{N}^* \Rightarrow (x_1; y_0) \in S$. Theo định lí Vi-et ta có:

$$\begin{cases} x_0 + x_1 = ky_0 \\ x_0 x_1 = y_0^2 + 1 \end{cases} \Rightarrow x_1 = ky_0 - x_0 = \frac{y_0^2 + 1}{x_0} \text{ do } x_0 > y_0 \geq 1 \Rightarrow y_0 \leq x_0 - 1$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{y_0^2 + 1}{x_0} \leq \frac{(x_0 - 1)^2 + 1}{x_0} = 2 - x_0 + \frac{2}{x_0} < x_0 \text{ nên } x_1 + y_0 < x_0 + y_0 \text{ vô lí. Vậy ta có: } x_0 = y_0 \text{ hay}$$

$$k = \frac{2x_0^2 + 1}{x_0^2} = 2 + \frac{1}{x_0^2} \in \mathbb{Z} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ k = 3 \end{cases}.$$

Chú ý: bài toán này là hệ quả của ví dụ 2.

Ví dụ 5:

Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình: $x^2 - xy + y^2 = 2x - 3y - 2$

Lời giải

Ta viết phương trình đã cho dưới dạng phương trình bậc hai của ẩn y :

$y^2 + (3 - x)y + x^2 - 2x + 2 = 0$ ta có $\Delta = (3 - x)^2 - 4(x^2 - 2x + 2) = -3x^2 + 2x + 1$. Để phương trình có

nghiệm ta phải có: $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 2x - 1 \leq 0 \Leftrightarrow (3x+1)(x-1) \leq 0$.

Do $3x+1 > 3x-3 \Rightarrow \begin{cases} 3x+1 \geq 0 \\ 3x-3 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{3} \leq x \leq 1$. Do $x \in \mathbb{Z}$ suy ra $x \in \{0; -1\}$ từ đó thay vào ta tìm được các giá trị tương ứng của y suy ra nghiệm của phương trình là:
 $(x; y) \in \{(0; -1); (0; -2); (-1; 1)\}$.

Ví dụ 6:

Cho x, y là các số nguyên dương và $\frac{x^2+y^2}{xy}$ là số nguyên. Chứng minh: $x = y$.

Lời giải

Đặt $\frac{x^2+y^2}{xy} = m \Rightarrow x^2 + y^2 = mxy \Leftrightarrow x^2 - mxy + y^2 = 0$ để phương trình có nghiệm thì

$\Delta = m^2y^2 - 4y^2 = y^2(m^2 - 4)$ phải là số chính phương hay $m^2 - 4$ là số chính phương,

Ta đặt $m^2 - 4 = n^2$ với $n \in \mathbb{N}$

$m^2 - 4 = n^2 \Leftrightarrow (m-n)(m+n) = 4$ do $m-n, m+n$ cùng tính chẵn lẻ

Suy ra $\begin{cases} m+n=2 \\ m-n=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=2 \\ n=0 \end{cases}$ hay $\frac{x^2+y^2}{xy} = 2 \Leftrightarrow (x-y)^2 = 0 \Leftrightarrow x = y$.

Chương 3: HỆ PHƯƠNG TRÌNH

I. HỆ BẬC NHẤT MỘT ẨN KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Hệ phương trình bậc nhất một ẩn là hpr có dạng
$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + by = c' \end{cases}$$

+ Cặp số $(x_0; y_0)$ được gọi là một nghiệm của hệ phương trình nếu nó là nghiệm chung của cả hai phương trình đó.

+ Hệ có thể có nghiệm duy nhất, vô nghiệm hoặc vô số nghiệm tùy theo vị trí tương đối của hai đường thẳng biểu diễn nghiệm của hai phương trình.

+ Phương pháp cụ thể: chúng ta thường dùng phương pháp thế hoặc phương pháp cộng đại số để khử bớt một ẩn, từ đó sẽ giải được hệ.

Một số ví dụ

Ví dụ 1. Xác định các hệ số a, b của hàm số $y = ax + b$ để

a. Đồ thị hàm số của nó đi qua điểm $A(1; 3), B(2; 4)$

b. Đồ thị hàm số của nó cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng -4 và cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 2 .

Lời giải

a. Thay tọa độ các điểm A, B vào phương trình của đường thẳng ta được:

$$\begin{cases} 3 = a + b \\ 4 = 2a + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 3 - a \\ 4 = 2a + 3 - a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 3 - a = 2 \end{cases}, \text{ Vậy } a = 1, b = 2.$$

b. Tương tự phần (1) ta có hệ:
$$\begin{cases} -4 = a \cdot 0 + b \\ 0 = 2a + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -4 \\ 2a = -b = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -4 \end{cases}$$

Vậy $a = 2; b = -4$

Ví dụ 2. Giải các hệ phương trình sau:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 3 \\ \frac{3}{x} - \frac{2}{y} = -1 \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} \frac{x}{x+1} - \frac{y}{y-1} = 3 \\ \frac{x}{x+1} + \frac{3y}{y-1} = -1 \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} \sqrt{2x-1} + \frac{1}{\sqrt{x-y}} = 2 \\ 2\sqrt{2x-1} - \frac{1}{\sqrt{x-y}} = 1 \end{cases} \end{array}$$

Lời giải

a. Đặt $u = \frac{1}{x}; v = \frac{1}{y}$. Theo đề bài ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} u + v = 3 \\ 3u - 2v = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = 3 - u \\ 3u - 2(3 - u) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5u = 5 \\ v = 3 - u \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 1 \\ v = 2 \end{cases}$$

Từ đó suy ra $x = \frac{1}{u} = 1; v = \frac{1}{v} = \frac{1}{2}$

b. Đặt $u = \frac{x}{x+1}; v = \frac{y}{y+1}$. Theo đề bài ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} u - v = 3 \\ u + 3v = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 3 + v \\ 3 + v + 3v = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 3 + v \\ 4v = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 2 \\ v = -1 \end{cases}$$

Từ đó suy ra:
$$\begin{cases} \frac{x}{x+1} = 2 \\ \frac{y}{y-1} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2x+2 \\ y = 1-y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

c. Điều kiện $x \geq \frac{1}{2}, x-y > 0$. Đặt $\begin{cases} a = \sqrt{2x-1} \\ b = \frac{1}{\sqrt{x-y}} \end{cases}$, ta có hệ phương trình mới:

$$\begin{cases} a+b=2 \\ 2a-b=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2x-1}=1 \\ \frac{1}{\sqrt{x-y}}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất $x=1; y=0$

Ví dụ 3. Giải các hệ phương trình sau:

a.
$$\begin{cases} \frac{x}{x-5} + \frac{y}{y-6} = 5 \\ \frac{10}{x-5} - \frac{9}{y-6} = -1 \end{cases}$$

b.
$$\begin{cases} \sqrt{2x-1} + \frac{1}{|2y-1|} = 1 \\ 3\sqrt{2x-1} - \frac{2}{|2y-1|} = -2 \end{cases}$$

c.
$$\begin{cases} \frac{7}{\sqrt{x-7}} - \frac{4}{\sqrt{y+6}} = \frac{5}{3} \\ \frac{5}{\sqrt{x-7}} + \frac{3}{\sqrt{y+6}} = \frac{13}{6} \end{cases}$$

d.
$$\begin{cases} \frac{2x}{x+1} + \sqrt{y} = -1 \\ \frac{1}{x+1} + 2y = 4 \end{cases}$$

e.
$$\begin{cases} \sqrt{x+1} + \frac{2y}{y+1} = 2 \\ \sqrt{4x+4} - \frac{1}{y+1} = \frac{3}{2} \end{cases}$$

f.
$$x + \frac{1}{x} + y + \frac{1}{y} = \frac{9}{2}$$

g.
$$\begin{cases} \frac{x+2}{x-1} + \frac{2y}{y+1} = 5 \\ \frac{x}{x-1} - \frac{1}{y+1} = \frac{3}{2} \end{cases}$$

h.
$$\begin{cases} \sqrt{4x-4} - \frac{1}{2x-y} = 1 \\ \sqrt{x-1} + \frac{7}{2x-y} = 8 \end{cases}$$

Lời giải

a. Điều kiện $x \neq 5, y \neq 6$. Ta viết lại hệ phương trình thành:

$$\begin{cases} \frac{x-5+5}{x-5} + \frac{y-6+6}{y-6} = 5 \\ \frac{10}{x-5} - \frac{9}{y-6} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{5}{x-5} + \frac{6}{y-6} = 3 \\ \frac{10}{x-5} - \frac{9}{y-6} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{10}{x-5} + \frac{12}{y-6} = 6 \\ \frac{10}{x-5} - \frac{9}{y-6} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{10}{x-5} + \frac{12}{y-6} = 6 \\ \frac{21}{y-6} = 7 \end{cases}$$

Từ $\frac{21}{y-6} = 7 \Rightarrow y-6=3 \Rightarrow y=9$ thay vào ta tìm được $x=10$. Vậy hệ phương trình có nghiệm là $(x; y) = (10; 9)$

b. Điều kiện $x \geq \frac{1}{2}, y \neq \frac{1}{2}$. Ta nhân phương trình thứ nhất của hệ với 2 thì thu được

$$\begin{cases} 2\sqrt{2x-1} + \frac{2}{|2y-1|} = 2 \\ 3\sqrt{2x-1} - \frac{2}{|2y-1|} = 2 \end{cases}, \text{ cộng hai phương trình của hệ mới ta có: } 5\sqrt{2x-1} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2x-1} = 0$$

$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$. Với $x = \frac{1}{2}$ thay vào phương trình ban đầu của hệ ta có:

$$\frac{1}{|2y-1|} = 1 \Leftrightarrow |2y-1| = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2y-1=1 \\ 2y-1=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1 \\ y=0 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có 2 nghiệm là $(x; y) = \left(\frac{1}{2}; 0\right), \left(\frac{1}{2}; 1\right)$.

c. Điều kiện $x > 7, y > -6$, ta viết lại hệ thành $\begin{cases} \frac{21}{\sqrt{x-7}} - \frac{12}{\sqrt{y+6}} = 5 \\ \frac{20}{\sqrt{x-7}} + \frac{12}{\sqrt{y+6}} = \frac{26}{3} \end{cases}$ cộng 2 phương trình của

hệ ta thu được: $\frac{41}{\sqrt{x-7}} = \frac{41}{3} \Leftrightarrow \sqrt{x-7} = 3 \Leftrightarrow x-7=9 \Leftrightarrow x=16$ thay vào ta được

$\frac{7}{3} - \frac{4}{\sqrt{y+6}} = \frac{5}{3} \Leftrightarrow \frac{4}{\sqrt{y+6}} = \frac{2}{3} \Rightarrow \sqrt{y+6} = 6 \Leftrightarrow y+6=36 \Leftrightarrow y=30$ thỏa mãn điều kiện. Vậy hệ có nghiệm $(x; y) = (16; 30)$

d. Điều kiện $y \geq 0, x \neq -1$. Ta viết lại hệ phương trình thành:

$$\begin{cases} \frac{2x+2-2}{x+1} + \sqrt{y} = -1 \\ \frac{1}{x+1} + 2y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-2}{x+1} + \sqrt{y} = -3 \\ \frac{2}{x+1} + 4y = 8 \end{cases}, \text{ cộng 2 phương trình của hệ ta thu được:}$$

$$\sqrt{y} + 4y = 5 \Leftrightarrow 4y + \sqrt{y} - 5 = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{y} - 1)(\sqrt{y} + 5) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{y} = 1(TM) \\ \sqrt{y} = -\frac{5}{4}(L) \end{cases}. \text{ Suy ra } y=1 \text{ thay vào}$$

phương trình thứ 2 ta được $x = -\frac{1}{2}$. Vậy hệ có nghiệm là $(x; y) = \left(-\frac{1}{2}; 1\right)$.

e. Điều kiện $x \geq -1, y \neq 4$, ta viết hệ lại dạng:

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} + \frac{2y+2-2}{y+1} = 2 \\ 2\sqrt{x+1} - \frac{1}{y+1} = \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+1} - \frac{2}{y+1} = 0 \\ 2\sqrt{x+1} - \frac{1}{y+1} = \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{x+1} - \frac{4}{y+1} = 0 \\ 2\sqrt{x+1} - \frac{1}{y+1} = \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{y+1} = \frac{3}{2} \\ 2\sqrt{x+1} - \frac{1}{y+1} = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Suy ra $\begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}$, thỏa mãn điều kiện. Vậy hệ có nghiệm $(x; y) = (0; 1)$

$$\text{f. Đặt } x+y=u, xy=v \text{ (với } v \neq 0 \text{)}. \text{ Hệ đã cho trở thành } \begin{cases} u + \frac{u}{v} = \frac{9}{2} \\ v + \frac{1}{v} = \frac{5}{2} \end{cases} \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$$

$$\text{Phương trình (2) có dạng } 2v^2 - 5v + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} v=2 \\ v=\frac{1}{2} \end{cases}$$

+ Với $v=2$ thay vào phương trình (1) ta tìm được $u=3$, ta có hệ phương trình $\begin{cases} x+y=3 \\ xy=2 \end{cases}$

nên x, y là nghiệm của phương trình $X^2 - 3X + 2 = 0$, tức là $(x; y) = (1; 2), (2; 1)$

+ Với $v = \frac{1}{2}$ thay vào phương trình (1) ta tìm được $u = \frac{3}{2}$. ta có hệ phương trình
$$\begin{cases} x + y = \frac{3}{2} \\ xy = \frac{1}{2} \end{cases}$$

nên x, y là nghiệm của phương trình $X^2 - \frac{3}{2}X + \frac{1}{2} = 0$, tức là $(x; y) = \left(1; \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}; 1\right)$. từ đó suy ra hệ đã cho có tất cả bốn nghiệm.

g. Điều kiện $x \neq 1, y \neq -1$, ta biến đổi hệ phương trình đã cho thành:

$$\begin{cases} \frac{x-1+3}{x-1} + \frac{2y+2-2}{y+1} = 5 \\ \frac{x-1+1}{x-1} - \frac{1}{y+1} = \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{x-1} - \frac{2}{y+1} = 2 \\ \frac{1}{x-1} - \frac{1}{y+1} = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{x-1} - \frac{2}{y+1} = 2 \\ \frac{2}{x-1} - \frac{2}{y+1} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{x-1} - \frac{2}{y+1} = 2 \\ \frac{1}{x-1} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm là $(x; y) = (2; 1)$

h. Điều kiện $\begin{cases} x \geq 1 \\ 2x - y \neq 0 \end{cases}$, hệ phương trình được viết lại thành:

$$\begin{cases} 2\sqrt{x-1} - \frac{1}{2x-y} = 1 \\ 2\sqrt{x-1} + \frac{14}{2x-y} = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{x-1} - \frac{1}{2x-y} = 1 \\ \frac{15}{2x-y} = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{x-1} = 2 \\ 2x - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases} \quad (\text{TMDK})$$

Vậy hệ có nghiệm là $(x; y) = (2; 3)$

Ví dụ 4. Cho hệ phương trình
$$\begin{cases} x - 2y = 5 \\ mx - y = 4 \end{cases} \quad (1)$$

a. Giải hệ phương trình với $m = 2$.

b. Tìm m để phương trình có nghiệm duy nhất (x, y) trong đó x, y trái dấu.

c. Tìm m để hệ phương trình có nghiệm duy nhất (x, y) thỏa mãn $x = |y|$

Lời giải

a. Với $m = 2$ ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} x - 2y = 5 \\ 2x - y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y + 5 \\ 2(2y + 5) - y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y + 5 \\ 3y = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases}$$

b. Từ phương trình (1) ta có $x = 2y + 5$. Thay $x = 2y + 5$ vào phương trình (2), ta được:

$$m(2y + 5) - y = 4 \Leftrightarrow (2m - 1)y = 4 - 5m \quad (3)$$

Ta có $x, y = \frac{3(4-5m)}{(2m-1)^2}$. Do đó $x, y < 0 \Leftrightarrow 4 - 5m < 0 \Leftrightarrow m > \frac{4}{5}$ (TMDK)

c. Ta có $x = |y| \Leftrightarrow \frac{3}{2m-1} = \left| \frac{4-5m}{2m-1} \right| \quad (4)$

Từ (4) suy ra $2m - 1 > 0 \Leftrightarrow m > \frac{1}{2}$. Với điều kiện $m > \frac{1}{2}$ ta có:

$$(4) \Leftrightarrow |4 - 5m| = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - 5m = 3 \\ 4 - 5m = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{1}{5} \\ m = \frac{7}{5} \end{cases} \quad (I) \quad \text{Vậy } m = \frac{7}{5}$$

Ví dụ 5

Cho hệ phương trình:
$$\begin{cases} x + my = m + 1 & (1) \\ mx + y = 3m - 1 & (2) \end{cases}$$

- a, Không giải hệ phương trình trên, cho biết với giá trị nào của m thì hệ phương trình trên có nghiệm duy nhất?
 b, Giải và biện luận hệ phương trình trên theo m .
 c, Tìm số nguyên m sao cho hệ phương trình có nghiệm duy nhất (x, y) mà x, y đều là các số nguyên.
 d, Chứng minh rằng khi hệ phương trình có nghiệm duy nhất (x, y) thì điểm $M(x, y)$ luôn chạy trên một đường thẳng cố định.
 e, Tìm m để hệ trên có nghiệm duy nhất sao cho x, y đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải:

a, Từ phương trình (2) ta có $y = 3m - 1 - mx$. Thay vào phương trình (1) ta được:

$$x + m(3m - 1 - mx) = m + 1 \Leftrightarrow (m^2 - 1)x = 3m^2 - 2m - 1 \quad (3)$$

Hệ có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi phương trình (3) có nghiệm duy nhất, tức là $m^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 1$.

Ta cũng có thể lập luận theo cách khác: Hệ có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi:

$$\frac{1}{m} \neq \frac{m}{1} \Leftrightarrow m^2 \neq 1 \Leftrightarrow m \neq \pm 1.$$

b, Từ phương trình (2) ta có $y = 3m - 1 - mx$. Thay vào phương trình (1) ta được:

$$x + m(3m - 1 - mx) = m + 1 \Leftrightarrow (m^2 - 1)x = 3m^2 - 2m - 1 \quad (3)$$

Trường hợp 1: $m \neq \pm 1$. Khi đó hệ có nghiệm duy nhất

$$\begin{cases} x = \frac{3m^2 - 2m - 1}{m^2 - 1} = \frac{(m-1)(3m+1)}{(m-1)(m+1)} = \frac{3m+1}{m+1} \\ y = 3m - 1 - m \cdot \frac{3m+1}{m+1} = \frac{m-1}{m+1} \end{cases}$$

Trường hợp 2: $m = 1$. Khi đó phương trình (3) trở thành: $0 \cdot x = 0$.

Vậy hệ có vô số nghiệm dạng $(x; 2 - x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Trường hợp 3: $m = -1$ khi đó phương trình (3) thành: $0 \cdot x = 4$

(3) vô nghiệm, do đó hệ vô nghiệm.

c. Hệ đã cho có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi $m \neq \pm 1$.

Ta có:
$$\begin{cases} x = \frac{3m+1}{m+1} = 3 - \frac{2}{m+1} \\ y = \frac{m-1}{m+1} = 1 - \frac{2}{m+1} \end{cases}$$
 Vậy x, y nguyên khi và chỉ khi $\frac{2}{m+1}$ nguyên. Do đó $m+1$ chỉ

có thể là $-2; -1; 1; 2$. Vậy $m = -3; -2; 0$ (thỏa mãn) hoặc $m = 1$ (loại)

Vậy m nhận các giá trị là $-3; -2; 0$.

d. Khi hệ có nghiệm duy nhất $(x; y)$ ta có: $x - y = 3 - \frac{2}{m+1} - \left(1 - \frac{2}{m+1}\right) = 2$

Vậy điểm $M(x; y)$ luôn chạy trên đường thẳng cố định có phương trình $y = x - 2$.

e, Khi hệ có nghiệm duy nhất $(x; y)$ theo (d) ta có: $y = x - 2$. Do đó:

$$xy = x(x - 2) = x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2 - 1 \geq -1$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi: $x = 1 \Leftrightarrow 3 - \frac{2}{m+1} = 1 \Leftrightarrow \frac{2}{m+1} = 2 \Leftrightarrow m + 1 = 1 \Leftrightarrow m = 0$.

Vậy với $m=0$ thì x, y đạt giá trị nhỏ nhất.

Chú ý: Ta cũng có thể tìm quan hệ $x-y=2$ theo cách khác: Khi hệ phương trình

$$\begin{cases} x+my=m+1 & (1) \\ mx+y=3m-1 & (2) \end{cases} \text{ có nghiệm duy nhất } (m \neq \pm 1) \text{ lấy phương trình (2) trừ đi phương trình (1)}$$

của hệ ta thu được: $(m-1)x-(m-1)y=2(m-1) \Rightarrow x-y=2$.

Ví dụ 6

Cho hệ phương trình: $\begin{cases} x-my=2-4m \\ mx+y=3m+1 \end{cases}$. Chứng minh rằng với mọi m hệ phương trình luôn có nghiệm. Gọi $(x_0; y_0)$ là một cặp nghiệm của phương trình.

Chứng minh: $x_0^2 + y_0^2 - 5(x_0 + y_0) + 10 = 0$.

Lời giải:

Từ phương trình (2) của hệ phương trình ta có $y=3m+1-mx$ thay vào phương trình (1) của hệ ta có: $(m^2+1)x=3m^2-3m+2$. Do $m^2+1 \neq 0$ với mọi m nên phương trình này luôn có nghiệm duy nhất x_0 . Suy ra hệ luôn có nghiệm với mọi m .

Gọi $(x_0; y_0)$ là một nghiệm của hệ. Từ hệ phương trình ta có: $\begin{cases} x_0-2=m(y_0-4) \\ y_0-1=m(3-x_0) \end{cases}$. Nhân cả hai

về phương trình thứ nhất với $(3-x_0)$, phương trình thứ hai với (y_0-4) rồi trừ hai phương trình cho nhau ta được: $(3-x_0)(x_0-2)-(y_0-4)(y_0-1)=0 \Leftrightarrow x_0^2 + y_0^2 - 5(x_0 + y_0) + 10 = 0$.

Ngoài ra ta cũng có thể giải theo cách khác như sau:

(d): $x-my+4m-2=0$, (d'): $mx+y-3m-1=0$. Ta dễ dàng chứng minh được đường thẳng (d) luôn đi qua điểm cố định: $A(2;4)$ và đường thẳng (d') luôn đi qua điểm cố định $B(3;1)$. Mặt khác ta cũng dễ chứng minh đường thẳng (d) và (d') vuông góc với nhau nên hai đường thẳng này luôn cắt nhau. Gọi $M(x_0, y_0)$ là giao điểm của hai đường thẳng thì tam giác MAB

vuông tại M. Gọi I là trung điểm của AB thì $I\left(\frac{5}{2}; \frac{5}{2}\right)$, $AB=\sqrt{10}$ suy ra

$$IM = \frac{1}{2}AB \Leftrightarrow 4IM^2 = AB^2 \Leftrightarrow 4\left[\left(x_0 - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y_0 - \frac{5}{2}\right)^2\right] = 10 \Leftrightarrow x_0^2 + y_0^2 - 5(x_0 + y_0) + 10 = 0.$$

Ví dụ 7

Cho hệ phương trình: $\begin{cases} x+my=3 & (1) \\ mx+y=2m+1 & (2) \end{cases}$

Hệ có nghiệm duy nhất (x, y) , hãy tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức sau đây:

a, $P = x^2 + 3y^2$;

b, $Q = x^4 + y^4$.

Lời giải:

Từ phương trình (2) ta suy ra: $y=2m+1-mx$. Thay vào phương trình (1) ta được:

$$x+m(2m+1-mx)=3 \Leftrightarrow (m^2-1)x=2m^2+m-3 \quad (3).$$

Hệ có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi phương trình (3) có nghiệm duy nhất, điều đó xảy ra khi và chỉ khi: $m^2-1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 1$.

$$\text{Khi đó } \begin{cases} x = \frac{2m^2 + m - 3}{m^2 - 1} = \frac{(m-1)(2m+3)}{(m-1)(m+1)} = \frac{2m+3}{m+1} = 2 + \frac{1}{m+1} \\ y = 2m+1-m \cdot \frac{2m+3}{m+1} = \frac{1}{m+1} \end{cases}$$

a, Ta có: $P = x^2 + 3(x-2)^2 = 4x^2 - 12x + 12 = (2x-3)^2 + 3 \geq 3$

$$P = 3 \text{ khi } x = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{2m+3}{m+1} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow 4m+6 = 3m+3 \Leftrightarrow m = -3.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng 3.

b, Ta có: $Q = x^4 + y^4 = x^4 + (x-2)^4$

Đặt $t = x-1$.

$$\text{Khi đó } Q = (t+1)^4 + (t-1)^4 = t^4 + 4t^3 + 6t^2 + 4t + 1 + t^4 - 4t^3 + 6t^2 - 4t + 1 = 2t^4 + 12t^2 + 2 \geq 2$$

$$Q = 2 \Leftrightarrow t = 0 \Leftrightarrow x = 1 \Leftrightarrow \frac{2m+3}{m+1} = 1 \Leftrightarrow 2m+3 = m+1 \Leftrightarrow m = -2.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của Q bằng 2.

Ví dụ 8

Cho hệ phương trình: $\begin{cases} mx + (m+1)y = 1 \\ (m+1)x - my = 8m+3 \end{cases}$. Chứng minh hệ luôn có nghiệm duy nhất $(x; y)$ và tìm GTLN của biểu thức $P = [x^2 + y^2 + (4+2\sqrt{3})y]$.

(Trích đề thi vào lớp 10 chuyên Toán – ĐHSPT Hà Nội 2015).

Lời giải:

Xét hai đường thẳng $(d_1): mx + (m+1)y - 1 = 0$; $(d_2): (m+1)x - my - 8m + 3 = 0$.

+ Nếu $m = 0$ thì $(d_1): y - 1 = 0$ và $(d_2): x - 5 = 0$ suy ra (d_1) luôn vuông góc với (d_2) .

+ Nếu $m = -1$ thì $(d_1): x + 1 = 0$ và $(d_2): y + 11 = 0$ suy ra (d_1) luôn vuông góc với (d_2) .

+ Nếu $m \neq \{0; -1\}$ thì đường thẳng (d_1) , (d_2) lần lượt có hệ số góc là: $a_1 = -\frac{m}{m+1}$, $a_2 = \frac{m+1}{m}$ suy ra $a_1 \cdot a_2 = -1$ do đó $(d_1) \perp (d_2)$.

Tóm lại với mọi m thì đường thẳng (d_1) luôn vuông góc với (d_2) . Nên hai đường thẳng luôn vuông góc với nhau.

Xét hai đường thẳng $(d_1): mx + (m+1)y - 1 = 0$; $(d_2): (m+1)x - my - 8m + 3 = 0$ luôn vuông góc với nhau nên nó cắt nhau, suy ra hệ có nghiệm duy nhất. Gọi giao điểm là $I(x; y)$, đường thẳng (d_1) đi qua $A(-1; 1)$ cố định, đường thẳng (d_2) luôn đi qua $B(3; -5)$ cố định suy ra I thuộc đường tròn đường kính AB . Gọi $M(1; -2)$ là trung điểm của AB thì

$$MI = \frac{AB}{2} \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 = 13 (*)$$

$$P = |(x-1)^2 + (y+2)^2 + 2x + 2\sqrt{3}y - 5| = |8 + 2(x + \sqrt{3}y)| = |8 + 2[x-1 + \sqrt{3}(y+2) + 1 - 2\sqrt{3}]|$$

hay $P = |10 - 4\sqrt{3} + 2[x-1 + \sqrt{3}(y+2)]|$. Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta có:

$$[x-1 + \sqrt{3}(y+2)]^2 \leq (1+3)[(x-1)^2 + (y+2)^2] = 52 \Rightarrow x-1 + \sqrt{3}(y+2) \leq \sqrt{52} = 2\sqrt{13}. \text{ Vậy}$$

$$P \leq 10 - 2\sqrt{3} + 2\sqrt{13}.$$

II. MỘT SỐ DẠNG HỆ PHƯƠNG TRÌNH KHÁC

1. Hệ đối xứng loại I:

a) Một hệ phương trình ẩn x, y được gọi là hệ phương trình đối xứng loại I nếu mỗi phương trình ta đổi vai trò của x, y cho nhau thì phương trình đó không đổi.

b) Tính chất

Nếu $(x_0; y_0)$ là một nghiệm của hệ thì $(y_0; x_0)$ cũng là nghiệm.

c) Cách giải: Đặt $\begin{cases} S = x + y \\ P = x.y \end{cases}$ (điều kiện $S^2 \geq 4P$ quy hệ về phương trình hai ẩn S, P)

Chú ý:

- Trong một số hệ phương trình đôi khi tính đối xứng thể hiện trong một phương trình. Ta cần dựa vào phương trình đó để tìm quan hệ S, P từ đó suy ra quan hệ x, y .
- Một số hệ phương trình ta cần phép đặt ẩn phụ để đưa hệ về dạng hệ đối xứng loại I.

Ví dụ

Giải các hệ phương trình sau:

$$\text{a, } \begin{cases} x + y + 2xy = 2 \\ x^3 + y^3 = 8 \end{cases} \quad \text{b, } \begin{cases} x^3 + y^3 = 19 \\ (x + y)(8 + xy) = 2 \end{cases} \quad \text{c, } \begin{cases} 2(x + y) = 3(\sqrt[3]{x^2y} + \sqrt[3]{xy^2}) \\ \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 6 \end{cases}$$

$$\text{d, } \begin{cases} x + y - \sqrt{xy} = 3 \\ \sqrt{x+1} + \sqrt{y+1} = 4 \end{cases} \quad \text{e, } \begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{2xy} = 8\sqrt{2} \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 4 \end{cases}$$

$$\text{f, } \begin{cases} (x + y)\left(1 + \frac{1}{xy}\right) = 5 \\ (x^2 + y^2)\left(1 + \frac{1}{x^2y^2}\right) = 9 \end{cases} \quad \text{g, } \begin{cases} x^3y(1 + y) + x^2y^2(2 + y) + xy^3 - 30 = 0 \\ x^2y + x(1 + y + y^2) + y - 11 = 0 \end{cases}$$

Lời giải:

a, Đặt $\begin{cases} S = x + y \\ P = x.y \end{cases}$ điều kiện $S^2 \geq 4P$ hệ phương trình đã cho trở thành:

$$\begin{cases} S + 2P = 2 \\ S(S^2 - 3P) = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P = \frac{2-S}{2} \\ S\left(S^2 - \frac{6-3S}{2}\right) = 8 \end{cases} \Rightarrow 2S^3 + 3S^2 - 6S - 16 = 0$$

$\Leftrightarrow (S - 2)(2S^2 + 7S + 8) = 0 \Leftrightarrow S = 2 \Rightarrow P = 0$. Suy ra x, y là hai nghiệm của phương trình:

a) $X^2 - 2X = 0 \Leftrightarrow X = 0, X = 2$.

Từ đó, ta có: $\begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases}$.

b) Đặt $\begin{cases} S = x + y \\ P = xy \end{cases}$ điều kiện $S^2 \geq 4P$ hệ phương trình đã cho trở thành:

$$\begin{cases} S(S^2 - 3P) = 19 \\ S(8 + P) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} SP = -8S \\ S^3 - 3(2 - 8S) = 19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} SP = -8S \\ S^3 + 24S - 25 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = 1 \\ P = -6 \end{cases}$$

Suy ra x, y là hai nghiệm của phương trình $X^2 - X - 6 = 0 \Leftrightarrow X_1 = 3, X_2 = -2$.

Vậy hệ phương trình đã cho có hai cặp nghiệm $(x, y) = (-2; 3); (3; -2)$.

c) Đặt $a = \sqrt[3]{x}, b = \sqrt[3]{y}$, hệ phương trình đã cho trở thành
$$\begin{cases} 2(a^3 + b^3) = 3(a^2b + b^2a) \\ a + b = 6 \end{cases}$$

Đặt $\begin{cases} S = a + b \\ P = ab \end{cases}$ điều kiện $S^2 \geq 4P$ thì hệ đã cho trở thành:

$$\begin{cases} 2(S^3 - 3SP) = 3SP \\ S = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(36 - 3P) = 3P \\ S = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = 6 \\ P = 8 \end{cases}. \text{ Suy ra } a, b \text{ là nghiệm của phương trình}$$

$$X^2 - 6X + 8 = 0 \Leftrightarrow X_1 = 2, X_2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \Rightarrow x = 8 \\ b = 4 \Rightarrow y = 64 \end{cases} \vee \begin{cases} a = 4 \Rightarrow x = 64 \\ b = 2 \Rightarrow y = 8 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có hai cặp nghiệm $(x, y) = (8; 64), (64; 8)$

d) Điều kiện $\begin{cases} xy \geq 0 \\ x, y \geq -1 \end{cases}$. Đặt $\begin{cases} S = x + y \\ P = xy \end{cases}$ điều kiện $S^2 \geq 4P$ thì hệ phương trình đã cho trở

thành
$$\begin{cases} S - \sqrt{P} = 3 \\ S + 2 + 2\sqrt{S + P + 1} = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S \geq 3; P = (S - 3)^2 \\ 2\sqrt{S + (S - 3)^2 + 1} = 14 - S \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3 \leq S \leq 14; P = (S - 3)^2 \\ 4(S^2 + 8S + 10) = 196 - 28S + S^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \leq S \leq 14; P = (S - 3)^2 \\ S^2 + 30S - 52 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = 6 \\ P = 9 \end{cases} \Rightarrow x = y = 3$$

Vậy hệ phương trình có cặp nghiệm duy nhất $(x, y) = (3; 3)$.

e) Hệ phương trình trở thành $\begin{cases} \sqrt{a^4 + b^4} + \sqrt{2ab} = 8\sqrt{2} \\ a + b = 4 \end{cases}$. Ta viết lại phương trình thành:

$$\begin{cases} \sqrt{(a+b)^4 - 4ab(a+b) + 2a^2b^2} + \sqrt{2ab} = 8\sqrt{2} \\ a + b = 4 \end{cases}$$

Đặt $\begin{cases} S = a + b \\ P = ab \end{cases}$ điều kiện $\begin{cases} S^2 \geq 4P \\ S, P \geq 0 \end{cases}$ thì hệ đã cho trở thành:

$$\begin{cases} \sqrt{256 - 64P - 6P^2} + \sqrt{2ab} = 8\sqrt{2} \\ S = 4 \end{cases} \Leftrightarrow S = P = 4 \Leftrightarrow a = b = 2 \Leftrightarrow x = y = 4$$

Ngoài ra, ta cũng có thể giải một cách ngắn gọn hơn như sau:
$$\begin{cases} \sqrt{2(x^2 + y^2)^2} + \sqrt{2xy} = 16 \\ x + y + 2\sqrt{xy} = 16 \end{cases}$$

$$\sqrt{2(x^2 + y^2)} = x + y \Leftrightarrow (x - y)^2 = 0 \Leftrightarrow x = y \Leftrightarrow 2\sqrt{x} = 4 \Leftrightarrow x = 4$$

Vậy hệ phương trình đã cho có cặp nghiệm duy nhất $(x, y) = (4; 4)$.

f) Điều kiện $xy \neq 0$.

Hệ đã cho tương đương
$$\begin{cases} x+y+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=5 \\ x^2+y^2+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x+\frac{1}{x}\right)+\left(y+\frac{1}{y}\right)=5 \\ \left(x+\frac{1}{x}\right)^2+\left(y+\frac{1}{y}\right)^2=13 \end{cases}$$

Đặt
$$\begin{cases} \left(x+\frac{1}{x}\right)+\left(y+\frac{1}{y}\right)=S \\ \left(x+\frac{1}{x}\right)\cdot\left(y+\frac{1}{y}\right)=P \end{cases}$$

Hệ trở thành:
$$\begin{cases} S=5 \\ S^2-2P=13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S=5 \\ P=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(x+\frac{1}{x}\right)=2; \left(y+\frac{1}{y}\right)=3 \\ \left(x+\frac{1}{x}\right)=3; \left(y+\frac{1}{y}\right)=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1; y=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2} \\ x=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}; y=1 \end{cases}$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x; y) = \left(1; \frac{3\pm\sqrt{5}}{2}\right); \left(\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}; 1\right)$

g) Hệ tương đương với
$$\begin{cases} xy(x+y)(x+y+xy)=30 \\ xy(x+y)+x+y+xy=11 \end{cases}$$

Đặt $xy(x+y)=a; x+y+xy=b$. Ta thu được hệ:

$$\begin{cases} ab=30 \\ a+b=11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=5; b=6 \\ a=6; b=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} xy(x+y)=5 \\ xy+x+y=6 \end{cases} \\ \begin{cases} xy(x+y)=6 \\ xy+x+y=5 \end{cases} \end{cases}$$

TH 1:
$$\begin{cases} xy(x+y)=6 \\ xy+x+y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy=2 \\ x+y=3 \\ xy=3 \\ x+y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2; y=1 \\ x=1; y=2 \end{cases} \quad (L)$$

TH 2:
$$\begin{cases} xy(x+y)=5 \\ xy+x+y=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy=5 \\ x+y=1 \\ xy=1 \\ x+y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{5-\sqrt{21}}{2}; y=\frac{5+\sqrt{21}}{2} \\ x=\frac{5+\sqrt{21}}{2}; y=\frac{5-\sqrt{21}}{2} \end{cases} \quad (L)$$

Vậy hệ có nghiệm $(x; y) = (1; 2), (2; 1), \left(\frac{5\pm\sqrt{21}}{2}; \frac{5\pm\sqrt{21}}{2}\right)$

2. Hệ đối xứng loại II:

Một hệ phương trình hai ẩn x, y được gọi là đối xứng loại II nếu trong hệ phương trình ta đổi vai trò của x, y cho nhau thì phương trình này biến thành phương trình kia.

+ Tính chất: Nếu $(x_0; y_0)$ là 1 nghiệm của hệ thì $(y_0; x_0)$ cũng là nghiệm của hệ.

+ Phương pháp giải:

Trừ từng vế với vế hai phương trình của hệ ta được một phương trình có dạng:

$$(x-y)[f(x,y)] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=0 \\ f(x,y)=0 \end{cases}$$

Ví dụ: Giải các hệ phương trình sau:

a)
$$\begin{cases} x^2 + \sqrt{x} = 2y \\ y^2 + \sqrt{y} = 2x \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} (x-1)(y^2+6) = y(x^2+1) \\ (y-1)(x^2+6) = x(y^2+1) \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} x^3 + 3x - 1 + \sqrt{2x+1} = y \\ y^3 + 3y - 1 + \sqrt{2y+1} = x \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} 4x^2 = y + \frac{3}{y} \\ 4y^2 = x + \frac{3}{x} \end{cases}$$

Lời giải

a) Điều kiện $x, y \geq 0$. Trừ từng vế của hai phương trình cho nhau, ta được:

$$x^2 + \sqrt{x} - (y^2 + \sqrt{y}) = 2(y-x) \Leftrightarrow (\sqrt{x} - \sqrt{y})[(\sqrt{x} + \sqrt{y})(x+y) + 1 + 2(\sqrt{x} + \sqrt{y})] = 0$$

Vì $(\sqrt{x} + \sqrt{y})(x+y) + 1 + 2(\sqrt{x} + \sqrt{y}) > 0$ nên phương trình đã cho tương đương với: $x = y$

Hay
$$x^2 - 2x + \sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow x^2 + \sqrt{x} = 2x \Leftrightarrow \sqrt{x}(x\sqrt{x} - 2\sqrt{x} + 1) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)(x + \sqrt{x} - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=1 \\ x=\frac{3-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

Vậy hệ đã cho có 3 cặp nghiệm $(x; y) = (0; 0), (1; 1), \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}; \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$

b) Hệ đã cho
$$\Leftrightarrow \begin{cases} xy^2 + 6x - y^2 = yx^2 + y \\ yx^2 + 6y - x^2 = xy^2 + x \end{cases}$$

Trừ vế theo vế hai phương trình của hệ, ta được:

$$2xy(y-x) + 7(x-y) + (x-y)(x+y) = 0 \Leftrightarrow (x-y)(x+y-2xy+7) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ x+y-2xy+7=0 \end{cases}$$

+ Nếu $x = y$, thay vào hệ phương trình, ta được: $x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=y=2 \\ x=y=3 \end{cases}$

+ Nếu $x + y - 2xy + 7 = 0 \Leftrightarrow (1-2x)(1-2y) = 15$.

Mặt khác, khi cộng hai phương trình của hệ đã cho ta được:

$$x^2 + y^2 - 5x - 5y + 12 = 0 \Leftrightarrow (2x-5)^2 + (2y-5)^2 = 2. \text{ Đặt } a = 2x-5, b = 2y-5.$$

Ta có:
$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 2 \\ (a+4)(b+4) = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+b)^2 - 2ab = 2 \\ ab + 4(a+b) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=0 \\ ab=-1 \\ a+b=-8 \\ ab=31 \end{cases}$$

Trường hợp 1: $\begin{cases} a+b=0 \\ ab=-1 \end{cases} \Leftrightarrow (x;y)=(3;2),(2;3).$

Trường hợp 2: $\begin{cases} a+b=-8 \\ ab=31 \end{cases}$ vô nghiệm.

Vậy nghiệm của hệ đã cho là $(x;y)=(2;2),(3;3),(2;3),(3;2).$

c) Điều kiện $x \geq -\frac{1}{2}; y \geq -\frac{1}{2}.$

Để ý rằng $x = y = -\frac{1}{2}$ không phải là nghiệm:

Xét trường hợp $x + y \neq -1$

Trừ hai phương trình của hệ cho nhau, ta được:

$$x^3 + 3x - 1 + \sqrt{2x+1} - (y^3 + 3y - 1 + \sqrt{2y+1}) = y - x$$

$$\Leftrightarrow (x-y)[x^2 + xy + y^2] + 4(x-y) + \frac{2(x-y)}{\sqrt{2x+1} + \sqrt{2y+1}} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-y) \left[x^2 + xy + y^2 + 4 + \frac{2}{\sqrt{2x+1} + \sqrt{2y+1}} \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow x = y$$

Khi $x = y$, xét phương trình

$$x^3 + 2x - 1 + \sqrt{2x+1} = 0 \Leftrightarrow x^3 + 2x + \sqrt{2x+1} - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x^2 + 1) + \frac{2x}{\sqrt{2x+1} + 1} = 0 \Leftrightarrow x \left[x^2 + 1 + \frac{2}{\sqrt{2x+1} + 1} \right] = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Tóm lại, hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất: $x = y = 0$

d) Từ giả thiết suy ra $x, y \neq 0$, mặt khác $y + \frac{4}{y} = x^2 > 0 \Rightarrow y > 0$, tương tự $x > 0$.

Trừ theo vế 2 phương trình của hệ, ta có:

$$4x^2 - 4y^2 = y + \frac{3}{y} - \left(x + \frac{3}{x} \right) \Leftrightarrow (x-y) \left[4(x+y) + 1 - \frac{3}{xy} \right] = 0, \text{ suy ra } x = y \text{ hoặc}$$

$$4(x+y) + 1 - \frac{3}{xy} = 0$$

Trường hợp 1: $x = y$ thay vào phương trình (1) của hệ, ta được:

$4x^2 = x + \frac{3}{x} \Leftrightarrow 4x^3 - x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(4x^2 + 3x + 3) = 0$ do $x > 0 \Rightarrow x = 1$ là nghiệm duy nhất của phương trình. Hệ (1) có nghiệm là $(x,y) = (1;1)$

Trường hợp 2: $4(x+y) + 1 - \frac{3}{xy} = 0 \Leftrightarrow 4(x+y)xy + xy - 3 = 0$. Để ý rằng, từ giả thiết kết hợp

bất đẳng thức AM - GM ta có: $4x^2 = x + \frac{3}{x} \geq 2\sqrt{3} > 3 \Rightarrow x > \frac{\sqrt{3}}{2}$, tương tự $x > \frac{\sqrt{3}}{2}$ suy ra $x + y > \sqrt{3}$ và

$$xy > \frac{3}{4} \Rightarrow 4(x+y)xy + xy - 3 > 4\sqrt{3} \cdot \frac{3}{4} + \frac{3}{4} - 4 > 0 \text{ nên } 4(x+y) + 1 - \frac{3}{xy} = 0 \text{ vô nghiệm.}$$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất $(x; y) = (1; 1)$

3. Hệ có yếu tố đẳng cấp

+ Là những hệ chứa các phương trình đẳng cấp;

+ Hoặc các phương trình của hệ khi nhân hoặc chia cho nhau thì tạo ra phương trình đẳng cấp.

Ta thường gặp dạng này ở các hình thức như:

$$+ \begin{cases} ax^2 + bxy + cy^2 = d \\ ex^2 + gxy + hy^2 = k \end{cases}$$

$$+ \begin{cases} ax^2 + bxy + cy^2 = dx + ey \\ gx^2 + hxy + ky^2 = lx + my \end{cases}$$

$$+ \begin{cases} ax^2 + bxy + cy^2 = d \\ gx^2 + hx^2y + kxy^2 + ly^3 = mx + ny \end{cases}$$

...

Một số hệ phương trình có tính đẳng cấp được giấu trong các biểu thức chứa căn đòi hỏi người giải cần tinh ý để phát triển.

Phương pháp chung để giải hệ dạng này là: Từ các phương trình của hệ ta nhân hoặc chia hai vế cho nhau để tạo ra phương trình đẳng cấp bậc n .

$$a_1x^n + a_k \cdot x^{n-k} \cdot y^k + \dots + a_ny^n = 0$$

Từ đó ta xét hai trường hợp:

+ $y = 0$ thay vào để tìm x .

+ $y \neq 0$ ta đặt $x = ty$ thì thu được phương trình: $a_1t^n + a_k t^{n-k} + \dots + a_n = 0$

Giải phương trình tìm t sau đó thế vào hệ đầu để tìm x, y .

Chú ý: Ta cũng có thể đặt $y = tx$

Ví dụ. Giải các hệ phương trình sau

$$\text{a. } \begin{cases} x^3 - 8x = y^3 + 2y \\ x^2 - 3 = 3(y^2 + 1) \end{cases}$$

$$\text{b. } \begin{cases} 5x^2y - 4xy^2 + 3y^3 - 2(x+y) = 0 \\ xy(x^2 + y^2) + 2 = (x+y)^2 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

$$\text{c. } \begin{cases} \sqrt{x^2 + 2y + 3} + 2y - 3 = 0 \\ 2(2y^3 + x^3) + 3y(x+1)^2 + 6x(x+1) + 2 = 0 \end{cases}$$

$$\text{d. } \begin{cases} 3x^3 - y^3 = \frac{1}{x+y} \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

$$\text{e. } \begin{cases} x^2\sqrt{y+1} - 2xy - 2x = 1 \\ x^3 - 3x - 3xy = 6 \end{cases} \quad \text{f. } \begin{cases} x^2 + xy + x + 3 = 0 \\ (x+1)^2 + 3(y+1) + 2(xy - \sqrt{x^2y + 2y}) = 0 \end{cases}$$

Lời giải

$$\text{a. Ta biến đổi hệ: } \begin{cases} x^3 + y^3 = 8x + 2y \\ x^2 + 3y^2 = 6 \end{cases}$$

Để ý rằng nếu nhân chéo ư phương trình của hệ ta có:

$6(x^3 + y^3) = (8x + 2y)(x^2 + 3y^2)$ đây là phương trình đẳng cấp bậc 3: Từ đó ta có lời giải như

sau: Vì $x=0$ không là nghiệm của hệ nên ta đặt $y=tx$. Khi đó hệ thành:
$$\begin{cases} x^3 - 8x = t^3 x^3 + 2tx \\ x^2 - 3 = 3(t^2 x^2 + 1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2(1-t^3) = 2t+8 \\ x^2(1-3t^2) = 6 \end{cases} \Rightarrow \frac{1-t^3}{1-3t^2} = \frac{t+4}{3} \Leftrightarrow 3(1-t^3) = (t+4)(1-3t^2) \Leftrightarrow 12t^2 - 1 - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{1}{3} \\ t = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\bullet \quad t = \frac{1}{3} \Rightarrow \begin{cases} x^2(1-3t^2) = 6 \\ y = \frac{x}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 3 \\ y = \pm 1 \end{cases}$$

$$\bullet \quad t = -\frac{1}{4} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm \frac{4\sqrt{78}}{13} \\ y = \pm \frac{\sqrt{78}}{13} \end{cases}. \text{ Suy ra hệ phương trình có các cặp nghiệm:}$$

$$(x; y) = (3, 1); (-3, -1); \left(\frac{4\sqrt{78}}{13}, \frac{\sqrt{78}}{13}\right); \left(-\frac{4\sqrt{78}}{13}, -\frac{\sqrt{78}}{13}\right)$$

b. Phương trình (2) của hệ có dạng:

$$xy(x^2 + y^2) + 2 = x^2 + y^2 + 2xy \Leftrightarrow (x^2 + y^2)(xy - 1) - 2(xy - 1) = 0 \Leftrightarrow (xy - 1)(x^2 + y^2 - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} xy = 1 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases}$$

$$\text{TH1: } \begin{cases} 5x^2y - 4xy^2 + 3y^3 - 2(x+y) = 0 \\ xy = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \text{ và } \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases}.$$

$$\text{TH2: } \begin{cases} 5x^2y - 4xy^2 + 3y^3 - 2(x+y) = 0 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x^2y - 4xy^2 + 3y^3 = 2(x+y) \quad (*) \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases}$$

Nếu ta thay $x^2 + y^2 = 2$ vào phương trình (*) thì thu được phương trình đẳng cấp bậc 3:

$$5x^2y - 4xy^2 + 3y^3 = (x^2 + y^2)(x+y). \text{ Từ đó ta có lời giải như sau:}$$

Ta thấy $y=0$ không là nghiệm của hệ.

$$\text{Xét } y \neq 0 \text{ đặt } x = ty \text{ thay vào hệ ta có } \begin{cases} 5t^2y^3 - 4ty^3 + 3y^3 = 2(ty + y) \\ t^2y^2 + y^2 = 2 \end{cases}$$

$$\text{Chia hai phương trình của hệ ta được: } \frac{5t^2 - 4t + 3}{t^2 + 1} = \frac{t+1}{1} \Leftrightarrow t^3 - 4t^2 + 5t - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x = \frac{1}{2}y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases} \vee \begin{cases} x = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \\ y = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \end{cases} \vee \begin{cases} x = -\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \\ y = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

c. Điều kiện: $x^2 + 2y + 3 \geq 0$. Phương trình (2) tương đương:

$$2(2y^3 + x^3) + 3y(x+1)^2 + 6x^2 + 6x + 2 = 0 \Leftrightarrow 2(x+1)^3 + 3y(x+1)^2 + 4y^3 = 0$$

Đây là phương trình đẳng cấp giữa y và $x+1$.

+ Xét $y=0$ hệ vô nghiệm

+ Xét $y \neq 0$. Đặt $x+1=ty$ ta thu được phương trình: $2t^3 + 3t^2 + 4 = 0$

Suy ra $t = -2 \Leftrightarrow x+1 = -2y$

Thay vào phương trình (1) ta được: $\sqrt{x^2 - x + 2} = x + 4 \Leftrightarrow x = -\frac{14}{9} \Rightarrow y = \frac{5}{18}$.

Vậy hệ có một cặp nghiệm: $(x; y) = \left(-\frac{14}{9}; \frac{5}{18}\right)$.

d. Ta có thể viết lại hệ thành:
$$\begin{cases} (3x^3 - y^3)(x+y) = 1 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \quad (1)$$

Ta thấy về trái phương trình (1) là bậc 4. Để tạo ra phương trình đẳng cấp ta sẽ thay về phải thành $(x^2 + y^2)^2$.

Như vậy ta có: $(3x^3 - y^3)(x+y) = (x^2 + y^2)^2 \Leftrightarrow 2x^4 + 3x^3y - 2x^2y^2 - xy^3 - 2y^4 = 0$

$$\Leftrightarrow (x-y)(x+2y)(2x^2 + xy + y^2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x = -2y \\ 2x^2 + xy + y^2 = 0 \end{cases}$$

+ Nếu $2x^2 + xy + y^2 = 0 \Leftrightarrow \frac{7}{4}x^2 + \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$ không thỏa mãn.

+ Nếu $x = y$ ta có $2x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$

+ Nếu $x = -2y \Leftrightarrow 5y^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm \frac{\sqrt{5}}{5}$

Tóm lại hệ phương trình có các cặp nghiệm:

$$(x; y) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(\frac{2\sqrt{5}}{5}; -\frac{\sqrt{5}}{5}\right), \left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}; \frac{\sqrt{5}}{5}\right)$$

e. Điều kiện $y \geq -1$. Ta viết lại hệ thành
$$\begin{cases} x^2\sqrt{y+1} - 2x(y+1) = 1 \\ x^3 - 3x(y+1) = 6 \end{cases}$$

Ta thấy các phương trình của hệ đều là phương trình đẳng cấp bậc 3 với $x, \sqrt{y+1}$

Dễ thấy $y = -1$ không phải là nghiệm của phương trình.

Xét $y > -1$. Đặt $x = t\sqrt{y+1}$ thay vào hệ ta có:

$$\begin{cases} \sqrt{(y+1)^3} [t^2 - 2t] = 1 \\ \sqrt{(y+1)^3} [t^3 - 3t] = 6 \end{cases} \Leftrightarrow t^3 - 3t - 6(t^2 - 2t) = 0 \begin{cases} t = 0 \\ t = 3 \end{cases}$$

+ Nếu $t = 0$ thì $x = 0$. Không thỏa mãn hệ.

+ Nếu $t = 3 \Leftrightarrow 27\sqrt{(y+1)^3} - 9\sqrt{(y+1)^3} = 6 \Leftrightarrow y = \frac{1}{\sqrt[3]{9}} - 1 \Rightarrow x = \sqrt[3]{9}$

Vậy hệ có 1 cặp nghiệm duy nhất $(x; y) = \left(\sqrt[3]{9}; \frac{1}{\sqrt[3]{9}} - 1\right)$.

f. Điều kiện: $x^2y + 2y \geq 0 \Leftrightarrow y \geq 0$.

Từ phương trình thứ nhất ta có: $xy = -x^2 - x - 3$ thay vào phương trình thứ hai ta được:

$$(x+1)^2 + 3(y+1) - 2x^2 - 2x - 6 - 2\sqrt{y(x^2+2)} = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2 - 3y + 2\sqrt{y(x^2+2)} = 0$$

Đây là phương trình đẳng cấp bậc 2 với $\sqrt{y}$ và $\sqrt{x^2+2}$

$$\text{Đặt } \sqrt{y} = t\sqrt{x^2+2} \text{ ta thu được: } 3t^2 - 2t - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -\frac{1}{3} (L) \end{cases}$$

Khi $t = 1$ ta có: $y = x^2 + 2$ thay vào phương trình thứ nhất của hệ ta thu được: $x = -1 \Rightarrow y = 3$

Tóm lại hệ phương trình có một cặp nghiệm $(x; y) = (1; -3)$.

4. Phương pháp biến đổi tương đương

Biến đổi tương đương là phương pháp giải hệ dựa trên những kỹ thuật cơ bản như: Thê, biến đổi các phương trình về dạng tích, cộng trừ các phương trình trong hệ để tạo ra phương trình hệ quả có dạng đặc biệt...

Ví dụ 1

$$\text{a. } \begin{cases} 3y^2 + 1 + 2y + 2y(x+1) = 4y\sqrt{x^2 + 2y + 1} \\ y(y-x) = 3 - 3y \end{cases}$$

$$\text{b. } \begin{cases} 2x + (3 - 2xy)y^2 = 3 \\ 2x^2 - x^2y = 2x^2y^2 - 7xy + 6 \end{cases}$$

$$\text{c. } \begin{cases} x^4 + 2xy + 6y - (7 + 2y)x^2 = -9 \\ 2yx^2 - x^3 = 10 \end{cases}$$

$$\text{d. } \begin{cases} y^2 - 2xy = 8x^2 - 6x + 1 \\ y^2 = x^3 + 8x^2 - x + 1 \end{cases} \quad (\text{Tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Hà Nội, 2018})$$

$$\text{e. } \begin{cases} xy(x+y) = 2 \\ x^3 + y^3 + 6 = 8x^2y^2 \end{cases}$$

$$\text{f. } \begin{cases} 7xy - x + y = 7 \\ x^3 + y^3 = 1 + xy - x + y \end{cases}$$

Lời giải

a. Điều kiện: $x^2 + 2y + 1 \geq 0$. Phương trình (1) tương đương:

$$4y^2 - 4y\sqrt{x^2 + 2y + 1} + x^2 + 2y + 1 = x^2 - 2xy + y^2$$

$$\Leftrightarrow (2y - \sqrt{x^2 + 2y + 1})^2 = (x - y)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 + 2y + 1} = 3y - x \\ \sqrt{x^2 + 2y + 1} = x + y \end{cases}$$

TH1: $\sqrt{x^2 + 2y + 1} = 3y - x$. Bình phương hai vế phương trình ta được:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3y \geq x \\ x^2 + 2y + 1 = 9y^2 - 6xy + x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3y \geq x \\ 6xy = 9y^2 - 2y - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1; y = 1 \text{ (TM)} \\ x = \frac{415}{51}; y = \frac{17}{3} \text{ (TM)} \end{cases}$$

TH2: $\sqrt{x^2 + 2y + 1} = x + y$. Bình phương hai vế phương trình:

$$\begin{cases} x+y \geq 0 \\ x^2+2y+1=x^2+2xy+y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y \geq 0 \\ 2xy=-y^2+2y+1 \\ xy=y^2+3y-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1; y=1 \\ x=\frac{41}{21}; y=-\frac{7}{3} \end{cases} (L).$$

Vậy hệ có nghiệm $(x; y) = (1; 1), \left(\frac{415}{51}; \frac{17}{3}\right)$.

b, Từ phương trình (1) ta thấy: $2x(1-y^3)=3(1-y^2)$.

TH1: $y=1$ thay vào (2) ta có: $x^3-7x+6=0 \Leftrightarrow x=1; x=3; x=-2$.

TH2: Kết hợp với (2) ta có hệ mới: $\begin{cases} 2x+2xy+2xy^2=3+3y & (*) \\ 2x^2-x^3y=2x^2y^2-7xy+6 & (3) \end{cases}$

Phương trình (3) tương đương với: $(xy-2)(2xy+x^2-3)=0$.

+ Nếu $xy=2$ thay vào (*) ta có:

$2x+4+4y=3+3y \Rightarrow x=\frac{-1-y}{2} \Rightarrow y(1+y)=-4$. Phương trình này vô nghiệm nên hệ vô nghiệm.

+ Nếu: $xy=2$ thay vào (*) ta có:

$$2x+3-x^2+y(3-x^2)=3+3y \Rightarrow y=\frac{2}{x}-1 \Rightarrow 2x\left(\frac{2}{x}-1\right)=3-x^2 \Leftrightarrow x=1; y=1$$

Vậy hệ có nghiệm $(x; y) = (1; 1), (3; 1), (-2; 1)$.

c, Phương trình (1) tương đương:

$$x^4-7x^2+9-2y(x^2-x-3)=0 \Leftrightarrow (x^2-x-3)(x^2+x-3)-2y(x^2-x-3)=0$$

$$\text{TH1: } x^2-x-3=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1-\sqrt{13}}{2} \Rightarrow y=\frac{79+\sqrt{13}}{36} \\ x=\frac{1+\sqrt{13}}{2} \Rightarrow y=\frac{79-\sqrt{13}}{36} \end{cases}$$

$$\text{TH2: } 2y^2=x^2+x-3 \text{ thay vào (2) ta có: } (x^2+x-3)x^2-x^3=10 \Leftrightarrow \begin{cases} x=\sqrt{5} \Rightarrow y=1-\frac{\sqrt{5}}{2} \\ x=-\sqrt{5} \Rightarrow y=1+\frac{\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

Vậy hệ có nghiệm

$$(x; y) = \left(\frac{1-\sqrt{13}}{2}; \frac{79+\sqrt{13}}{36}\right), \left(\frac{1+\sqrt{13}}{2}; \frac{79-\sqrt{13}}{36}\right), \left(\sqrt{5}; 1-\frac{\sqrt{5}}{2}\right), \left(-\sqrt{5}; 1+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$$

d, Từ phương trình thứ nhất ta suy ra $y^2=2xy+8x^2-6x+1$ thay vào phương trình thứ 2 ta thu được: $2xy+8x^2-6x-1=x^3+8x^2-x+1 \Leftrightarrow x^3-2xy-5x=0 \Leftrightarrow x(x^2-2y+5)=0 \Leftrightarrow x=0$ hoặc $2y=x^2+5$.

TH1: $x=0$ thay vào ta tìm được: $y=\pm 1$.

TH2: $2y=x^2+5$ thay vào phương trình $y^2-2xy=8x^2-6x+1 \Leftrightarrow 4y^2-4x.2y=32x^2-24x+4$

ta có: $(x^2+5)^2-4x.(x^2+5)=32x^2-24x+4 \Leftrightarrow x^4-4x^3-22x^2+4x+21=0$

hay $(x^2-1)(x-7)(x+3)=0$ từ đó tìm được các nghiệm của hệ là:

$$(x; y) = (-1; 3), (-3; 7), (1; 3), (7; 27)$$

Kết luận: Hệ phương trình có 6 nghiệm $(x; y) = (-1; 3), (-3; 7), (1; 3), (7; 27), (0; 1), (0; -1)$.

Cách khác: $y^2-2xy=8x^2-6x+1 \Leftrightarrow x^2-2xy+y^2=9x^2-6x+1 \Leftrightarrow (x-y)^2=(3x-1)^2$ suy ra

$x - y = 3x - 1$ hoặc $x - y = 1 - 3x$ đến đây việc xử lý bài toán dành cho học sinh.

e, Ta có $x^3 + y^3 + 6 = x^3 + y^3 + 3xy(x + y) = (x + y)^3$; $8x^2y^2 = 8 \cdot \left(\frac{2}{x+y}\right)^2 = \left(\frac{32}{(x+y)^2}\right)$

(do $x + y \neq 0 \Rightarrow (x + y)^5 = 32 \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 2 \\ xy = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 1$).

f, Từ phương trình thứ nhất ta suy ra $-x + y = 7 - 7xy$ thay vào phương trình thứ 2 ta được:

$$x^3 + y^3 = 1 + xy - 7xy + 7 \Leftrightarrow x^3 + y^3 - 8 + 6xy = 0 \Leftrightarrow (x + y)^3 - 8 - 3xy(x + y - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + y - 2) \left[(x + y)^2 + 2(x + y) + 4 - 3xy \right] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 2 \\ x^2 + y^2 - xy + 2x + 2y + 4 = 0 \end{cases}$$

+ Nếu $x + y = 2$ thay vào ta có hệ

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ 7xy - x + y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 - x \\ 7x(2 - x) - x + 2 - x - 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 - x \\ -7x^2 + 12x - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, y = 1 \\ x = \frac{5}{7}, y = \frac{9}{7} \end{cases}$$

+ Nếu $x^2 + y^2 - xy + 2x + 2y + 4 = 0 \Leftrightarrow (x - y)^2 + (x + 2)^2 + (y + 2)^2 \Leftrightarrow x = y = -2$.

Thử lại ta thấy nghiệm này không thỏa mãn.

Vậy hệ có nghiệm: $(x; y) = (1; 1), \left(\frac{5}{7}; \frac{9}{7}\right)$

Ví dụ 2. Giải hệ phương trình với nghiệm là số thực

a, $\begin{cases} x^2 + 2y^2 + 2x + 8y + 6 = 0 \\ x^2 + xy + y + 4x + 1 = 0 \end{cases}$ b, $\begin{cases} 2x^2 + 2xy + y - 5 = 0 \\ y^2 + xy + 5x - 7 = 0 \end{cases}$ c, $\begin{cases} 2xy + 3x + 4y + 6 = 0 \\ x^2 + 4y^2 + 4x + 12y - 3 = 0 \end{cases}$

d, $\begin{cases} x^3 + x - y = x^2y \\ (x + 1)\sqrt{x^2 - 2y + 3} = y^2 + 1 \end{cases}$ e, $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 1 \\ x^2 + 2xy - 2y^2 = 5x - y - 3 \end{cases}$

Lời giải

a, Cách 1: Đặt $\begin{cases} x = u + a \\ x = v + b \end{cases}$ thay vào phương trình (1) của hệ ta có:

$$(u + a)^2 + 2(v + b)^2 + 2(u + a) + 8(v + b) + 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow u^2 + 2v^2 + 2(a + 1)u + 4v(b + 2) + a^2 + 2b^2 + 2a + 8b + 6 = 0.$$

Ta mong muốn không có số hạng bậc nhất trong phương trình nên điều kiện là:

$$\begin{cases} a + 1 = 0 \\ b + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -2 \end{cases}$$

Từ đó ta có cách đặt ẩn phụ như sau: Đặt $\begin{cases} x = u - 1 \\ y = v - 2 \end{cases}$ thay vào hệ ta có:

$$\begin{cases} u^2 + 2v^2 = 3 \\ u^2 + uv = 2 \end{cases} \text{ đây là hệ đẳng cấp.}$$

Từ hệ ta suy ra $2(u^2 + 2v^2) = 3(u^2 + uv) \Leftrightarrow u^2 + 3uv - 4v^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ u = -4v \end{cases}$

Công việc còn lại là khá đơn giản.

Cách 2: Ta cộng phương trình (1) với k lần phương trình (2).

$$x^2 + 2y^2 + 2x + 8y + 6 + k[x^2 + xy + y + 4x + 1] = 0$$

$$\Leftrightarrow (1+k)x^2 + (2+4k+ky)x + 2y^2 + 8y + ky + k + 6 = 0. \text{Ta có}$$

$$\Delta = (2+4k+ky)^2 - 4(k+1)(2y^2 + 8y + ky + k + 6)$$

$$= (k^2 - 8k - 8)y^2 + (4k^2 - 32k - 32)y + 12k^2 - 12k - 20.$$

Ta mong muốn Δ có dạng $(Ay + B)^2 \Leftrightarrow \Delta = 0$ có nghiệm kép:

$$\Leftrightarrow (4k^2 - 32k - 32)^2 - 4(k^2 - 8k - 8)(12k^2 - 12k - 20) = 0 \Leftrightarrow k = -\frac{3}{2}$$

Từ đó ta có cách giải như sau:

Lấy 2 lần phương trình (1) trừ 3 lần phương trình (2) của hệ ta có:

$$2(x^2 + 2y^2 + 2x + 8y + 6) - 3(x^2 + xy + y + 4x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow -x^2 - 3xy - 8x + 4y^2 + 13y + 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 + (3y+8)x - (4y^2 + 13y + 9) = 0$$

$$\text{Ta có } \Delta = (3y+8)^2 + 4(4y^2 + 13y + 9) = 25y^2 + 100y + 100 = (5y+10)^2$$

$$\text{Từ đó tính được: } \begin{cases} x = \frac{3y+8-(5y+10)}{2} = -y-1 \\ x = \frac{3y+8+(5y+10)}{2} = 4y+9 \end{cases}. \text{Phần việc còn lại là khá đơn giản.}$$

b, Lấy phương trình (1) trừ phương trình (2) ta thu được:

$$2x^2 + 2xy + y - 5 - (y^2 + xy + 5x - 7) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + (y-5)x - y^2 + y + 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{y+1}{2} \\ x = -y+2 \end{cases}$$

Nhận xét: Khi gặp các hệ phương trình dạng:

$$\begin{cases} a_1x^2 + a_2xy + a_3y^2 + a_4x + a_5y + a_6 = 0 \\ b_1x^2 + b_2xy + b_3y^2 + b_4x + b_5y + b_6 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1x^2 + a_2xy + a_3y^2 + a_4x + a_5y + a_6 = 0 \\ b_1x^2 + b_2xy + b_3y^2 + b_4x + b_5y + b_6 = 0 \end{cases}$$

+ Ta đặt $x=u+a, y=v+b$ sau đó tìm điều kiện để phương trình không có số hạng bậc 1 hoặc không có số hạng tự do.

+ Hoặc ta cộng phương trình (1) với k lần phương trình (2) sau đó chọn k sao cho có thể biểu diễn được x theo y . Để có được quan hệ này ta cần dựa vào tính chất phương trình

$$ax^2 + bx + c \text{ biểu diễn được thành dạng: } (Ax + B)^2 \Leftrightarrow \Delta = 0$$

c, Phương trình (1) của hệ được viết lại thành: $2xy + 4y + 3x + 6 = 0 \Leftrightarrow (x+2)(2y+3) = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = -\frac{3}{2} \end{cases}. \text{Từ đó thay vào phương trình thứ (2) ta tìm được các nghiệm của hệ.}$$

d, Từ phương trình đầu của hệ ta suy ra $x(x^2+1) - y(1+x^2) = 0 \Leftrightarrow (x^2+1)(x-y) = 0 \Rightarrow x=y$ thay

vào phương trình thứ (2) ta thu được: $(x+1)\sqrt{x^2-2x+3} = x^2+1$

Điều kiện $x \geq -1$ ta viết lại phương trình thành: $(x+1)\sqrt{x^2-2x+3} = x^2+1$. Bình phương hai vế

phương trình trở thành: $(x^2+2x+1)(x^2-2x+3) = x^4+2x^2+1 \Leftrightarrow 2x=2 \Leftrightarrow x=1$. Vậy hệ có

nghiệm $x=y=1$

Cộng hai phương trình của hệ ta có

$$2x^2 + (y-5)x - y^2 + y + 2 = 0, \Delta y^4 (y-5)^2 - 8(-y^2 + y + 2) = (3y-3)^2 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{y+1}{2} \\ x = 2-y \end{cases}$$

Thay vào phương trình đầu ta tìm được nghiệm của hệ.

e, Đối với các hệ đại số bậc 3:

Ta có thể vận dụng các hướng giải

+ Biến đổi hệ để tạo thành các hằng đẳng thức

+ Nhân các phương trình với một biểu thức đại số sau đó cộng các phương trình để tạo ra quan hệ tuyến tính.

Ví dụ 3. Giải hệ phương trình với nghiệm là số thực

$$a, \begin{cases} x^3 + 3xy^2 = -49 \\ x^2 - 8xy + y^2 = 8y - 17x \end{cases}$$

$$b, \begin{cases} x^3 + 3x^2y = 6xy - 3x - 49 \\ x^2 - 6xy + y^2 = 10y - 25x - 9 \end{cases}$$

$$c, \begin{cases} x^3 - y^3 = 35 \\ 2x^2 + 3y^2 = 4x - 9y \end{cases}$$

$$d, \begin{cases} xy(3x+y) = 4 \\ 7x^3 + 11 = 3(x+y)(x+y+1) \end{cases}$$

$$e, \begin{cases} xy(x+y) = 2 \\ x^3 + y^3 + x^3y + 7(x+1)(y+1) = 31 \end{cases}$$

(Đề tuyển sinh lớp 10 chuyên Trường chuyên KHTN – ĐHQG Hà Nội, 2018)

Lời giải

$$a, \text{Phân tích: Ta viết lại hệ như sau: } \begin{cases} x^3 + 3xy^2 + 49 = 0 \\ y^2 + 8(x+1)y + x^2 + 17x = 0 \end{cases}$$

$$\text{Nhận thấy } x = -1 \text{ thì hệ trở thành: } \begin{cases} -3y^2 + 48 = 0 \\ y^2 - 16 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = \pm 4$$

Từ đó ta có giải như sau:

Lấy phương trình (1) cộng với 3 lần phương trình (2) của hệ ta có:

$$x^3 + 3xy^2 + 49 + 3(x^2 - 8xy + y^2 - 8y + 17x) = 0 \Leftrightarrow (x+1)[(x+1)^2 + 3(y-4)^2] = 0$$

Từ đó ta dễ dàng tìm được các nghiệm của hệ: $(x;y) = (-1;4), (-1;-4)$

b, Làm tương tự như câu a

Lấy phương trình (1) cộng với 3 lần phương trình (2) thì ta được:

$$(x+1)[(x+1)^2 + 3(y-5)^2] = 0$$

Từ đó dễ dàng tìm được các nghiệm của hệ

c, Lấy phương trình (1) trừ đi 3 lần phương trình (2) ta thu được:

$$(x-2)^3 = (y+3)^3 \Leftrightarrow x = y+5$$

$$\text{Thay vào phương trình (2) ta có: } 2(y+5)^2 + 3y^2 = 4(y+5) - 9y \Leftrightarrow 5y^2 + 25 = -30 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = -3 \\ y = -2 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm là: $(x;y) = (2;-3), (3;-2)$

Lấy 2 lần phương trình (2) trừ đi phương trình (1) ta thu được:

$$(x-1)[y^2 - (x+3)y + x^2 - x - 2] = 0$$

Trường hợp 1: $x = 1$ hệ vô nghiệm

Trường hợp 2:
$$\begin{cases} y^2 - (x+3)y + x^2 - x - 2 = 0 \\ x^3 + y^2 = (x-y)(xy-1) \end{cases}$$

Lấy 2 lần phương trình (2) trừ đi phương trình (1) ta thu được:

$$(2x+1)[y^2 - (x-1)y + x^2 - x + 2] = 0$$

+ Nếu $x = -\frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{3 \pm 3\sqrt{5}}{4}$

+ Nếu $y^2 - (x-1)y + x^2 - x + 2 = 0$ ta có hệ:
$$\begin{cases} y^2 - (x-1)y + x^2 - x + 2 = 0 \\ y^2 - (x+3)y + x^2 - x - 2 = 0 \end{cases}$$

Trừ hai phương trình cho nhau ta có: $y = -1$ thay vào thì hệ vô nghiệm

Kết luận: Nghiệm của hệ là: $(x; y) = \left(-\frac{1}{2}; \frac{3+3\sqrt{5}}{4}\right), \left(-\frac{1}{2}; \frac{3-3\sqrt{5}}{4}\right)$

d, Ta có: $(1) \Leftrightarrow 7x^3 + 3xy(3x+y) = 1 + 3(x+y)(x+y+1)$

$$\Leftrightarrow 7x^3 + 3xy(4x+2y-x-y) = 1 + 3(x+y)(x+y+1)$$

$$\Leftrightarrow 8x^3 + y^3 + 6xy(2x+y) = x^3 + y^3 + 3xy(x+y) + 3(x+y+1)(x+y) + 1$$

$$\Leftrightarrow (2x+y)^3 = (x+y)^3 + 3(x+y)(x+y+1) + 1^3 = (x+y+1)^3$$

$$\Leftrightarrow 2x+y = x+y+1 \Leftrightarrow x=1$$

Vậy hệ phương trình đã cho tương đương với:
$$\begin{cases} x=1 \\ y(y+3)=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases} \vee \begin{cases} x=1 \\ y=-4 \end{cases}$$

e, Đặt $a = x+y, b = xy$. Hệ đã cho trở thành
$$\begin{cases} ab = 2 \\ a^3 - 3ab + b^3 + 7(a+b+1) = 31 \end{cases} \text{ hay}$$

$$\begin{cases} ab = 2 \\ a^3 + b^3 + 7(a+b+1) = 37 \end{cases} \quad (*)$$

Chú ý rằng: $(a+b)^3 = a^3 + b^3 - 3ab(a+b) = a^3 + b^3 - 6(a+b)$ nên từ (*) ta suy ra

$$(a+b)^3 + (a+b) - 30 = 0 \Leftrightarrow [(a+b)-3][(a+b)^2 + 3(a+b) + 10] = 0 \Leftrightarrow a+b = 3 \text{ do}$$

$$(a+b)^2 + 3(a+b) + 10 = \left(a+b + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{31}{4} > 0$$

Từ đó ta có hệ
$$\begin{cases} a+b=3 \\ ab=2 \end{cases} \Rightarrow a=2, b=1 \text{ hoặc } a=1, b=2$$

Chú ý rằng: $(a+b)^2 \geq 4ab$ với mọi số thực a, b suy ra $a=1, b=2$ không thể xảy ra.

Xét $a=2, b=1 \Rightarrow x=y=1$.

5. Phương pháp đặt ẩn phụ

Đặt ẩn phụ là việc chọn các biểu thức $f(x, y); g(x, y)$ trong hệ phương trình để đặt thành các ẩn phụ mới làm đơn giản cấu trúc của phương trình, hệ phương trình. Qua đó tạo thành các hệ phương trình mới đơn giản hơn, hay quy về các dạng hệ quen thuộc như đối xứng, đẳng cấp,...

Để tạo ẩn phụ người giải cần xử lý linh hoạt các phương trình trong hệ thông qua các kỹ thuật: Nhóm nhân tử chung, chia các phương trình theo những số hạng có sẵn, nhóm dựa

vào các hằng đẳng thức, đổi biến theo đặc thù phương trình ...

Ta quan sát các ví dụ sau:

Ví dụ

Giải các hệ phương trình sau:

$$a, \begin{cases} 2x^2 - 2xy - y^2 = 2 \\ 2x^3 - 3x^2 - 3xy^2 - y^3 + 1 = 0 \end{cases}$$

$$b, \begin{cases} x^4 - 4x^2 + y^2 - 6y + 9 = 0 \\ x^2y + x^2 + 2y - 22 = 0 \end{cases}$$

$$c, \begin{cases} (x^2 + y^2)(x + y + 1) = 25(y + 1) \\ x^2 + xy + 2y^2 + x - 8y = 9 \end{cases}$$

$$d, \begin{cases} x^2 + y^2 + 6xy - \frac{1}{(x-y)^2} + \frac{9}{8} = 0 \\ 2y - \frac{1}{x-y} + \frac{5}{4} = 0 \end{cases}$$

$$e, \begin{cases} \frac{x}{x^2 - y} + \frac{5y}{x + y^2} = 4 \\ 5x + y + \frac{x^2 - 5y^2}{xy} = 5 \end{cases}$$

$$f, \begin{cases} (xy + 3)^2 + (x + y)^2 = 8 \\ \frac{x}{x^2 + 1} + \frac{y}{y^2 + 1} = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

$$g, \begin{cases} 3xy + y + 1 = 21x \\ 9x^2y^2 + 3xy + 1 = 117x^2 \end{cases}$$

$$h, \begin{cases} 8x^3y^3 + 27 = 18y^3 \\ 4x^2y + 6x = y^2 \end{cases}$$

Lời giải

a, Ta viết lại hệ phương trình thành:

$$\begin{cases} 3x^2 - (x + y)^2 = 2 \\ 3x^3 + 3x^2y - (x + y)^3 - 3x^2 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - (x + y)^2 = 2 \\ 3x^2(x + y) - (x + y)^3 - 3x^2 = -1 \end{cases}$$

Đặt $a = 3x^2, b = x + y$ ta thu được hệ phương trình: $\Leftrightarrow \begin{cases} a - b^2 = 2 \\ ab - b^3 - a = -1 \end{cases}$

Từ phương trình (1) suy ra $a = b^2 + 2$ thay vào phương trình thứ hai của hệ ta thu được:
 $(b^2 + 2)b - b^3 - (b^2 + 2) = -1 \Leftrightarrow b^2 - 2b + 1 = 0 \Leftrightarrow b = 1 \Rightarrow a = 3$

$$\text{Khi } \begin{cases} a = 3 \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \\ x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ x = -1 \\ y = 2 \end{cases}$$

Tóm lại hệ phương trình có 2 cặp nghiệm: $(x; y) = (1; 0), (-1; 2)$

$$b, \text{ Ta viết lại hệ phương trình thành: } \begin{cases} (x^2 - 2)^2 + (y - 3)^2 = 4 \\ x^2y + x^2 + 2y - 22 = 0 \end{cases}$$

Đặt $a = x^2 - 2; b = y - 3$. Ta có hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 4 \\ (a+2)(b+3) + a + 2 + 2(b+3) = 22 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 4 \\ ab + 4(a+b) = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+b)^2 - 2ab = 4 \\ ab + 4(a+b) = 8 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a+b)^2 + 8(a+b) - 20 = 0 \\ ab + 4(a+b) = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b = 2 \\ ab = 0 \\ a+b = -10 \\ ab = 48 \end{cases} (L)$$

Xét $\begin{cases} a+b = 2 \\ ab = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2, b = 0 \\ a = 0, b = 2 \end{cases}$

+ Nếu: $a = 0, b = 2 \Rightarrow \begin{cases} x = \pm\sqrt{2} \\ y = 5 \end{cases}$

+ Nếu: $a = 2, b = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \pm 2 \\ y = 3 \end{cases}$

Tóm lại hệ có các cặp nghiệm: $(x; y) = (\sqrt{2}; 5), (-\sqrt{2}; 5), (2; 3), (-2; 3)$

c, Để ý rằng khi $y = -1$ thì hệ vô nghiệm.

Xét $y \neq -1$. Ta viết lại hệ thành:
$$\begin{cases} (x^2 + y^2)(x + y + 1) = 25(y + 1) \\ x^2 + y^2 + x(y + 1) + (y + 1)^2 = 10(y + 1) \end{cases}$$

Chia hai phương trình của hệ cho $y+1$ ta thu được:

$$\begin{cases} \frac{x^2 + y^2}{y+1}(x + y + 1) = 25 \\ x^2 + y^2 + x(y + 1) + (y + 1)^2 = 10(y + 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2 + y^2}{y+1}(x + y + 1) = 25 \\ \frac{x^2 + y^2}{y+1} + (x + y + 1) = 10 \end{cases}$$

Đặt $\frac{x^2 + y^2}{y+1} = a; x + y + 1 = b$. Ta có:

$$\begin{cases} ab = 25 \\ a + b = 10 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 5(y + 1) \\ x + y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3; y = 1 \\ x = -\frac{3}{2}; y = \frac{11}{2} \end{cases}$$

Vậy hệ có nghiệm $(x; y) = (3; 1), \left(-\frac{3}{2}; \frac{11}{2}\right)$.

d, Điều kiện: $x \neq y$.

Hệ đã cho tương đương:

$$\begin{cases} 2(x+y)^2 - (y-x)^2 - \frac{1}{(y-x)^2} + \frac{9}{8} = 0 \\ \left(y-x + \frac{1}{y-x}\right) + (x+y) + \frac{5}{4} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(x+y)^2 - \left(y-x + \frac{1}{y-x}\right)^2 + \frac{25}{8} = 0 \\ \left(y-x + \frac{1}{y-x}\right) + (x+y) + \frac{5}{4} = 0 \end{cases}$$

Đặt $x + y = a; y - x + \frac{1}{y-x} = b; |b| \geq 2$ hệ thành:

$$\begin{cases} a+b=-\frac{5}{4} \\ 2a^2-b^2=-\frac{25}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{5}{4} \\ b=-\frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y+x=\frac{5}{4} \\ y-x=-2 \\ y+x=\frac{5}{4} \\ y-x=-\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{13}{8}; y=-\frac{3}{8} \\ x=\frac{7}{8}; y=\frac{3}{8} \end{cases}$$

Vậy hệ có nghiệm $(x; y) = \left(\frac{7}{8}; \frac{3}{8}\right), \left(\frac{13}{8}; -\frac{3}{8}\right)$.

e, Điều kiện: $x, y \neq 0; x \neq -y^2; y \neq x^2$

Phương trình (2) tương đương: $y + \frac{x}{y} + 5x - \frac{5y}{x} = 5 \Leftrightarrow \frac{x+y^2}{x} + 5 \cdot \frac{x^2-y}{x} = 5$

Đặt $\frac{x^2-y}{x} = a, \frac{x+y^2}{x} = b$.

$$\text{Hệ thành: } \begin{cases} \frac{1}{a} + \frac{5}{b} = 4 \\ b + 5a = 5 \end{cases} \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}, b = \frac{5}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(x^2-y) = x \\ 2(x+y^2) = 5y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{3}{2}, y = 3 \\ x = 1, y = \frac{1}{2} \\ x = \frac{3}{2}, y = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Vậy hệ có nghiệm $(x; y) = \left(-\frac{3}{2}; 3\right), \left(1; \frac{1}{2}\right), \left(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right)$.

f, Triển khai phương trình (1)

$$(1) \Leftrightarrow x^2y^2 + 6xy + 9 + x^2 + 2xy + y^2 = 8 \Leftrightarrow x^2y^2 + x^2 + y^2 + 1 = -8xy$$

$$\Leftrightarrow (x^2+1)(y^2+1) = -8xy.$$

Nhận thấy $x=0, y=0$ không là nghiệm của hệ.

Phương trình (1) khi đó là: $\frac{x^2+1}{x} \cdot \frac{y^2+1}{y} = -8$

Đặt $\frac{x}{x^2+1} = a; \frac{y}{y^2+1} = b$. Hệ đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} a+b=-\frac{1}{4} \\ \frac{1}{ab}=-8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-\frac{1}{2} \\ b=\frac{1}{4} \\ a=\frac{1}{4} \\ b=-\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{x^2+1}=-\frac{1}{2} \\ \frac{y}{y^2+1}=\frac{1}{4} \\ \frac{x}{x^2+1}=\frac{1}{4} \\ \frac{y}{y^2+1}=-\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=2 \pm \sqrt{3} \\ x=2 \pm \sqrt{3} \\ y=-1 \end{cases}$$

Vậy hệ có nghiệm $(x; y) = (-1; 2-\sqrt{3}), (-1; 2+\sqrt{3}), (2-\sqrt{3}; -1), (2+\sqrt{3}; -1)$.

g, Xét $x=0$ thay vào hệ phương trình ta thấy không thỏa mãn, suy ra $x \neq 0$, chia 2 phương

trình của hệ lần lượt cho x, x^2 ta thu được:
$$\begin{cases} 3y + \frac{1}{x} + \frac{y}{x} = 21 \\ 9y^2 + \frac{1}{x^2} + 3\frac{y}{x} = 117 \end{cases}$$

Đặt $a = 3y + \frac{1}{x}, b = \frac{y}{x}$ ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} a + b = 21 \\ a^2 - 3b = 117 \end{cases}$$
 rút $b = 21 - a$ thay vào phương

trình thứ hai ta thu được: $a^2 - 3(21 - a) = 117 \Leftrightarrow a^2 + 3a - 180 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 12 \\ a = -15 \end{cases}$

Để ý rằng $y = 0$ không phải là nghiệm của phương trình. Chia 2 phương trình của hệ lần lượt cho y^3, y^2 ta thu được hệ:

$$\begin{cases} 8x^3 + \frac{27}{y^3} = 18 \\ 4\frac{x^2}{y} + 6\frac{x}{y^2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(2x + \frac{3}{y}\right)^3 - 3 \cdot \frac{6x}{y} \left(2x + \frac{3}{y}\right) = 18 \\ \frac{2x}{y} \left(2x + \frac{3}{y}\right) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(2x + \frac{3}{y}\right)^3 = 27 \\ \frac{2x}{y} \left(2x + \frac{3}{y}\right) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + \frac{3}{y} = 3 \\ \frac{2x}{y} = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Hay $\begin{cases} 2x + \frac{1}{2x} = 3 \\ y = 6x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 - 6x + 1 = 0 \\ y = 6x \end{cases} \Leftrightarrow (x; y) = \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{4}; \frac{9 + 3\sqrt{5}}{2}\right); \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{4}; \frac{9 - 3\sqrt{5}}{2}\right)$

6. Phương pháp đưa về hằng đẳng thức

Ví dụ: Giải các hệ phương trình sau

a.
$$\begin{cases} (3-x)\sqrt{2-x} - 2y\sqrt{2y-1} = 0 \\ \sqrt[3]{x+2} + 2\sqrt{y+2} = 5 \end{cases}$$

b.
$$\begin{cases} 2x^2y + y^3 = 2x^4 + x^6 \\ (x+2)\sqrt{y+1} = (x+1)^2 \end{cases}$$

c.
$$\begin{cases} x^5 + xy^4 = y^{10} + y^6 \\ \sqrt{4x+5} + \sqrt{y^2+8} = 6 \end{cases}$$

d.
$$\begin{cases} 2x^3 - 4x^2 + 3x - 1 = 2x^3(2-y)\sqrt{3-2y} \\ \sqrt{x+2} = \sqrt[3]{14-x}\sqrt{3-2y} + 1 \end{cases}$$

e.
$$\begin{cases} (17-3x)\sqrt{5-x} + (3y-14)\sqrt{4-y} = 0 \\ 2\sqrt{2x+y+5} + 3\sqrt{3x+2y+11} = x^2 + 6x + 13 \end{cases}$$

f.
$$\begin{cases} x\sqrt{x+y} + \sqrt{x+y} = \sqrt{2y}(\sqrt{2y^3+1}) \\ x^2y - 5x^2 + 7(x+y) - 4 = 6\sqrt[3]{xy-x+1} \end{cases}$$

Lời giải

a. Điều kiện: $x \leq 2, y \geq \frac{1}{2}$. Phương trình (1) tương đương:

$$(2-x)\sqrt{2-x} + \sqrt{2-x} = (2y-1)\sqrt{2y-1} + \sqrt{2y-1}$$

Đặt $a = \sqrt{2-x}, b = \sqrt{2y-1}$. Ta có phương trình: $a^3 + a = b^3 + b \Leftrightarrow (a-b)(a^2 + ab + b^2 + 1) = 0$.

Do $a^2 + ab + b^2 + 1 = \left(a + \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3b}{4} + 1 > 0$ suy ra phương trình cho ta

$$a = b \Rightarrow \sqrt{2y-1} = \sqrt{2-x} \Leftrightarrow x = 3-2y \Rightarrow \sqrt[3]{5-2y} + 2\sqrt{y+2} = 5$$

Đặt $a = \sqrt[3]{5-2y}; b = \sqrt{y+2}$ ta có hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} a+2b=5 \\ a^3+2b^2=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1; b=2 \\ a=\frac{-3-\sqrt{65}}{4}; b=\frac{23+\sqrt{65}}{8} \\ a=\frac{\sqrt{65}-3}{4}; b=\frac{23-\sqrt{65}}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2 \\ y=\frac{233+23\sqrt{65}}{32} \\ y=\frac{233-23\sqrt{65}}{32} \end{cases}$$

Vậy hệ có nghiệm $(x; y) = (-1; 2), \left(\frac{23\sqrt{65}-185}{16}; \frac{233-23\sqrt{65}}{32}\right), \left(-\frac{23\sqrt{65}+185}{16}; \frac{233+23\sqrt{65}}{32}\right)$

b. Điều kiện: $y \geq -1$.

Ta viết lại phương trình đầu thành:

$$y^3 - x^6 + 2x^2(y - x^2) = 0 \Leftrightarrow (y - x^2)(y^2 + x^2y + x^4 + 2x^2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ x = y = 0 \end{cases}$$

Dễ thấy $x = y = 0$ không phải là nghiệm. Khi $y = x^2$ thay vào phương trình còn lại ta được:

$$(x+2)\sqrt{x^2+1} = (x+1)^2 \Rightarrow (x+2)^2(x^2+1) = (x+1)^4 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{3}, y = 3 \\ x = -\sqrt{3}, y = 3 \end{cases} (t.m)$$

Vậy hệ có nghiệm $(x; y) = (\pm\sqrt{3}; 3)$.

c. Điều kiện: $x \geq \frac{5}{4}$.

Ta thấy $y = 0$ không là nghiệm của hệ, chia hai vế của phương trình đầu cho y^5 ta được:

$$\left(\frac{x}{y}\right)^5 + \frac{x}{y} = y^5 + y. \text{ Đặt } a = \frac{x}{y} \text{ ta có phương trình: } a^5 + a = y^5 + y \text{ suy ra}$$

$$(a-y)(a^4 + a^3y + a^2y^2 + ay^3 + 1) = 0 \Leftrightarrow y = a \Leftrightarrow x = y^2 \Leftrightarrow \sqrt{4x+5} + \sqrt{x+8} = 6 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow y = \pm 1.$$

Từ đó tính được $y = \pm 1$

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x; y) = (1; \pm 1)$.

d. Điều kiện: $x \geq -2; y \leq \frac{3}{2}$. Ta thấy khi $x = 0$ thì hệ không có nghiệm. Ta chia phương trình

(1) cho $x^2 \neq 0$:

$$(1) \Leftrightarrow 2 - \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2} - \frac{1}{x^3} = (4-2y)\sqrt{3-2y} \Leftrightarrow \left(1 - \frac{1}{x}\right)^3 + \left(1 - \frac{1}{x}\right) = (\sqrt{3-2y})^3 + \sqrt{3-2y}$$

Đặt $a = 1 - \frac{1}{x}, b = \sqrt{3-2y}$. Ta có $a^3 + a = b^3 + b \Rightarrow a = b \Leftrightarrow \sqrt{3-2y} = 1 - \frac{1}{x}$.

Thay vào phương trình còn lại ta được:

$$x + 2 - \sqrt[3]{15-x} = 1 \Leftrightarrow x + 1 = \sqrt[3]{15-x} \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 + 4x - 14 = 0. \Leftrightarrow x = 7 \Rightarrow y = \frac{111}{98}.$$

Vậy hệ có nghiệm $(x; y) = \left(7; \frac{111}{98}\right)$.

$$\text{e. Điều kiện: } \begin{cases} x \leq 5 \\ y \leq 4 \\ 2x + y + 5 \geq 0 \\ 3x + 2y + 11 \geq 0 \end{cases}$$

Biến đổi phương trình đầu ta có: $[3(5-x)+2]\sqrt{5-x} = [3(4-y)+2]\sqrt{4-y}$

Đặt $a = \sqrt{5-x}, b = \sqrt{4-y}$ ta có

$$3a^2 + 2a = 3b^2 + 2b \Leftrightarrow (a-b)(3a^2 + 3ab + 3b^2 + 2) = 0 \Leftrightarrow a = b \Leftrightarrow \sqrt{5-x} = \sqrt{4-y} \Leftrightarrow y = x-1$$

Thay vào phương trình còn lại ta có: $x^2 + 6x + 13 = 2\sqrt{3x+4} + 3\sqrt{5x+9}$ (4)

Điều kiện xác định của phương trình (4) là: $x \geq \frac{-4}{3}$

(4)

$$\Leftrightarrow x^2 + x + 2(x+2-\sqrt{3x+4}) + 3(x+3-\sqrt{5x+9}) = 0 \Leftrightarrow x^2 + x + \frac{2(x^2+x)}{x+2+\sqrt{3x+4}} + \frac{3(x^2+x)}{x+3+\sqrt{5x+9}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x = 0 \\ 1 + \frac{2}{x+2+\sqrt{3x+4}} + \frac{3}{x+3+\sqrt{5x+9}} = 0 \end{cases}$$

$$(*) \quad x^2 + x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = -1 \\ x = -1 \Rightarrow y = -2 \end{cases}$$

Ta có $x^2 + x + \frac{2(x^2+x)}{x+2+\sqrt{3x+4}} + \frac{3(x^2+x)}{x+3+\sqrt{5x+9}} > 0$ do điều kiện $x \geq \frac{-4}{3}$

Kết luận: $(x; y) = (0; -1), (-1; -2)$

f. Điều kiện: $y \geq 0, x+y \geq 0$.

Nhận thấy $y = 0$ thì hệ vô nghiệm. Ta xét khi $y > 0$

Từ phương trình đầu ta sử dụng phương pháp liên hợp:

$$PT(1) \Leftrightarrow x^2 + xy - 2y^2 = \sqrt{2y} - \sqrt{x+y} \Leftrightarrow (x-y)(x+2y) = \frac{-(x-y)}{\sqrt{2y} + \sqrt{x+y}}$$

Rõ ràng $x+2y = x+y+y > 0$; $\frac{-1}{\sqrt{2y} + \sqrt{x+y}} < 0$, từ đó suy ra $x = y$

Thay vào pt còn lại ta được:

$$x^3 - 5x^2 + 14x - 4 = 6\sqrt[3]{x^2 - x + 1} \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 + 6x + 4 = 8x^2 - 8x + 8 + 3\sqrt[3]{8x^2 - 8x + 8}$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^3 + 3(x+1) = 8x^2 - 8x + 8 + 3\sqrt[3]{8x^2 - 8x + 8}$$

Đặt $a = x+1, b = \sqrt[3]{8x^2 - 8x + 8} \Rightarrow a^3 + 3a = b^3 + 3b \Leftrightarrow (a-b)(a^2 + ab + b^2 + 3) = 0 \Leftrightarrow a = b$

$$\Leftrightarrow x+1 = \sqrt[3]{8x^2 - 8x + 8} \Leftrightarrow x = 1; y = 1.$$

Vậy hệ có nghiệm $(x; y) = (1; 1)$.

7. Khi trong hệ có chứa phương trình bậc hai theo ẩn x, hoặc y

Khi trong hệ phương trình có chứa phương trình bậc hai theo ẩn x hoặc y ta có thể nghĩ đến hướng xử lý như sau:

- Nếu Δ chẵn, ta giải x theo y rồi thế vào phương trình còn lại của hệ để giải tiếp
- Nếu Δ không chẵn ta thường xử lý theo cách:
 - + Cộng hoặc trừ các phương trình của hệ để tạo được phương trình bậc hai có Δ chẵn hoặc tạo thành các hằng đẳng thức
 - + Dùng điều kiện $\Delta \geq 0$ để tìm miền giá trị của biến x, y. Sau đó đánh giá phương trình còn lại trên miền giá trị x, y vừa tìm được.

Ta xét các ví dụ sau:

Ví dụ: Giải các hệ phương trình sau:

$$\begin{aligned} \text{a. } & \begin{cases} xy + x + y = x^2 - 2y^2 & (1) \\ x\sqrt{2y} - y\sqrt{x-1} = 2x - 2y & (2) \end{cases} \\ \text{b. } & \begin{cases} 2x^2 + y^2 - 3xy + 3x - 2y + 1 = 0 & (1) \\ 4x^2 - y^2 + x + 4 = \sqrt{2x+y} + \sqrt{x+4y} & (2) \end{cases} \end{aligned}$$

Lời giải

a. Xét phương trình (1) của hệ ta có:

$xy + x + y = x^2 - 2y^2 \Leftrightarrow x^2 - x(y+1) - 2y^2 - y = 0$. Ta coi đây là phương trình bậc 2 ẩn x thì ta có: $\Delta = (y+1)^2 + 8y^2 + 4y = (3y+1)^2$. Từ đó suy ra:

$$\begin{cases} x = \frac{y+1-(3y+1)}{2} = -y \\ y = \frac{y+1+(3y+1)}{2} = 2y+1 \end{cases}$$

Trường hợp 1: $x = -y$. Từ phương trình (2) của hệ ta có điều kiện: $\begin{cases} x \geq 1 \\ y \geq 0 \end{cases}$ suy ra phương trình vô nghiệm.

Trường hợp 2: $x = 2y+1$ thay vào phương trình thứ hai ta có:

$$(2y+1)\sqrt{2y} - y\sqrt{2y} = 2y+2 \Leftrightarrow y\sqrt{2y} + \sqrt{2y} = 2(y+1) \Leftrightarrow (y+1)(\sqrt{2y}-2) = 0 \Leftrightarrow y = 2 \Rightarrow x = 5$$

Vậy hệ có một cặp nghiệm: $(x; y) = (5; 2)$

b. Xét phương trình (1) của hệ ta có:

$$2x^2 + y^2 - 3xy + 3x - 2y + 1 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + x(3-3y) + y^2 - 2y + 1 = 0.$$

Coi đây là phương trình bậc hai của x ta có:

$$\Delta = (3-3y)^2 - 8(y^2 - 2y + 1) = y^2 - 2y + 1 = (y-1)^2 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3y-3-(y-1)}{4} = \frac{y-1}{2} \\ x = \frac{3y-3+(y-1)}{4} = y-1 \end{cases}$$

Trường hợp 1: $y = x+1$ thay vào phương trình (2) ta được:

$$3x^2 - x + 3 = \sqrt{3x+1} + \sqrt{5x+4} \Leftrightarrow 3x^2 - 3x + (x+1 - \sqrt{3x+1}) + (x+2 - \sqrt{5x+4}) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - x) \left[3 + \frac{1}{x+1+\sqrt{3x+1}} + \frac{1}{x+2+\sqrt{5x+4}} \right] = 0$$

$$\text{Do } x \geq -\frac{1}{3} \text{ nên } 3 + \frac{1}{x+1+\sqrt{3x+1}} + \frac{1}{x+2+\sqrt{5x+4}} > 0 \Rightarrow x^2 - x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

Trường hợp 2: $y = 2x+1$ thay vào phương trình (2) ta được:

$$3 - 3x = \sqrt{4x+1} + \sqrt{5x+4} \Leftrightarrow \sqrt{4x+1} + \sqrt{5x+4} + 3x - 3 = 0$$

Giải tương tự như trên ta được $x = 0$.

Kết luận: Hệ phương trình có 2 nghiệm: $(x; y) = (0; 1), (1; 2)$

8. Phương pháp đánh giá

Để giải được hệ phương trình bằng phương pháp đánh giá ta cần nắm chắc các bất đẳng thức cơ bản như: Cauchy, Bunhiacopxki, các phép biến đổi trung gian giữa các bất đẳng thức, qua đó để đánh giá tìm ra quan hệ giữa x và y .

Ngoài ra ta cũng có thể dùng hàm số để tìm GTLN, GTNN từ đó có hướng đánh giá, so sánh phù hợp.

Ví dụ: Giải các hệ phương trình sau:

$$\text{a. } \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{1+2x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+2y^2}} = \frac{2}{\sqrt{1+2xy}} \\ \sqrt{x(1-2x)} + \sqrt{y(1-2y)} = \frac{2}{9} \end{cases}$$

$$\text{b. } \begin{cases} x(x^2 - y^2) + x^2 = 2\sqrt{(x - y^2)^3} \\ 76x^2 - 20y^2 + 2 = \sqrt[3]{4x(8x+1)} \end{cases}$$

Lời giải

a. Điều kiện: $0 \leq x, y \leq \frac{1}{2}$.

Đặt $a = \sqrt{2}x, b = \sqrt{2}y; a, b \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$. Ta có: $VT = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+b^2}} \leq \sqrt{2\left(\frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2}\right)}$.

Ta sử dụng bổ đề với $a, b > 0$ và $ab \leq 1$ ta có bất đẳng thức:

$$\frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} \leq \frac{2}{1+ab} \Leftrightarrow \frac{(a-b)^2(ab-1)}{(1+ab)(1+a^2)(1+b^2)} \leq 0 \text{ (đúng)}.$$

Vậy $VT \leq \frac{2}{\sqrt{1+ab}} = VP$.

Đẳng thức xảy ra khi $x = y$. Thay vào (2) ta tìm được nghiệm của phương trình.

$$\text{Nghiệm của hệ } (x; y) = \left(\frac{9-\sqrt{73}}{36}; \frac{9-\sqrt{73}}{36}\right), \left(\frac{9+\sqrt{73}}{36}; \frac{9+\sqrt{73}}{36}\right)$$

b) Điều kiện: $x \geq y^2 \geq 0$

Phương trình (1) tương đương: $x^3 + x(x-y^2) - 2\sqrt{(x-y^2)^3} = 0$

Đặt $\sqrt{x-y^2} = u$ phương trình (1) trở thành:

$$x^3 + xu^2 - 2u^3 = 0 \Leftrightarrow x = u \Leftrightarrow y^2 = x - x^2.$$

Thay vào (2) ta được: $96x^2 - 20x + 2 = \sqrt[3]{32x^2 + 4x}$.

$$\text{Ta có } 96x^2 - 20x + 2 = \sqrt[3]{32x^2 + 4x} = \sqrt[3]{1.1.(32x^2 + 4x)} \leq \frac{32x^2 + 4x + 2}{3}$$

$$\Leftrightarrow 3(96x^2 - 20x + 2) \leq 32x^2 + 4x + 2 \Leftrightarrow (16x - 2)^2 \leq 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{8} \Rightarrow y = \pm \frac{\sqrt{7}}{8}$$

Vậy hệ có nghiệm $(x; y) = \left(\frac{1}{8}; \pm \frac{\sqrt{7}}{8}\right)$.

Ví dụ 2

Giải các hệ phương trình sau:

$$\text{a) } \begin{cases} x + \frac{2xy}{\sqrt[3]{x^2 - 2x + 9}} = x^2 + y \quad (1) \\ y + \frac{2xy}{\sqrt[3]{y^2 - 2y + 9}} = y^2 + x \quad (1) \end{cases} \text{ với } x, y \geq 0$$

$$\text{b) } \begin{cases} 3x + 10\sqrt{xy} - y = 12 \\ x + \frac{6(x^3 + y^3)}{x^2 + xy + y^2} - \sqrt{2(x^2 + y^2)} \leq 3 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{2}} + \sqrt{\frac{x^2 + xy + y^2}{3}} = x + y \\ x\sqrt{2xy + 5x + 3} = 4xy - 5x - 3 \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt[4]{32 - x} - y^2 + 3 = 0 \\ \sqrt[4]{x} + \sqrt{32 - x} + 6y - 24 = 0 \end{cases}$$

$$e) \begin{cases} x^3 + y^3 + 7(x+y)xy = 8xy\sqrt{2(x^2 + y^2)} \\ \sqrt{y} - \sqrt{2x-3} = 6-2x \end{cases}$$

Lời giải:

a) Hiển nhiên $x=y=0$ là một nghiệm của hệ. Ta xét $x \neq 0$ và $y \neq 0$. Cộng theo vế hai phương

trình trong hệ ta được $2xy \left(\frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2+8}} + \frac{1}{\sqrt[3]{(y-1)^2+8}} \right) = x^2 + y^2$

Chú ý rằng: $\frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2+8}} \leq \frac{1}{2}; \frac{1}{\sqrt[3]{(y-1)^2+8}} \leq \frac{1}{2}$

Với $xy > 0$ ta có $2xy \left(\frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2+8}} + \frac{1}{\sqrt[3]{(y-1)^2+8}} \right) \leq 2xy \leq x^2 + y^2$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=1$. Với $xy < 0$. Khả năng này không thể xảy ra. Thật vậy, không làm mất tính tổng quát giả sử $x < 0, y < 0$ thì rõ ràng đẳng thức (1) không thể xảy ra. Vậy hệ có hai nghiệm $(x;y)$ là $(0;0), (1;1)$.

b) Theo bất đẳng thức AM – GM ta có:

$$\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2} \Rightarrow 12 = 3x + 10\sqrt{xy} - y \leq 3x + 5x + 5y - y = 8x + 4y \Rightarrow 2x + y \geq 3$$

Ta sẽ chứng minh:

$$x + \frac{6(x^3 + y^3)}{x^2 + xy + y^2} - 2\sqrt{(x^2 + y^2)} \geq 2x + y \Leftrightarrow \frac{6(x^3 + y^3)}{x^2 + xy + y^2} \geq \sqrt{2(x^2 + y^2)} + x + y \quad (*)$$

Ta có: $x + y \leq \sqrt{2(x^2 + y^2)}$. Để chứng minh (*) ta sẽ chứng minh bất đẳng thức mạnh hơn là:

$$\begin{aligned} \frac{6(x^3 + y^3)}{x^2 + y^2 + \frac{x^2 + y^2}{2}} &\geq 2\sqrt{2(x^2 + y^2)} \Leftrightarrow 2(x^3 + y^3) \geq (x^2 + y^2)\sqrt{2(x^2 + y^2)} \\ \Leftrightarrow x^6 + y^6 + 4x^3y^3 - 3x^2y^2(x^2 + y^2) &\geq 0 \quad (2) \end{aligned}$$

Vì $y > 0$ chia hai vế cho y^6 đặt $t = \frac{x}{y} > 0$ bất đẳng thức (2) trở thành:

$$t^6 - 3t^4 + 4t^3 - 3t^2 + 1 \geq 0$$

Nhưng bất đẳng thức này hiển nhiên đúng do:

$$t^6 - 3t^4 + 4t^3 - 3t^2 + 1 = (t-1)^2(t^4 + 2t^3 + 2t + 1)$$

$$\Rightarrow x + \frac{6(x^3 + y^3)}{x^2 + xy + y^2} - 2\sqrt{(x^2 + y^2)} \geq 3$$

Kết hợp tất cả các vấn đề vừa chỉ ra ta thấy có bộ số $x; y$ thỏa mãn điều kiện

$$\begin{cases} x, y > 0 \\ 2x + y = 3 \Leftrightarrow x = y = 1 \text{ là nghiệm của hệ} \\ x = y \end{cases}$$

$$\text{Ta có } \frac{x^2 + y^2}{2} = \frac{(x+y)^2}{4} + \frac{(x-y)^2}{4} \geq \frac{(x+y)^2}{4} \Rightarrow \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{2}} \geq \frac{|x+y|}{2}$$

$$\frac{x^2 + xy + y^2}{3} = \frac{(x+y)^2}{4} + \frac{(x-y)^2}{12} \geq \frac{(x+y)^2}{4} \Rightarrow \sqrt{\frac{x^2 + xy + y^2}{3}} \geq \frac{|x+y|}{2}$$

Từ đó suy ra $\sqrt{\frac{x^2 + y^2}{2}} + \sqrt{\frac{x^2 + xy + y^2}{3}} \geq |x+y| \geq x+y$

Dấu (=) xảy ra khi và chỉ khi $x=y \geq 0$

Thay $x=y$ vào phương trình còn lại ta có : $x \sqrt{2x^2 + 5x + 3} = 4x^2 - 5x - 3$

Đề ý rằng $x=0$ không phải là nghiệm. Ta xét $x > 0$, chia phương trình cho x^2 thì thu được:

$$\sqrt{2 + \frac{5}{x} + \frac{3}{x^2}} = 4 - \left(\frac{5}{x} + \frac{3}{x^2}\right). \text{ Đặt } t = \sqrt{2 + \frac{5}{x} + \frac{3}{x^2}} > 0 \text{ ta có phương trình:}$$

$$t^2 + t - 6 = 0 \Leftrightarrow t = 2 \Leftrightarrow 2 + \frac{5}{x} + \frac{3}{x^2} = 4 \Leftrightarrow \frac{3}{x^2} + \frac{5}{x} - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 3$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y) = (3;3)$

d) Điều kiện : $\begin{cases} 0 \leq x \leq 32 \\ y \leq 4 \end{cases}$

Cộng hai phương trình vế với vế ta có:

$$\sqrt{x} + \sqrt{32-x} + \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{32-x} = y^2 - 6y + 21 \quad (*)$$

Ta có: $y^2 - 6y + 21 = (y-3)^2 + 12 \geq 12$

Mặt khác theo bất đẳng thức Bunhiacopxki ta có:

$$\sqrt{x} + \sqrt{32-x} \leq \sqrt{(1+1)(x+32-x)} = 8$$

$$\Rightarrow \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{32-x} \leq \sqrt{(1+1)(\sqrt{x} + \sqrt{32-x})} = 4$$

Vậy $\sqrt{x} + \sqrt{32-x} + \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{32-x} \leq 12$. Từ đó suy ra hệ có nghiệm khi và chỉ khi x,y thỏa mãn:

$$\begin{cases} \sqrt{x} = \sqrt{32-x} \\ \sqrt[4]{x} = \sqrt[4]{32-x} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 16 \\ y = 3 \end{cases} \\ y - 3 = 0 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có 1 nghiệm duy nhất $(x;y) = (16; 3)$

c) Từ phương trình 2 của hệ ta suy ra $x,y \geq 0$. Xét phương trình :

$$x^3 + y^3 + 7(x+y)xy = 8xy\sqrt{2(x^2 + y^2)}$$

Ta có: $x^3 + y^3 + 7(x+y)xy = (x+y)(x^2 + y^2 + 6xy) = (x+y)[(x+y)^2 + 4xy]$

Theo bất đẳng thức Cô si ta có : $(x+y)^2 + 4xy \geq 2\sqrt{(x+y)^2 \cdot 4xy}$

Suy ra $x^3 + y^3 + 7(x+y)xy \geq 4\sqrt{xy}(x+y)\sqrt{(x+y)^2} = 4\sqrt{xy}(x+y)^2$. Ta có:

$$(x+y)^2 = (x^2 + y^2) + 2xy \geq 2\sqrt{(x^2 + y^2) \cdot 2xy}. \text{ Suy ra } x^3 + y^3 + 7(x+y)xy \geq 8xy\sqrt{2(x^2 + y^2)}$$

Dấu (=) xảy ra khi $x=y$. Thay vào phương trình (2) ta thu được:

$$\sqrt{x} - \sqrt{2x-3} = 6-2x \Leftrightarrow \sqrt{2x-3} - \sqrt{x} = 2(x-3) \Leftrightarrow \frac{(x-3)}{\sqrt{2x-3} + \sqrt{x}} = 2(x-3) \text{ Suy ra } x = 3 \text{ hoặc}$$

$$\sqrt{2x-3} + \sqrt{x} = \frac{1}{2} \text{ Do } x \geq \frac{3}{2} \text{ nên phương trình này vô nghiệm.}$$

Tóm lại: Hệ có nghiệm: $x = y = 3$

CHỦ ĐỀ 4: LỜI GIẢI BÀI TOÁN BẰNG CÁCH LẬP PHƯƠNG TRÌNH, HỆ PHƯƠNG TRÌNH.

Để giải bài toán bằng cách lập phương trình, hệ phương trình ta thường thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Chọn ẩn số (nêu đơn vị của ẩn và đặt điều kiện nếu cần).

Bước 2: Tính các đại lượng trong bài toán theo giả thiết và ẩn số, từ đó lập phương trình hoặc hệ phương trình.

Bước 3: Giải hệ phương trình hoặc hệ phương trình vừa lập được

Bước 4: Đối chiếu với điều kiện và trả lời.

I. CÁC BÀI TOÁN CHUYỂN ĐỘNG

KIẾN THỨC CẦN NHỚ

+ Quãng đường = Vận tốc x thời gian

+ Vận tốc tỷ lệ nghịch với thời gian và tỉ lệ thuận với quãng đường đi được.

+ Nếu hai xe đi ngược chiều nhau khi gặp nhau lần đầu: Thời gian hai xe đi ngược là như nhau. Tổng quãng đường hai xe đi được bằng đúng quãng đường cần đi của hai xe.

+ Nếu hai phương tiện chuyển động cùng chiều từ hai địa điểm khác nhau là A và B, xe từ A chuyển động nhanh hơn xe từ B thì khi xe từ A đuổi kịp xe từ B ta luôn có hiệu quãng đường đi được của xe từ A với quãng đường đi được của xe từ B bằng quãng đường AB.

+ Đối với (ca nô, tàu xuồng) chuyển động trên dòng nước ta cần chú ý:

Khi đi xuôi dòng: Vận tốc ca nô = Vận tốc riêng + Vận tốc dòng nước

Khi đi ngược dòng: Vận tốc ca nô = Vận tốc riêng - Vận tốc dòng nước

Vận tốc của dòng nước là vận tốc của một vật trôi tự nhiên theo dòng nước (Vận tốc riêng của vật đó bằng 0)

Ví dụ 1

Một người đi xe đạp từ A đến B cách nhau 24 km. Khi đi từ B trở về A người đó tăng vận tốc thêm 4 km/h so với lúc đi, nên thời gian về ít hơn thời gian đi là 30 phút. Tính vận tốc của xe đạp khi đi từ A đến B.

Lời giải

Đổi 30 phút = $\frac{1}{2}$ giờ.

Gọi vận tốc của xe đạp khi đi từ A đến B là x (km/h, $x > 0$). Thời gian xe đi từ A đến B là $\frac{24}{x}$ (giờ).

Đi từ B về A người đó đi với vận tốc $x+4$ (km/h). Thời gian xe đi từ B về A là $\frac{24}{x+4}$ (giờ).

Do thời gian về ít hơn thời gian đi là 30 phút nên ta có phương trình:

$$\frac{24}{x} - \frac{24}{x+4} = \frac{1}{2}. \text{ Giải phương trình: } \frac{24}{x} - \frac{24}{x+4} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x^2 + 4x - 192 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 12 \\ x = -16 \end{cases}$$

Đối chiếu với điều kiện ta có vận tốc của xe đạp đi từ A đến B là 12 km/h.

Ví dụ 2

Quảng đường AB dài 120 km. Lúc 7h sáng một xe máy đi từ A đến B. Đi được $\frac{3}{4}$ xe bị hỏng phải dừng lại 10 phút để sửa rồi đi tiếp với vận tốc kém vận tốc lúc đầu 10km/h. Biết xe máy

đến B lúc 11h40 phút trưa cùng ngày. Giả sử vận tốc xe máy trên $\frac{3}{4}$ quãng đường đầu không đổi và vận tốc xe máy trên $\frac{1}{4}$ quãng đường sau cũng không đổi. Hỏi xe máy bị hỏng lúc mấy giờ?

(trích đề tuyển sinh chuyên lớp 10 trường chuyên ĐHSPT Hà Nội năm 2015)

Lời giải

Gọi vận tốc trên $\frac{3}{4}$ quãng đường ban đầu là x (km/h), điều kiện: $x > 10$

Thì vận tốc trên $\frac{1}{4}$ quãng đường sau là $x - 10$ (km/h)

Thời gian trên $\frac{3}{4}$ quãng đường ban đầu là $\frac{90}{x}$ (h)

Thời gian trên $\frac{1}{4}$ quãng đường sau là: $\frac{30}{x-10}$ (h)

Thời gian đi cả hai quãng đường là: 11 giờ 40 phút – 7 giờ - 10 phút = $\frac{9}{2}$ giờ.

Nên ta có phương trình: $\frac{90}{x} + \frac{30}{x-10} = \frac{9}{2}$

Giải phương trình ta được $x = 30$ thỏa mãn điều kiện

Do đó thời gian đi trên $\frac{3}{4}$ quãng đường ban đầu $\frac{90}{30} = 3$ (giờ)

Vậy xe hỏng lúc 10 giờ.

Ví dụ 3

Một ca nô xuôi dòng 78 km và ngược dòng 44 km mất 5 giờ với vận tốc dự định. Nếu ca nô xuôi 13 km và ngược dòng 11 km với cùng vận tốc dự định đó thì mất 1 giờ. Tính vận tốc riêng của ca nô và vận tốc dòng nước.

Lời giải

Gọi vận tốc riêng của ca nô là x (km/h, $x > 0$)

Và vận tốc của dòng nước là y (km/h, $y > 0$)

Ca nô xuôi dòng đi với vận tốc $x + y$ (km/h). Đi đoạn đường 78 km nên thời gian đi là $\frac{78}{x+y}$ (giờ)

Ca nô đi ngược dòng với vận tốc $x - y$ (km/h). Đi đoạn đường 44 km nên thời gian đi là $\frac{44}{x-y}$ (giờ)

Tổng thời gian xuôi dòng là 78 km và ngược dòng là 44 km mất 5 giờ nên ta có phương trình: $\frac{78}{x+y} + \frac{44}{x-y} = 5$ (1)

Ca nô xuôi dòng 13 km và ngược dòng 11 km nên ta có phương trình: $\frac{13}{x+y} + \frac{11}{x-y} = 1$ (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} \frac{78}{x+y} + \frac{44}{x-y} = 5 \\ \frac{13}{x+y} + \frac{11}{x-y} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=26 \\ x-y=22 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=24 \\ y=2 \end{cases}$$

Đối chiếu với điều kiện ta thấy thỏa mãn.

Vận tốc riêng của ca nô là 24 km/h và vận tốc của dòng nước là 2 km/h.

Ví dụ 4

Một ô tô đi từ A đến B với vận tốc dự định trong một thời gian dự định. Nếu ô tô tăng vận tốc thêm 3 km/h thì thời gian ít ngắn được 2 giờ so với dự định. Nếu ô tô giảm vận tốc đi 3 km/h thì thời gian đi tăng hơn 3 giờ so với dự định. Tính độ dài quãng đường AB.

Lời giải

Gọi vận tốc dự định của ô tô là x (km/h, $x > 3$) và thời gian dự định đi từ A đến B là y (giờ, $y > 2$). Khi đó quãng đường từ A đến B dài xy (km).

Nếu ô tô tăng vận tốc thêm 3 km/h thì vận tốc lúc đó là $x+3$ (km/h), khi đó thời gian đi sẽ là: $y-2$ (giờ).

Ta có phương trình: $(x+3)(y-2) = xy$ (1)

Tương tự nếu ô tô giảm vận tốc đi 3 km/h thì thời gian tăng 3 giờ nên ta có phương trình: $(x-3)(y+3) = xy$ (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình
$$\begin{cases} (x+3)(y-2) = xy \\ (x-3)(y+3) = xy \end{cases}$$

Giải hệ ta được $\begin{cases} x=15 \\ y=12 \end{cases}$. Đối chiếu với điều kiện ta thấy thỏa mãn.

Vậy quãng đường AB dài là: $12 \cdot 15 = 180$ (km).

Chú ý: Trong bài toán này, vì các dữ kiện liên quan trực tiếp tới sự thay đổi của vận tốc và thời gian nên ta chọn là ẩn và giải như trên. Nếu đặt độ dài quãng đường và vận tốc dự định là ẩn số ta cũng lập được hệ hai phương trình hai ẩn và vẫn giải được bài toán, tuy nhiên sẽ khó khăn hơn.

II. BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN NĂNG SUẤT LAO ĐỘNG, CÔNG VIỆC

Ta cần chú ý: khi giải các bài toán liên quan đến năng suất thì liên hệ giữa ba đại lượng là:

Khối lượng công việc = năng suất lao động + thời gian.

Ví dụ 1

Một công ty dự định điều động một số xe để chuyển 180 tấn hàng từ cảng Dung Quốc vào Thành phố Hồ Chí Minh, mỗi xe chở khối lượng hàng bằng nhau. Nhưng do nhu cầu thực tế cần chuyển thêm 28 tấn hàng nên công ty đó phải điều động thêm một chiếc xe cùng loại và mỗi xe bây giờ phải chở thêm 1 tấn hàng mới đáp ứng được nhu cầu đặt ra. Hỏi theo dự định công ty đó cần điều động bao nhiêu xe? Biết rằng mỗi xe không chở quá 15 tấn.

(trích đề tuyển sinh vào lớp 10, tỉnh Quảng Ngãi 2015)

Lời giải

Gọi x (tấn) là số tấn hàng trong thực tế mà mỗi xe phải chở (ĐK: $1 < x \leq 15, x \in \mathbb{N}$)

$\Rightarrow x-1$ là số tấn hàng mỗi xe phải chở theo dự định.

Số xe thực tế phải điều động là: $\frac{180+28}{x}$ (xe)

Số xe cần điều động theo dự định là: $\frac{180}{x-1}$ (xe)

Vì vậy số xe thực tế nhiều hơn dự định là 1 xe nên ta có phương trình:

$$\frac{208}{x} - \frac{180}{x-1} = 1 \Leftrightarrow 208x - 208 - 180x = x^2 - x \Leftrightarrow x^2 - 29x + 208 = 0$$

$\Rightarrow x_1 = 13$ (tm) hoặc $x_2 = 16$ (loại vì $x \leq 15$)

Vậy theo dự định cần điều động: $\frac{180}{x-1} = \frac{180}{13-1} = 15$ (xe).

Ví dụ 2

Hưởng ứng phong trào “Vì biển đảo Trường Sa”, một đội tàu dự định chở 280 tấn hàng ra đảo. Nhưng khi chuẩn bị khởi hành thì số hàng hóa đã tăng thêm 6 tấn so với dự định, vì vậy đội tàu phải bổ sung thêm 1 tàu và mỗi tàu chở ít hơn dự định 2 tấn hàng. Hỏi khi dự định đội tàu có bao nhiêu chiếc tàu, biết các tàu chở số tấn hàng bằng nhau.

(trích đề tuyển sinh vào lớp 10, tỉnh Bà Rịa Vũng Tàu, năm 2015)

Lời giải

Gọi x (chiếc) là số tàu dự định của đội ($x \in \mathbb{N}^*, x < 140$)

Số tàu tham gia vận chuyển là $x+1$ (chiếc)

Số tấn hàng trên mỗi chiếc theo dự định $\frac{280}{x}$ (tấn)

Số tấn hàng trên mỗi chiếc thực tế $\frac{286}{x+1}$ (tấn)

Theo bài ra ta có phương trình:

$$\frac{280}{x} - \frac{286}{x+1} = 2 \Leftrightarrow 280(x+1) - 280x = 2x(x+1) \Leftrightarrow x^2 + 4x - 140 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 \\ x = -14(L) \end{cases}$$

Vậy đội tàu lúc đầu có 10 chiếc tàu

Ví dụ 3

Một công nhân theo kế hoạch phải làm 85 sản phẩm trong một khoảng thời gian dự định. Nhưng do yêu cầu đột xuất, người công nhân đó phải làm 96 sản phẩm. Do người công nhân mỗi giờ đã làm tăng thêm 3 sản phẩm nên người đó đã hoàn thành công việc sớm hơn 7 so với thời gian dự định là 20 phút. Tính xem theo dự định mỗi giờ người đó phải là bao nhiêu sản phẩm, biết rằng mỗi giờ chỉ làm được không quá 20 sản phẩm.

Lời giải

Gọi số sản phẩm công nhân dự định làm trong một giờ là x ($0 < x \leq 20$).

Thời gian dự kiến người đó làm xong 85 sản phẩm là $\frac{85}{x}$ (giờ)

Thực tế mỗi giờ làm tăng thêm 3 sản phẩm nên số sản phẩm làm được của mỗi giờ là $x+3$.

Do đó 96 sản phẩm làm được trong $\frac{96}{x+3}$ (giờ)

Thời gian hoàn thành công việc thực tế sớm hơn so với dự định là 20 phút $= \frac{1}{3}$ giờ nên ta có

phương trình $\frac{85}{x} - \frac{96}{x+3} = \frac{1}{3}$

Giải phương trình ta được $x=15$ hoặc $x=-51$

Đối chiếu điều kiện ta loại nghiệm $x=-51$

Theo dự định mỗi giờ người đó phải làm 15 sản phẩm

Ví dụ 4

Để hoàn thành một công việc, nếu hai tổ cùng làm chung thì mất hết 6 giờ. Sau 2 giờ làm chung thì tổ hai được điều đi làm việc khác, tổ một tiếp tục làm và đã hoàn thành công việc còn lại trong 10 giờ. Hỏi nếu làm riêng thì mỗi tổ sẽ hoàn thành công việc này trong thời gian bao nhiêu?

Lời giải

Gọi thời gian tổ một làm riêng và hoàn thành công việc là x (giờ, $x > 6$)

Gọi thời gian tổ hai làm riêng và hoàn thành công việc là y (giờ, $y > 6$)

Mỗi giờ tổ một làm được $\frac{1}{x}$ (phần công việc)

Mỗi giờ tổ hai làm được $\frac{1}{y}$ (phần công việc)

Biết hai tổ làm chung trong 6 giờ thì hoàn thành được công việc nên ta có phương trình:

$\frac{6}{x} + \frac{6}{y} = 1$ (1). Thực tế để hoàn thành công việc này thì hai tổ làm trong 2 giờ và tổ một làm

trong $2+10=12$ (giờ), ta có phương trình: $\frac{12}{x} + \frac{2}{y} = 1$ (2).

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} \frac{6}{x} + \frac{6}{y} = 1 \\ \frac{12}{x} + \frac{2}{y} = 1 \end{cases}$$
. Giải hệ ta được: $\begin{cases} x = 15 \\ y = 10 \end{cases}$ thỏa mãn điều kiện.

Nếu làm riêng thì tổ một hoàn thành công việc trong 15 giờ và tổ 2 hoàn thành công việc trong 10 giờ.

Nhận xét: Bài toán hai người (hai đội) cùng làm chung – làm riêng để hoàn thành một công việc có hai đại lượng chính là năng suất của mỗi người (hoặc mỗi đội). Ta coi toàn bộ khối lượng công việc cần thực hiện là 1.

+ năng suất công việc = 1: thời gian.

+ Năng suất chung = Tổng năng suất riêng.

Chú ý:

Trong bài toán trên có thể thay điều kiện $x > 6$ bằng điều kiện $x > 10$ hoặc thậm chí là $x > 12$

.Có thể thay phương trình (2) bằng phương trình $\frac{10}{x} = \frac{2}{3}$ vì phần việc còn lại riêng tổ một làm

là $\frac{2}{3}$, ta có ngay $x = 15$.

Ví dụ 5

Cho một bể cạn (không có nước). Nếu hai vòi nước cùng được mở để chảy vào bể này thì sẽ đầy bể sau 4 giờ 48 phút. Nếu mở riêng từng vòi chảy vào bể thì thời gian vòi một chảy đầy bể sẽ ít hơn thời gian vòi hai chảy đầy bể là 4 giờ. Hỏi mỗi vòi chảy một mình thì sau bao lâu sẽ đầy bể?

Lời giải

Đổi 4 giờ 48 phút = $4\frac{4}{5}$ giờ = $\frac{24}{5}$ giờ

Cách 1: Lập hệ phương trình

Gọi thời gian vòi một chảy một mình đầy bể trong x (giờ, $x > \frac{24}{5}$)

Gọi thời gian vòi hai chảy một mình đầy bể trong y (giờ, $x > \frac{24}{5}$)

Biết hai vòi cùng chảy thì sau $\frac{24}{5}$ giờ thì đầy bể nên ta có phương trình: $\frac{24}{5x} + \frac{24}{5y} = 1$ (1)

Nếu chảy riêng thì vòi một chảy đầy bể nhanh hơn vòi hai là 4 giờ nên ta có phương trình: $x = y - 4$ (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình
$$\begin{cases} \frac{24}{5x} + \frac{24}{5y} = 1 \\ x = y - 4 \end{cases}$$

Giải hệ trên ta được: $\begin{cases} x = 8 \\ y = 12 \end{cases}$ (thỏa mãn điều kiện)

Vậy vòi một chảy một mình trong 8 giờ thì đầy bể và vòi hai chảy một mình trong 12 giờ thì đầy bể.

Cách 2: Lập phương trình

Gọi thời gian vòi 1 chảy một mình đầy bể là x (giờ, $x > \frac{24}{5}$)

Khi đó trong một giờ vòi 1 chảy được: $\frac{1}{x}$ (phần bể)

Vòi hai chảy một mình đầy bể trong $x + 4$ (giờ) nên trong một giờ chảy được: $\frac{1}{x+4}$ (phần bể)

Tổng cộng trong một giờ hai vòi chảy được $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+4}$ (phần bể) (3)

Sau 4 giờ 48 phút $= \frac{24}{5}$ giờ hai vòi cùng chảy thì đầy bể nên trong một giờ chảy được $\frac{5}{24}$ (phần bể) (4)

Từ (3) và (4) ta có phương trình $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+4} = \frac{5}{24}$

Giải phương trình ta được $x = -\frac{12}{5}$ (loại) hoặc $x = 8$ (thỏa mãn)

Vậy thời gian vòi một chảy một mình đầy bể là 8 giờ. Vòi hai chảy một mình đầy bể là $8 + 4 = 12$ (giờ)

Nhận xét: Ta có thể chuyển bài toán trên thành bài toán sau: "Hai đội công nhân cùng làm chung một công việc thì hoàn thành sau 4 giờ 48 phút. Nếu làm riêng để hoàn thành công việc này thì thời gian đội một ít hơn thời gian đội hai là 4 giờ. Hỏi khi làm riêng thì mỗi đội hoàn thành công việc trong bao lâu?"

Ví dụ 6

Một mảnh đất hình chữ nhật có độ dài đường chéo là 13m và chiều dài hơn chiều rộng là 7m. Tính chiều dài và chiều rộng của mảnh đất đó.

Lời giải

Cách 1: lập phương trình

Gọi chiều rộng mảnh đất hình chữ nhật là x (m, $x > 0$)

Chiều dài mảnh đất hình chữ nhật lớn hơn chiều rộng là 7m nên chiều dài của mảnh đất hình chữ nhật là $x + 7$ (m)

Biết độ dài đường chéo là 13 m nên theo định lý Pitago ta có phương trình:

$$x^2 + (x + 7)^2 = 13^2$$

Giải phương trình ta được $x = 5$ hoặc $x = -12$. Đối chiếu với điều kiện ta có chiều rộng của mảnh đất hình chữ nhật là 13 m, chiều rộng mảnh đất đó là 12 m.

Cách 2: Lập hệ phương trình

Gọi chiều dài mảnh đất đó là x và chiều rộng của mảnh đất đó là y (m, $x > y > 0$)

Khi đó ta có hệ phương trình $\begin{cases} y + 7 = x \\ x^2 + y^2 = 13^2 \end{cases}$ Giải hệ ta được $\begin{cases} x = 12 \\ y = 5 \end{cases}$

Đối chiếu với điều kiện ta thấy thỏa mãn. Vậy chiều rộng của mảnh đất hình chữ nhật là 5 m và chiều dài là 12 m.

III. MỘT SỐ BÀI TOÁN TỔNG HỢP

Bài 1

Một ca nô xuôi dòng 108 km rồi ngược dòng 63 km, tổng thời gian cả đi lẫn về là 7 giờ. Nếu ca nô xuôi dòng 81 km và ngược dòng 84 km thì tổng thời gian cũng hết 7 giờ. Biết vận tốc riêng của dòng nước không thay đổi. Tính vận tốc của ca nô và vận tốc riêng của dòng nước.

Lời giải

Gọi vận tốc của ca nô là x (km/h), vận tốc của dòng nước là y với $x > y > 0$

Thời gian ca nô đi xuôi dòng 108 km là: $\frac{108}{x+y}$ giờ, thời gian ca nô ngược dòng 63 km là

$\frac{63}{x-y}$ giờ. Theo giả thiết ta có: $\frac{108}{x+y} + \frac{63}{x-y} = 7$ (1) (1). Thời gian ca nô đi xuôi dòng 81

km là: $\frac{81}{x+y}$ giờ, thời gian ca nô ngược dòng 84 km là $\frac{84}{x-y}$ giờ. Theo giả thiết ta có:

$$\frac{81}{x+y} + \frac{84}{x-y} = 7 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} \frac{108}{x+y} + \frac{63}{x-y} = 7 \\ \frac{81}{x+y} + \frac{84}{x-y} = 7 \end{cases} \Rightarrow \frac{27}{x+y} - \frac{21}{x-y} = 0 \Leftrightarrow x - 8y = 0 \Leftrightarrow x = 8y$$

Thay vào phương trình (1) ta có $\frac{108}{9y} + \frac{63}{7y} = 7 \Leftrightarrow \frac{21}{y} = 7 \Rightarrow y = 3 \Rightarrow x = 24$. Vậy vận tốc của ca nô là 24 km/h, vận tốc của dòng nước là 3 km/h.

Bài 2

Một phòng họp có 180 ghế được chia thành các dãy ghế có số ghế ở mỗi dãy bằng nhau. Nếu kê thêm mỗi dãy 5 ghế và bớt đi 3 dãy thì số ghế trong phòng không thay đổi. Hỏi ban đầu phòng họp được chia thành bao nhiêu dãy.

Lời giải

Gọi số dãy ghế ban đầu của phòng họp là x (dãy) điều kiện $x > 3, x \in \mathbb{N}$.

Số ghế ở mỗi dãy lúc đầu là $\frac{180}{x}$ (ghế). Số dãy mới là: $x-3$ (dãy), số ghế ở mỗi dãy lúc này là $\frac{180}{x-3}$ (ghế)

Theo giả thiết ta có: $\frac{180}{x-3} - \frac{180}{x} = 5 \Leftrightarrow 5x(x-3) = 540 \Leftrightarrow 5x^2 - 15x - 540 = 0$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3x - 108 = 0 \Leftrightarrow (x-12)(x+9) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 12 \\ x = -9 \end{cases}$$

Đối chiếu với điều kiện ban đầu ta thấy $x = 12$ thỏa mãn.

Vậy số dãy ghế ban đầu của phòng họp là : 12 dãy.

Bài 3

Khu du lịch sinh thái Đồng Mô thuộc thị xã Sơn Tây là một địa điểm thu hút khách du lịch của thành phố Hà Nội. Nhà bạn An ở cách địa điểm du lịch 1800 m. Lúc đi từ nhà đến địa điểm du lịch bạn An đi bộ. Lúc về bạn An đi bằng xe điện với vận tốc lớn hơn lúc đi là 120 m/phút nên thời gian về ít hơn thời gian đi là 20 phút. Tính vận tốc của xe điện.

Lời giải

Gọi vận tốc lúc đi từ nhà đến khu du lịch của bạn An là x (m/ phút) ($x > 0$). Suy ra vận tốc lúc về bằng xe điện là $x + 120$ (m/ phút).

Thời gian lúc đi là $\frac{1800}{x}$ (phút). Thời gian lúc về là $\frac{1800}{x+120}$ (phút).

Theo giả thiết ta có : $\frac{1800}{x} = \frac{1800}{x+120} + 20 \Leftrightarrow \frac{90}{x} = \frac{210+x}{x+120} \Leftrightarrow x^2 - 120x - 10800 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 180 \\ x = -60 \end{cases}$. Đối

chiếu với điều kiện ta thấy $x = 180$ thỏa mãn.

Vậy vận tốc của xe điện là $180 + 120 = 300$ mét / phút.

Bài 4

Một ô tô dự định đi từ A đến B cách nhau 148 km trong một thời gian đã định. Sau khi đi được 1 giờ thì ô tô bị chặn bởi tàu hỏa trong 5 phút, vì vậy để đến B đúng giờ ô tô phải chạy với vận tốc tăng thêm 2 km / h so với lúc đầu. Tính vận tốc ô tô trong 1 giờ đầu.

Lời giải

Gọi vận tốc dự định của ô tô là x (km/ h) điều kiện $x > 0$. Thời gian dự định đi từ A đến B là $\frac{148}{x}$ (giờ).

Quãng đường ô tô đi được trong 1 giờ đầu là x (km). Quãng đường còn lại là $148 - x$ (km). Thời gian đi quãng đường còn lại là : $\frac{148-x}{x+2}$ (giờ). Tổng thời gian thực tế ô tô để ô tô đi

từ A đến B là : $1 + \frac{1}{12} + \frac{148-x}{x+2} = \frac{1802+x}{12(x+2)}$ (giờ). Theo giả thiết ta có:

$\frac{148}{x} = \frac{1802+x}{12(x+2)} \Leftrightarrow x^2 - 26x - 3352 = 0 \Leftrightarrow (x-48)(x+74) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 48 \\ x = -74 \end{cases}$. Đối chiếu với điều kiện

ban đầu ta có $x = 48$ thỏa mãn. Vậy vận tốc ô tô trong 1 giờ đầu là 48 km/h.

Bài 5

Khoảng cách giữa hai tỉnh A, B là 60 km. Hai người đi xe đạp cùng khởi hành một lúc đi từ A đến B với vận tốc bằng nhau. Sau khi đi được 1 giờ thì xe của người thứ nhất bị hỏng nên phải đứng lại sửa xe 20 phút còn người thứ hai tiếp tục đi với vận tốc ban đầu. Sau khi sửa xe xong, người thứ nhất tiếp tục đi với vận tốc lớn hơn lúc đầu 4 km/h nên đến B cùng lúc với người thứ hai. Tính vận tốc hai người lúc đầu.

Lời giải

Gọi vận tốc hai người lúc đầu là x (km/h). Thời gian người thứ hai đi từ A đến B là $\frac{60}{x}$ giờ.

Quãng đường người thứ nhất đi được sau 1 giờ là x (km). Sau khi tăng vận tốc thì người thứ nhất đi với vận tốc mới là $x + 4$ (km/h). Thời gian người thứ nhất đi tiếp cho đến khi đến B

là : $\frac{60-x}{x+4}$. Theo giả thiết ta có:

$$\frac{60-x}{x+4} + \frac{1}{3} + 1 = \frac{60}{x} \Leftrightarrow \frac{180-3x+4(x+4)}{3(x+4)} = \frac{60}{x} \Leftrightarrow \frac{196+x}{3(x+4)} = \frac{60}{x} \Leftrightarrow x^2 + 16x - 720 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-20)(x+36) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 20 \\ x = -36 \end{cases} \text{ đối chiếu với điều kiện thì } x = 20 \text{ thỏa mãn.}$$

Vậy vận tốc ban đầu của hai người là 20 km/h.

Bài 6

Trong giờ thể dục hai bạn An và Bình chạy bền trong trên cùng một quãng đường dài 2 km và xuất phát tại cùng một thời điểm. Biết bạn An chạy bền với vận tốc trung bình lớn hơn vận tốc trung bình của bạn Bình là 2 km/h và về đích sớm hơn bạn Bình 5 phút. Tính thời gian chạy hết quãng đường của mỗi bạn (giả sử vận tốc của mỗi bạn không đổi trong suốt quãng đường).

Lời giải

Gọi vận tốc trung bình của bạn Bình là x (km/h), suy ra vận tốc trung bình của bạn An là $x + 2$ (km/h).

Thời gian chạy hết quãng đường của bạn Bình là $\frac{2}{x}$ (giờ). Thời gian bạn An chạy hết quãng đường là : $\frac{2}{x+2}$ (giờ).

Theo giả thiết ta có:

$$\frac{2}{x} - \frac{2}{x+2} = \frac{1}{12} \Leftrightarrow 24(x+2) - 24x = x(x+2) \Leftrightarrow x^2 + 2x - 48 = 0 \Leftrightarrow (x-6)(x+8) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ x = -8 \end{cases}$$

Đối chiếu với điều kiện, ta thấy $x = 6$ thỏa mãn.

Bài 7

Một đoàn xe vận tải nhận chuyên chở 22 tấn hàng . Khi sắp khởi hành thì một xe phải điều đi làm việc khác nên mỗi xe còn lại phải chở nhiều hơn 0,2 tấn hàng so với dự định. Hỏi thực tế có bao nhiêu xe đã tham gia vận chuyển? Biết khối lượng hàng mỗi xe vận chuyển là như nhau.

Lời giải:

Gọi x là số chiếc xe dự định vận chuyển ($x > 1, x \in \mathbb{N}$).

Số lượng hàng mỗi xe dự định vận chuyển là : $\frac{22}{x}$ (tấn). Số xe thực tế đã vận chuyển

hàng là : $x-1$ (chiếc). Số lượng hàng thực tế đã vận chuyển là $\frac{22}{x-1}$ (tấn). Theo giả thiết ta có

:

$$\frac{22}{x-1} - \frac{1}{5} = \frac{22}{x} \Leftrightarrow \frac{111-x}{5(x-1)} = \frac{22}{x} \Leftrightarrow x^2 - x - 110 = 0 \Leftrightarrow (x+10)(x-11) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 11 \\ x = -10 \end{cases}$$

Đối chiếu với điều kiện ta thấy $x = 11$ thỏa mãn điều kiện. Vậy thực tế có 10 xe vận chuyển .

Bài 8

Nếu giảm chiều rộng của một mảnh vườn hình chữ nhật đi 3m và tăng chiều dài thêm 8m thì

diện tích hình chữ nhật giảm đi $54m^2$. Nếu tăng chiều rộng của mảnh vườn thêm $2m$ và giảm chiều dài đi $4m$ thì diện tích hình chữ nhật tăng thêm $32m^2$. Hãy tính các kích thước của mảnh vườn.

Lời giải

Gọi chiều dài của mảnh vườn là $x(m)$, chiều rộng mảnh vườn là $y(m)$. Điều kiện $x > 4, y > 3$.

Diện tích mảnh vườn là $x.y (m^2)$

Theo giả thiết ta có hệ phương trình :
$$\begin{cases} (x+8)(y-3) = xy - 54 \\ (x-4)(y+2) = xy + 32 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x + 8y = -30 \\ 2x - 4y = 40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 50 \\ y = 15 \end{cases}$$

Vậy chiều dài mảnh vườn là $50(m)$, chiều rộng mảnh vườn là $15(m)$.

Bài 9

Một đội xe dự định chở 24 tấn hàng. Thực tế khi chở đội được bổ sung thêm 4 xe nữa nên mỗi xe chở ít hơn thực tế 1 tấn hàng. Hỏi ban đầu đội có bao nhiêu xe (biết khối lượng hàng chở trên mỗi xe là như nhau).

(Đề dự bị môn toán tuyển sinh lớp 10 – TP Hà Nội, 2017).

Lời giải

Gọi số xe ban đầu đội có là x (chiếc). Điều kiện $(x > 0, x \in \mathbb{N})$.

Số hàng ban đầu mỗi xe dự định chở là $\frac{24}{x}$ (tấn)

Số xe thực tế được huy động là $x+4$ (chiếc) nên số hàng thực tế mỗi xe chở là $\frac{24}{x+4}$ (tấn).

Theo giả thiết ta có :

$$\frac{24}{x} - \frac{24}{x+4} = 1 \Leftrightarrow x(x+4) = 96 \Leftrightarrow x^2 + 4x - 96 = 0 \Leftrightarrow (x-8)(x+12) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 \\ x = -12 \end{cases} \text{ Đối chiếu với}$$

điều kiện ban đầu ta thấy $x = 8$ thỏa mãn. Vậy số xe ban đầu của đội là 8 chiếc.

Bài 10

Một người đi xe đạp từ A đến B cách nhau $24km$ với vận tốc dự định. Khi từ B trở về A người đó tăng vận tốc thêm $4km/h$ so với lúc đi, nên thời gian về ít hơn thời gian đi là 30 phút.

Tính vận tốc trung bình dự định của xe đạp khi đi từ A đến B?

Lời giải

Gọi vận tốc dự định đi từ A đến B là $x(km/h)$, điều kiện : $x > 0$

Vận tốc thực tế khi đi từ B về A là $x + 4(km/h)$.

Thời gian dự định đi từ A đến B là $\frac{24}{x}$ giờ. Thời gian thực tế đi từ B về A là $\frac{24}{x+4}$.

Theo giả thiết ta có :

$$\frac{24}{x+4} + \frac{1}{2} = \frac{24}{x} \Leftrightarrow \frac{48+x+4}{2(x+4)} = \frac{24}{x} \Leftrightarrow x^2 + 4x - 192 = 0 \Leftrightarrow (x-12)(x+16) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=12 \\ x=-16 \end{cases} \text{ đối chiếu}$$

với điều kiện ta suy ra $x = 12$ thỏa mãn. Vậy vận tốc dự định đi từ A đến B là $12km/h$.

Bài 11

Hai tỉnh A, B cách nhau $60km$. Có một xe đạp đi từ A đến B . Khi xe đạp bắt đầu khởi hành thì có một xe máy ở cách A $40km$ đi đến A rồi trở về B ngay. Tìm vận tốc của mỗi xe biết xe gặp máy về B trước xe đạp 40 phút và vận tốc xe gặp máy hơn vận tốc xe đạp $15km/h$.

Lời giải

Gọi vận tốc xe đạp là $x(km/h)$ ($x > 0$) thì vận tốc xe máy là $x + 15(km/h)$

Thời gian xe đạp đi từ A đến B là $\frac{60}{x}$ (giờ).

Quãng đường xe máy đi là $100(km)$, thời gian xe máy đi đến B là : $\frac{100}{x+15}$ (giờ)

Theo giả thiết ta có :

$$\frac{100}{x+15} + \frac{2}{3} = \frac{60}{x} \Leftrightarrow \frac{50}{x+15} + \frac{1}{3} = \frac{30}{x} \Leftrightarrow \frac{150+x+15}{3(x+15)} = \frac{30}{x} \Leftrightarrow x(x+165) = 90(x+15)$$

Hay $x^2 + 75x - 1350 = 0 \Leftrightarrow (x-15)(x+90) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=15 \\ x=-90 \end{cases}$, đối chiếu với điều kiện ta thấy $x = 15$ thỏa mãn.

Vậy vận tốc xe đạp là $15km/h$, vận tốc xe máy là $30km/h$.

Bài 12

Một ô tô và một xe máy ở hai địa điểm A, B cách nhau $180km$, khởi hành cùng một lúc đi ngược chiều nhau và gặp nhau sau 2 giờ. Tính vận tốc của mỗi xe, biết ô tô có vận tốc lớn hơn xe máy $10km/h$.

Lời giải

Gọi vận tốc ô tô là $x(km/h)$, vận tốc xe máy là $y(km/h)$. Điều kiện : $x > y > 10$.

Theo giả thiết ta có : $x - y = 10$ (1). Sau 2 giờ ô tô đi được : $2x(km)$, xe máy đi được $2y(km)$. Vì 2 xe gặp nhau sau 2 giờ nên tổng quãng đường đi được của 2 xe đã đi được chính là quãng đường AB . Từ là $2x + 2y = 180 \Leftrightarrow x + y = 90$ (2). Từ (1),(2), ta có hệ phương trình :

$$\begin{cases} x - y = 10 \\ x + y = 90 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 50 \\ y = 40 \end{cases} \text{ (thỏa mãn điều kiện).}$$

Vậy vận tốc của ô tô là $50km/h$, vận tốc xe máy là $40km/h$.

Bài 13

Để chuẩn bị chuyến đánh bắt cá ở Hoàng Sa, hai ngư dân đảo Lý Sơn cần chuyển một số lương thực, thực phẩm lên tàu. Nếu người thứ nhất chuyển xong một nửa số lương thực, thực phẩm sau đó người thứ hai chuyển nốt số còn lại thì thời gian hoàn thành lâu hơn người thứ nhất 3 giờ. Nếu cả hai cùng làm chung thì thời gian chuyển số lương thực, thực phẩm đó lên tàu là $\frac{20}{7}$ giờ. Hỏi nếu làm riêng một mình thì mỗi người cần bao nhiêu lâu để chuyển hết số lương thực, thực phẩm lên tàu.

Lời giải

Gọi thời gian để người thứ nhất một mình hoàn thành công việc là x (giờ). Thời gian để người thứ hai một mình hoàn thành công việc là y (giờ) (với $x, y > \frac{20}{7}$)

Người thứ nhất hoàn thành $\frac{1}{2}$ công việc trong $\frac{x}{2}$ giờ. Người thứ hai hoàn thành $\frac{1}{2}$ công việc trong $\frac{y}{2}$ giờ. Trong 1 giờ người thứ nhất làm được $\frac{1}{x}$ công việc, người thứ hai làm được $\frac{1}{y}$ công việc. Theo giả thiết ta có :

$$\begin{cases} \frac{y}{2} - \frac{x}{2} = 3 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{7}{20} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y - x = 6 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{7}{20} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 6 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{x+6} = \frac{7}{20} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 6 \\ 7x^2 + 2x - 120 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 6 \\ x = 4 \\ x = -\frac{30}{7} \end{cases}$$

Đối chiếu với điều kiện suy ra $x = 4; y = 10$ thỏa mãn.

Kết luận : Nếu làm riêng một mình thì người thứ nhất cần 4 ngày, người thứ hai cần 10 ngày để chuyển hết số lương thực, thực phẩm lên tàu.

CHỦ ĐỀ 5: MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP GIẢI PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỈ

I. PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỈ CƠ BẢN

KIẾN THỨC CẦN NHỚ

$$\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) = g^2(x) \end{cases}$$

Ví dụ 1: Giải các phương trình

a) $\sqrt{x^2 + 2x + 6} = 4x - 1$

b) $\sqrt{2x+1} + \sqrt{x} = \sqrt{4x+9}$

Lời giải

a) Phương trình tương đương với :

$$\begin{cases} 4x - 1 \geq 0 \\ x^2 + 2x + 6 = (4x - 1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{4} \\ 15x^2 - 10x - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{4} \\ (x-1)(3x+1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$$

Kết luận $x = 1$ là nghiệm của phương trình.

b) Điều kiện $x \geq 0$. Bình phương 2 vế ta được :

$$3x + 1 + 2\sqrt{2x^2 + x} = 4x + 9 \Leftrightarrow 2\sqrt{2x^2 + x} = x + 8 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -8 \\ 4(2x^2 + x) = (x + 8)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -8 \\ 7x^2 - 12x - 64 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = \frac{-16}{7} \end{cases}$$

Đối chiếu với điều kiện ta thấy có $x = 4$ là nghiệm của phương trình.

Ví dụ 2. Giải các phương trình

a) $\sqrt{x^2 + x + 2} + \sqrt{x^2 + x + 7} = 5$

b) $\sqrt{3x+3} + 2\sqrt{x+3} = 3\sqrt{5x-1}$

Lời giải

a) Điều kiện $\begin{cases} x^2 + x + 2 \geq 0 \\ x^2 + x + 7 \geq 0 \end{cases}$ thỏa mãn với mọi x . Ta viết phương trình lại thành

$\sqrt{x^2 + x + 2} = 5 - \sqrt{x^2 + x + 7}$ và bình phương 2 vế rồi ta có :

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + x + 7} \leq 5 \\ x^2 + x + 2 = 25 - 10\sqrt{x^2 + x + 7} + x^2 + x + 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x \leq 18 \\ \sqrt{x^2 + x + 7} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x \leq 18 \\ x^2 + x = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x = 2 \Leftrightarrow (x-1)(x+2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \end{cases}$$

Kết luận $x \in \{-2; 1\}$

b) Điều kiện $\begin{cases} 3x+1 \geq 0 \\ x+3 \geq 0 \\ 5x-1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{5}$. Bình phương 2 vế ta thu được :

$$3x+1+4(x+3)+4\sqrt{(3x+1)(x+3)}=9(5x-1) \Leftrightarrow 2\sqrt{(3x+1)(x+3)}=19x-11$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 19x-11 \geq 0 \\ 4(3x^2+10x+3)=361x^2-418x+121 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{11}{19} \\ 349x^2-378x+109=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{11}{19} \\ (x-1)(349x-109)=0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow x=1$. Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=1$.

MỘT SỐ CÁCH ĐẶT ẨN PHỤ KHÁC

1. Đặt ẩn phụ hoàn toàn để quy về phương trình một ẩn:

+ Điểm mấu chốt của phương pháp này là phải chọn một biểu thức $f(x)$ để đặt phần còn lại phải biểu diễn được theo ẩn t . Những bài toán dạng này nói chung là dễ.

+ Trong nhiều trường hợp ta cần thực hiện phép chia cho một biểu thức có sẵn ở phương trình từ đó mới phát hiện ẩn phụ. Tùy thuộc vào cấu trúc phương trình ta có thể chia cho phù hợp (thông thường ta chia cho với là số hữu tỉ)

+ Đối với bài toán mà việc đưa về một ẩn dẫn đến phương trình mới phức tạp như: Số mũ cao, căn bậc cao... thì ta có thể nghĩ đến hướng đặt nhiều ẩn phụ để quy về hệ phương trình hoặc dựa vào các hằng đẳng thức để giải toán.

Ta xét các ví dụ sau:

Ví dụ 1

a. $(2x-1)^2-9=4\sqrt{x^2-x}$ (Đề tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán – Tin TP Hà Nội, 2017)

b. $\sqrt{6x-x^2}+2x^2-12x+15=0$ (Đề tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán TP Hà Nội, 2017)

c. $x^2=(1-\sqrt{x})(2x-3\sqrt{x}+3)$.

d. $x^2+\sqrt[3]{x^4-x^2}=2x+1$.

e. $x+1+\sqrt{x^2-4x+1}=3\sqrt{x}$

f. $x^2+2x\sqrt{x-\frac{1}{x}}=3x+1$

Lời giải

a. Ta viết lại phương trình thành: $4x^2-4x-8-4\sqrt{x^2-x}=0$, đặt $t=\sqrt{x^2-x} \geq 0$ ta có phương trình mới: $4t^2-4t-8=0 \Leftrightarrow (t+1)(t-2)=0$ suy ra $t=2$ thỏa mãn điều kiện.

Giải $t=2$ ta có: $x^2-x=4 \Leftrightarrow x^2-x-4=0 \Leftrightarrow x=\frac{1 \pm \sqrt{17}}{2}$

b. Đặt $t=\sqrt{6x-x^2} \geq 0$ phương trình đã cho trở thành:

$t-2t^2+15=0 \Leftrightarrow 2t^2-t-15=0 \Leftrightarrow (t-3)(2t+5)=0$, do $t \geq 0 \Rightarrow t=3$ thỏa mãn điều kiện.

Giải $t=3$ ta có $6x-x^2=9 \Leftrightarrow x^2-6x+9=0 \Leftrightarrow x=3$

Kết luận $x=3$ là nghiệm của phương trình.

c. Điều kiện: $x \geq 0$. Phương trình đã cho có thể viết lại như sau:

$x^2 = (1-\sqrt{x})[2x+3(1-\sqrt{x})] \Leftrightarrow x^2 = 2x(1-\sqrt{x})+3(1-\sqrt{x})^2$. Ta thấy $x=0$ không phải là nghiệm của phương trình. Ta chia hai vế cho x^2 thì thu được: $1 = 2\left(\frac{1-\sqrt{x}}{x}\right) + 3\left(\frac{1-\sqrt{x}}{x}\right)^2$.

Đặt $\frac{1-\sqrt{x}}{x} = t$ ta có phương trình theo t : $3t^2 + 2t - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = \frac{1}{3} \end{cases}$

Trường hợp 1: $t = -1$ ta có: $\frac{1-\sqrt{x}}{x} = -1 \Leftrightarrow x - \sqrt{x} + 1 = 0$ (VN)

Trường hợp 2: $t = \frac{1}{3}$ ta có: $\frac{1-\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x - 3\sqrt{x} - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = \frac{3-\sqrt{21}}{2} \\ \sqrt{x} = \frac{3+\sqrt{21}}{2} \end{cases} (L) \Rightarrow x = \frac{15+\sqrt{21}}{2}$

Kết luận: Phương trình có nghiệm duy nhất: $x = \frac{15+\sqrt{21}}{2}$

d. Ta thấy $x=0$ không phải là nghiệm của phương trình.

Vì vậy ta chia hai vế cho x thì thu được: $x + \sqrt[3]{x - \frac{1}{x}} = 2 + \frac{1}{x} \Leftrightarrow x - \frac{1}{x} + \sqrt[3]{x - \frac{1}{x}} - 2 = 0$

Đặt $t = \sqrt[3]{x - \frac{1}{x}}$ ta thu được phương trình:

$$t^3 + t - 2 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow x - \frac{1}{x} = 1 \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Kết luận: Phương trình có nghiệm $x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

e. Điều kiện: $\begin{cases} x \geq 0 \\ x^4 - 4x + 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 2 - \sqrt{3} \\ x \geq 2 + \sqrt{3} \end{cases}$

Ta thấy $x=0$ không phải là nghiệm của phương trình. Chia hai vế cho $\sqrt{x}$ thì thu được:

$$\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{x - 4 + \frac{1}{x}} = 3. \text{ Đặt } t = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow t^2 = x + \frac{1}{x} + 2, \text{ theo bất đẳng thức Cô si ta có } t \geq 2.$$

Thay vào phương trình ta có: $\sqrt{t^2 - 6} = 3 - t \Leftrightarrow \begin{cases} t \leq 3 \\ t^2 - 6 = t^2 - 6t + 9 \end{cases} \Leftrightarrow t = \frac{5}{2}$

$$\Leftrightarrow \frac{25}{4} = x + \frac{1}{x} + 2 \Leftrightarrow 4x^2 - 17x + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Kết luận: Phương trình có hai nghiệm: $x = 4, x = \frac{1}{4}$.

f. Nhận xét: $x=0$ không phải là nghiệm của phương trình.

Ta chia hai vế cho x khi đó phương trình trở thành: $x - \frac{1}{x} + 2\sqrt{x - \frac{1}{x}} - 3 = 0$. Đặt $t = \sqrt{x - \frac{1}{x}} \geq 0$

phương trình trở thành:

$$t^2 + 2t - 3 = 0 \Rightarrow t = 1 \Leftrightarrow x - \frac{1}{x} = 1 \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Ví dụ 2. Giải các phương trình:

a. $(13-4x)\sqrt{2x-3} + (4x-3)\sqrt{5-2x} = 2 + 8\sqrt{6x-4x^2-15}$

b. $7\sqrt{3x-7} + (4x-7)\sqrt{7-x} = 32$

Lời giảia. Điều kiện $\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{5}{2}$. Phương trình được viết lại như sau:

$$7(\sqrt{2x-3} + \sqrt{5-2x}) - 2[(2x-3)\sqrt{2x-3} + (5-2x)\sqrt{5-2x}] = 2 + 8\sqrt{(5-2x)(2x-3)}.$$

Đặt $t = \sqrt{2x-3} + \sqrt{5-2x} \Rightarrow \sqrt{(5-2x)(2x-3)} = \frac{t^2-2}{2}$. Điều kiện $(\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2})$

Phương trình đã cho có dạng: $t^3 - 4t^2 + t + 6 = 0 \Rightarrow t = 2 \Rightarrow x = 2$.

Ngoài ra ta cũng có thể giải phương trình trên bằng cách đưa về hệ.

b. Điều kiện $\frac{7}{3} \leq x \leq 7$. Phương trình được viết lại như sau:

$$\left[\frac{1}{2}(3x-7) + \frac{3}{2}(7-x)\right]\sqrt{3x-7} + \left[\frac{1}{2}(7-x) + \frac{3}{2}(3x-7)\right]\sqrt{7-x} = 32$$

$$\Leftrightarrow [(3x-7) + (7-x)]\sqrt{3x-7} + [(7-x) + (3x-7)]\sqrt{7-x} = 64$$

Đặt $t = \sqrt{3x-7} + \sqrt{7-x}$

$$\Rightarrow t^3 = (3x-7)\sqrt{3x-7} + (7-x)\sqrt{7-x} + 3\sqrt{(3x-7)(7-x)}(\sqrt{3x-7} + \sqrt{7-x})$$

Từ phương trình suy ra $t^3 = 64 \Leftrightarrow t = 4$. Hay $\sqrt{3x-7} + \sqrt{7-x} = 4$

Bình phương 2 vế ta thu được: $\sqrt{3x-7} + \sqrt{7-x} = 8-x \Leftrightarrow 4x^2 - 44x + 113 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{11 \pm 2\sqrt{2}}{2}$

Tại sao ta phân tích được hai phương trình như trên:

Ta thấy với những phương trình:

$$(ax+b)\sqrt{cx+d} + (ex+h)\sqrt{gx+k} + r\sqrt{(cx+d)(gx+k)} + s = 0$$

thì một trong những cách xử lý khá hiệu quả là:

Phân tích: $ax+b = m(cx+d) + n(gx+k)$ và $ex+h = m'(cx+d) + n'(gx+k)$ sau đó ta có thể đặt ẩn phụ trực tiếp, hoặc đặt ẩn phụ để quy về hệ.

Ví dụ:

Khi giải phương trình: ta thực hiện cách phân tích:

$$(13-4x)\sqrt{2x-3} + (4x-3)\sqrt{5-2x} = 2 + 8\sqrt{6x-4x^2-15}$$

+ Giả sử: $13-4x = m(2x-3) + n(5-2x)$

Đồng nhất hai vế ta suy ra: $\begin{cases} 2m-2n=-4 \\ -3m+5n=13 \end{cases} \Leftrightarrow m=\frac{3}{2}, n=\frac{7}{2}$

+ Tương tự ta giả sử: $(4x-3) = m'(2x-3) + n'(5-2x) \Rightarrow m'=\frac{7}{2}, n'=\frac{3}{2}$

Khi giải phương trình: $7\sqrt{3x-7} + (4x-7)\sqrt{7-x} = 32$

Ta thực hiện phân tích: $m(3x-7) + n(7-x) = 7$ và $p(3x-7) + q(7-x) = 4x-7$

Sau đó đồng nhất 2 vế để tìm m, n, p, q ta có: $m=\frac{1}{2}; n=\frac{3}{2}; p=\frac{3}{2}; q=\frac{1}{2}$

Như vậy, ngoài cách đặt ẩn phụ như trên ta có thể giải các bài toán theo các cách khác như sau:

a. Điều kiện: $\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{5}{2}$.

Ta có hệ mới như sau:

b. Đặt ta có hệ phương trình

Đặt $a = \sqrt{2x-3}, b = \sqrt{5-2x}$ thì $a^2 + b^2 = 2$.

Từ cách phân tích trên ta có hệ sau:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 2 \\ (3a^2 + 7b^2)a + (3b^2 + 7a^2)b = 4 + 16ab \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+b)^2 - 2ab = 2 \\ 3(a+b)^3 - 2ab(a+b) - 16ab - 4 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a+b)^2 - 2ab = 2 \\ 3(a+b)^3 + [2 - (a+b)^2](a+b) + 8[2 - (a+b)^2] - 4 = 0 \end{cases}$$

Đặt $a+b=S, ab=P$. Điều kiện: $S, P \geq 0; S^2 \geq 4P$

$$\text{Ta có hệ mới như sau: } \begin{cases} S^2 - 2P = 2 \\ 2S^3 - 8S^2 + 2S + 12 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S = 2 \\ P = 2 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = 1 \Leftrightarrow x = 2$$

b. Đặt $a = \sqrt{3x-7}, b = \sqrt{7-x}$ ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} (a+b)^3 = 64 \\ a^2 + 3b^2 = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=4 \\ a^2 + 3b^2 = 14 \end{cases}. \text{ Giải hệ phương trình ta thu được: } a, b \Rightarrow x.$$

2. Đặt ẩn phụ để quy về hệ đối xứng loại 2

Phương pháp này đặc biệt hiệu quả với các phương trình dạng: $ax^2 + bx + c = d\sqrt{ex+h}$ hoặc $ax^3 + bx^2 + cx + d = e\sqrt[3]{gx+h}$

Với mục đích tạo ra các hệ đối xứng hoặc gần đối xứng ta thường làm theo cách:

Đối với phương trình dạng: $ax^2 + bx + c = d\sqrt{ex+h}$

Ta đặt: $my+n=\sqrt{ex+h}$ thì thu được quan hệ:

$$\begin{cases} ax^2 + bx + c = d(my+n) \\ m^2y^2 + 2mny + n^2 = ex + h \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ax^2 + bx - dmy + c - dn = 0 \\ m^2y^2 + 2mny - ex + n^2 - h = 0 \end{cases}$$

Ta mong muốn có quan hệ $x=y$. Nếu điều này xảy ra thì từ hệ trên ta sẽ có:

$$\frac{a}{m^2} = \frac{b-dm}{2mn} = \frac{c-dn}{n^2-h} \quad (*). \text{ Công việc còn lại là chọn } m, n \text{ chẵn thỏa mãn } (*)$$

Đối với những phương trình dạng: $ax^3 + bx^2 + cx + d = e\sqrt[3]{gx+h}$

$$\text{Ta đặt: } my+n=e\sqrt[3]{gx+h} \text{ thì thu được hệ: } \begin{cases} ax^3 + bx^2 + cx + d = e(my+n) \\ m^3y^3 + 3m^2ny^2 + 3mn^2y + n^3 = gx + h \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ax^3 + bx^2 - cmy + d - en = 0 \\ m^3y^3 + 3m^2ny^2 + 3mn^2y - gx + n^3 - h = 0 \end{cases}. \text{ Để thu được quan hệ } x=y \text{ ta cần:}$$

$$\frac{a}{m^3} = \frac{b}{3m^2n+3mn^2} = \frac{c-em}{-g} = \frac{d-en}{n^3-h}.$$

Ví dụ 1: Giải các phương trình:

a, $2x^2 - 6x - 1 = \sqrt{4x+5}$.

b, $\frac{2}{3}\sqrt{4x+1} - 9x^2 + 26x - \frac{37}{3} = 0$.

c, $\sqrt[3]{3x-5} = 8x^3 - 36x^2 + 53x - 25$.

d, $27\sqrt[3]{81x-8} = 27x^3 - 54x^2 + 36x - 54.$

e, $x = 2017 - \sqrt{2017 - \sqrt{x}}$ (Đề dự bị tuyển sinh lowps10 TP Hà Nội 2017)

Lời giải:

a, Điều kiện $x \geq -\frac{5}{4}$. Đặt $my + n = \sqrt{4x+5}$, khi đó ta có hệ

$$\begin{cases} 2x^2 - 6x - 1 = my + n \\ m^2y^2 + 2mny + n^2 = 4x + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 - 12x - 2my - 2 - 2n = 0 \\ m^2y^2 + 2mm - 4x + n^2 - 5 = 0 \end{cases}$$

Ta cần tìm m, n để tạo ra quan hệ $x = y \Leftrightarrow \frac{4}{m^2} = \frac{-12-2m}{2mn-4} = \frac{-2-2n}{n^2-5}$.

$$\text{Chọn } m = 2 \Rightarrow \begin{cases} \frac{-2-2n}{n^2-5} = 1 \\ \frac{-16}{4n-4} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n^2 + 2n - 3 = 0 \\ 4n = -12 \end{cases} \Rightarrow n = -3$$

Chú ý:

Việc nhân số 2 vào phương trình (1) của hệ để tạo ra $4x^2 - 12x - 1$ là rất cần thiết để chọn được m được chẵn và nhóm $4x^2 - 12x - 2$ thành bình phương của biểu thức bậc hai được dễ hơn.

Từ đó ta có lời giải cho bài toán như sau:

$$\text{Đặt } 2y - 3 = \sqrt{4x+5} \text{ thì thu được hệ } \begin{cases} 4x^2 - 12x - 2 = 2(2y-3) \\ (2y-3)^2 = 4x+5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2x-3)^2 = 4y+5 \\ (2y-3)^2 = 4x+5 \end{cases}$$

Trừ hai phương trình của hệ ta có $(2x-3)^2 - (2y-3)^2 = 4(y-x)$

$$\Leftrightarrow 2(x-y)(4x+4y-4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x + y = 2 \end{cases}$$

$$\text{Trường hợp 1: } x = y \Leftrightarrow 2x - 3 = \sqrt{4x+5} \Leftrightarrow \begin{cases} (2x-3)^2 = 4x+5 \\ x \geq \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = 2 + \sqrt{3}$$

$$\text{Trường hợp 2: } y = 2 - x \Leftrightarrow 2(2-x) - 3 = \sqrt{4x+5} \Leftrightarrow \begin{cases} (1-2x)^2 = 4x+5 \\ x \leq \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = 1 - \sqrt{2}$$

Kết luận: Phương trình có hai nghiệm là : $x = 2 + \sqrt{3}, x = 1 - \sqrt{2}$.

b, Điều kiện: $x \geq -\frac{1}{4}$.

Phương trình đã cho được viết lại như sau: $9x^2 - 26x + \frac{47}{3} = \frac{2}{3}\sqrt{4x+1}$

$$\text{Đặt } my + n = \sqrt{4x+1} \Rightarrow \begin{cases} 9x^2 - 26x + \frac{37}{3} = \frac{2}{3}(my + n) \\ m^2y^2 + 2mny + n^2 = 4x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9x^2 - 26x - \frac{2}{3}my + \frac{37}{3} - \frac{2}{3}n = 0 \\ m^2y^2 + 2mmy - 4x + n^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\text{Ta cần } \frac{9}{m^2} = \frac{-26-\frac{2}{3}m}{2mn-4} = \frac{\frac{37}{3}-\frac{2}{3}n}{n^2-1}. \text{ Chọn } m = 3 \Rightarrow \begin{cases} \frac{-28}{6n-4} = 1 \\ -\frac{37}{3} - \frac{2}{3}n \Rightarrow n = -4 \\ \frac{3}{n^2-1} = 1 \end{cases}$$

Đặt $3y-4=\sqrt{4x+1} \Rightarrow$ hệ phương trình sau $\begin{cases} (3x-4)^2=2x+2y+1 \\ (3y-4)^2=4x+1 \end{cases}$. Trừ hai phương trình của hệ ta được $(x-y)(9x+9y-22)=0$. Giải phương trình ứng với hai trường hợp trên ta thu được các nghiệm là $x=\frac{14+\sqrt{61}}{9}$ và $x=\frac{12-\sqrt{53}}{9}$.

Chú ý: Ta có thể tìm m, n nhanh hơn bằng cách:

Đặt $my+n=\sqrt{4x+5}$ khi đó ta có hệ $\begin{cases} (2x-3)^2=2(my+n)+11 \\ (my+n)^2=4x+5 \end{cases}$. Trừ hai phương trình cho nhau:

$$(2x-3)^2-(my+n)^2=2my-4x+2n+6. \text{ Để có quan hệ } x=y \text{ ta cần } \begin{cases} 2my=4x \\ 2n+6=0 \end{cases} \Rightarrow m=2; n=-3$$

Tương tự khi giải quyết câu b).

c, Đặt $my+n=\sqrt[3]{3x-5}$ ta có hệ sau:

$$\sqrt[3]{3x-5}=8x^3-36x^2+53x-25 \Leftrightarrow \begin{cases} 8x^3-36x^2+53x-my-n-25=0 \\ m^3y^3+3m^2my^2+3mn^2y-3x+n^3+5=0 \end{cases}$$

Ta chọn m, n sao cho $\frac{8}{m^3}=\frac{-36}{3m^2n}=\frac{53-m}{3mn^2-3}=\frac{-n-25}{n^3+5} \Rightarrow m=2, n=-3$

Đặt $2y-3=\sqrt[3]{3x-5}$. Ta có hệ phương trình sau: $\begin{cases} (2x-3)^3=2y-3+x-2 \\ (2y-3)^3=3x-5 \end{cases}$

Trừ hai phương trình cho nhau ta thu được $(2x-3)^3-(2y-3)^3=2y-2x$

$$\Leftrightarrow 2(x-y)[(2x-3)^2+(2x-3)(2y-3)+(2y-3)^2+1]=0 \Leftrightarrow x=y$$

$$\text{Do } (2x-3)^2+(2x-3)(2y-3)+(2y-3)^2+1=\left[(2x-3)+\left(\frac{2y-3}{2}\right)\right]^2+\frac{3}{4}(2y-3)^2+1>0$$

Giải $x=y$ ta có $(2x-3)^2=3x-5 \Leftrightarrow 8x^3-36x^2+54x-27=3x-5$

$$\Leftrightarrow (x-2)(8x^2-20x+11)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=\frac{5\pm\sqrt{3}}{4} \end{cases}$$

Kết luận: Phương trình đã cho có ba nghiệm $x=2, x=\frac{5\pm\sqrt{3}}{4}$

d, Ta viết lại phương trình thành $27\sqrt[3]{81x-8}=(3x-2)^3-46$

Đặt $3y-2=\sqrt[3]{81x-8}$ ta có hệ phương trình $\begin{cases} (3y-2)^3=81x-8 \\ (3x-2)^3=27(3y-2)+46 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (3y-2)^3=81x-8 \\ (3x-2)^3=81x-8 \end{cases}$

Trừ hai phương trình của hệ ta thu được $(3x-2)^3-(3y-2)^3=81(y-x)$

$$\Leftrightarrow 3(x-y)[(3x-2)^2+(3x-2)(3y-2)+(3y-2)^2+27]=0 \Leftrightarrow x=y$$

$$\text{thay vào ta được } (3x-2)^3=27(3x-2)+46 \Leftrightarrow 27x^3-54x^2-33x=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=\frac{3\pm2\sqrt{5}}{3} \end{cases}$$

Kết luận: phương trình đã cho có ba nghiệm là $x=0, x=\frac{3\pm2\sqrt{5}}{3}$

c, Đặt $\sqrt{x}=a$ điều kiện là $0\leq a\leq 2017$, phương trình đã cho trở thành $a^2+\sqrt{2017-a}=2017$

Đặt $\sqrt{2017-a} = b \geq 0$ ta có hệ phương trình $\begin{cases} a^2 + b = 2017 \\ b^2 + a = 2017 \end{cases}$

Trừ hai phương trình của hệ ta có được $a^2 - b^2 + b - a = 0 \Leftrightarrow (a-b)(a+b-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ a = 1-b \end{cases}$

TH1: $a=b$ hay $\sqrt{2017-a} = a$ do $a \geq 0$ bình phương hai vế ta thu được $a^2 = 2017 - a$ hay

$$a^2 + a - 2017 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{-1 - \sqrt{8069}}{2} \\ a = \frac{-1 + \sqrt{8069}}{2} \end{cases} \text{ đối chiếu với điều kiện ta thấy } a = \frac{-1 + \sqrt{8069}}{2} \text{ thỏa mãn.}$$

$$\text{Suy ra } x = \left(\frac{-1 + \sqrt{8069}}{2} \right)^2.$$

TH2: $a = 1 - b \Leftrightarrow \sqrt{2017-a} = 1 - a$ (điều kiện $a \leq 1$), bình phương hai vế ta thu được $a^2 - 2a + 1 = 2017 - a \Leftrightarrow a^2 - a = 2016$ không thỏa mãn điều kiện do $0 \leq a \leq 1 \Rightarrow a(a-1) \leq 0$.

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = \left(\frac{-1 + \sqrt{8069}}{2} \right)^2$.

Với các phương trình dạng $(ax)^2 + \sqrt{b \pm ax} = b$ thì việc đặt ẩn $y = \sqrt{b \pm ax}$ rồi đưa về hệ đối xứng loại I là cách giải cực kỳ hiệu quả.

Chú ý:

+ với phương trình dạng: $[f(x)]^n + b = a \sqrt[n]{af(x) - b}$ (*)

Bằng phép đặt $t = f(x); y = \sqrt[n]{af(x) - b}$ ta có hệ đối xứng loại 2 là $\begin{cases} t'' + b = ay \\ y^* + b = at \end{cases}$

Trong phương trình (*) nếu ta thay a, b bởi các biểu thức chứa x thì cách giải phương trình vẫn như trên. Những phương trình dạng này thường có hình thức và lời giải khá đẹp.

*Ta xét ví dụ sau:

Ví dụ 2:

Giải các phương trình:

A, $4x^2 - 11x + 6 = (x-1)\sqrt{2x^2 - 6x + 6}$

b, $8x^3 - 13x + 7 = (x+1)\sqrt[3]{3x^2 - 2}$

c, $9 + 3\sqrt{x(3-2x)} = 7\sqrt{x} + 5\sqrt{3-2x}$ (đề tuyển sinh lớp 10 chuyên toán trường chuyên KHTN – ĐHQG Hà Nội 2018).

Lời giải:

A, ta viết lại phương trình thành $(2x-3)^2 + x - 3 = (x-1)\sqrt{(x-1)(2x-3) - (x-3)}$

Đặt $a = 2x-3, b = \sqrt{(x-1)(2x-3) - (x-3)}$ ta được hệ như sau:

$$\begin{cases} a^2 + x - 3 = (x-1)b \\ b^2 + x - 3 = (x-1)a \end{cases} \text{ Trừ hai phương trình của hệ ta thu được:}$$

$$a^2 - b^2 = (x-1)(b-a) \Leftrightarrow (a-b)(a+b+x-1) = 0$$

Trường hợp 1: $a = b \Leftrightarrow 2x - 3 = \sqrt{2x^2 - 6x + 6} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{3}{2} \\ 2x^2 - 6x + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3 - \sqrt{3}}{2} (L) \\ x = \frac{3 + \sqrt{3}}{2} (TM) \end{cases}$

Trường hợp 2: $2x - 3 + \sqrt{2x^2 - 6x + 6} + x - 3 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2x^2 - 6x} = 6 - 3x \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ 7x^2 - 30x + 36 = 0 \end{cases} \text{ (VN) Vậy}$

phương trình có nghiệm duy nhất $x = \frac{3 + \sqrt{3}}{2}$

b, ta viết lại phương trình thành $(2x - 1)^3 - (x^2 - x - 1) = (x + 1)\sqrt{(x + 1)(2x - 1) + x^2 - x - 1}$

Đặt $a = 2x - 1, b = \sqrt{(x + 1)(2x - 1) + x^2 - x - 1} = \sqrt{3x^2 - 2}$ ta thu được hệ phương trình:

$$\begin{cases} a^3 - (x^2 - x + 1) = (x + 1)b \\ b^3 - (x^2 - x + 1) = (x + 1)a \end{cases} \text{ trừ hai phương trình của hệ cho nhau ta được}$$

$$(a - b)(a^2 + ab + b^2 + x + 1) = 0$$

TH1: $a = b$ ta có: $2x - 1 = \sqrt{3x^2 - 2} \Leftrightarrow 8x^3 - 15x^2 + 6x + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -\frac{1}{8} \end{cases}$

TH2: $a^2 + ab + b^2 + x + 1 = 0 \Leftrightarrow \left(a + \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}(2x - 1)^2 + x + 1 = 0 \Leftrightarrow 4\left(a + \frac{b}{2}\right)^2 + 4x^2 + 2(2x - 1)^2 + 5 = 0$ vô nghiệm.

Tóm lại phương trình có 2 nghiệm là: $x = 1, x = -\frac{1}{8}$

c, Điều kiện: $0 \leq x \leq \frac{3}{2}$ đặt $a = \sqrt{x}, b = \sqrt{3 - x}$ với $a, b \geq 0$ thì $\begin{cases} 2a^2 + b^2 = 3 \\ 9 + 3ab = 7a + 5b \end{cases}$

Cộng theo vế 2 phương trình ta thu được $2a^2 + 3ab + b^2 - 7a - 5b + 6 = 0 \Leftrightarrow (a + b - 2)(2a + b - 3) = 0$ từ đây giải 2 trường hợp ta thu được các nghiệm của phương trình là ta thu được $x = 1$ và $x = \frac{1}{9}$

Ví dụ 3

Giải các phương trình:

A, $x^3 - \sqrt[3]{6 + \sqrt[3]{x + 6}} = 6$

b, $2(x^2 + x + 1)^2 + 2x^2 + 2x - 3 - \sqrt{4x + 5} = 0$

Lời giải:

A, Đặt $\begin{cases} \sqrt[3]{x + 6} = z \\ \sqrt[3]{z + 6} = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z^3 - x = 6 \\ y^3 - z = 6 \end{cases}$

Mặt khác với các phép đặt ở trên, từ phương trình trong đầu bài, ta có $x^3 - y - 6 = 0$

Như vậy ta được hệ phương trình $\begin{cases} x^3 = y + 6 & (1) \\ y^3 = z + 6 & (2) \\ z^3 = x + 6 & (3) \end{cases}$

Nhìn thấy hệ trên không thay đổi khi hoán vị vòng quanh đối với x, y, z nên không mất tính

tổng quát, ta có thể giả thiết $x = \max(x, y, z)$ (x là số lớn nhất trong 3 số x, y, z hay $x \geq y, x \geq z$)

Nếu $x > y$, thì từ (1) và (2) suy ra $y+6 = x^3 > y^3 = z+6 \Rightarrow y > z$

Khi đó từ (2) và (3) suy ra $y+6 = x^3 > y^3 = x+6 \Rightarrow z > x$ mâu thuẫn giả thiết $x \geq z$ ở trên. Do đó phải có $x = y$

Với $x = y$, từ (1) và (2) suy ra $y = z$. Vậy $x = y = z$. Phương trình (1) trở thành: $x^3 - x - 6 = 0$ hay $(x-2)(x^2+2x+3) = 0$ (4)

Vì $x^2+2x+3 = (x+1)^2+2 > 0$ nên pt (4) có nghiệm duy nhất $x = 2$.

b. Đặt $y = x^2 + x - 1$ khi đó phương trình đưa về :

$$2y^2 + 2(y+1) = 3 + \sqrt{5+4x} \Leftrightarrow y^2 + y - 1 = \frac{-1 + \sqrt{5+4x}}{2}.$$

$$\text{Đặt } z = \frac{-1 + \sqrt{5+4x}}{2}, \text{ điều kiện : } z \geq -\frac{1}{2}$$

$$\text{Ta có } 2z+1 = \sqrt{5+4x} \Rightarrow 4z^2 + 4z + 1 = 5 + 4x \Rightarrow z^2 + z + 1 = x.$$

$$\text{Do đó ta có hệ phương trình: } \begin{cases} x^2 + x - 1 = y \\ y^2 + y - 1 = z \quad (*) \\ z^2 + z - 1 = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x+1) = y+1 \\ y(y+1) = z+1 \\ z(z+1) = x+1 \end{cases}$$

Do điều kiện: $z \geq -\frac{1}{2} \Rightarrow y \neq -1 \Rightarrow z \neq -1$. Nhân các phương trình theo vế rồi rút gọn được $xyz = 1$.

Mặt khác từ hệ phương trình (*), cộng các phương trình vế theo vế ta có :

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3 \geq 3\sqrt[3]{xyz} \Rightarrow xyz \leq 1.$$

Do đẳng thức xảy ra nên phải có $x^2 + y^2 + z^2 = 1 \Leftrightarrow x - y - z = 1$ (do $x, y, z \neq -1$)

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Ví dụ 5. Giải các phương trình

$$a. \sqrt{2x^2 + 4x + 7} = x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x - 7 \quad b. \frac{4}{x} + \sqrt{x - \frac{1}{x}} = x + \sqrt{2x - \frac{5}{x}}.$$

$$c. \frac{6-2x}{\sqrt{5-x}} + \frac{6+2x}{\sqrt{5+x}} = \frac{8}{3} \quad d. 2(5x-3)\sqrt{x+1} + 5(x+1)\sqrt{3-x} = 3(5x+1).$$

Lời giải

Cách 1: Biến đổi phương trình như sau:

$$4\sqrt{2x^2 + 4x + 7} = (2x^2 + 4x + 7)^2 - 16(2x^2 + 4x + 7) + 35 \quad (1).$$

Đặt $\sqrt{2x^2 + 4x + 7} = a$ (với $a \geq \sqrt{5}$), ta có :

$$4a = a^4 - 16a^2 + 35 \Leftrightarrow (a^2 - 6)^2 = (2a+1)^2 \Leftrightarrow (a^2 - 2a - 7)(a^2 + 2a - 5) = 0 \quad (*)$$

Với $a \geq \sqrt{5}$ thì $a^2 + 2a - 5 > 0$, nên từ (*) suy ra $a^2 - 2a - 7 = 0$, phương trình này có hai nghiệm là $a = 1 \pm 2\sqrt{2}$. Đối chiếu với điều kiện $a \geq \sqrt{5}$ chỉ chọn được $a = 1 + 2\sqrt{2}$. Khi đó

$\sqrt{2x^2 + 4x + 7} = 1 + 2\sqrt{2} \Leftrightarrow x^2 + 2x - (1 + 2\sqrt{2}) = 0 \quad (**)$. Phương trình (**) có hai nghiệm là $-1 \pm \sqrt{2 + 2\sqrt{2}}$. Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $\{-1 \pm \sqrt{2 + 2\sqrt{2}}\}$.

Cách 2: Biến đổi phương trình về dạng: $\sqrt{2(x+1)^2 + 5} = (x+1)^4 - 3(x+1)^2 - 5$.

Đặt $(x+1)^2 = u; \sqrt{2(x+1)^2 + 5} = v, (u \geq 0; v \geq \sqrt{5})$.

Ta có hệ: $\begin{cases} u^2 - 3u - 5 = v \\ 2u + 5 = v^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^2 - u = v^2 + v \\ 2u + 5 = v^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u - v - 1 = 0 \\ v = \sqrt{2u + 5} \end{cases}$.

Dẫn đến $u^2 - 4u - 4 = 0$, PT này có 2 nghiệm $2 \pm 2\sqrt{2}$. Do $u \geq 0$ nên chọn $u = 2 + 2\sqrt{2}$. Từ đó suy ra kết quả như cách 1.

b. Điều kiện trên ta được: $x \geq \sqrt{\frac{5}{2}}$ hoặc $-1 \leq x < 0$ (*). Phương trình (1) tương đương:

$$\sqrt{x - \frac{1}{x}} - \sqrt{2x - \frac{5}{x}} = x - \frac{4}{x}. \text{ Đặt } u = \sqrt{x - \frac{1}{x}}; v = \sqrt{2x - \frac{5}{x}} \text{ với } u \geq 0; v \geq 0. \text{ Ta được } u - v = x - \frac{4}{x} \quad (1).$$

$$\text{Lại có } v^2 - u^2 = \left(2x - \frac{5}{x}\right) - \left(x - \frac{1}{x}\right) = x - \frac{4}{x} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra: $v^2 - u^2 = u - v \Leftrightarrow (u - v)(u + v + 1) = 0$. Vì $u + v + 1 > 0$ nên

$$\Leftrightarrow x - \frac{4}{x} = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases}$$

Thử lại thấy nghiệm $x = -2$ không thỏa mãn điều kiện, nghiệm $x = 2$ thỏa mãn PT.

c. Điều kiện: $-5 \leq x \leq 5$. Đặt $a = \sqrt{5+x}; b = \sqrt{5-x}$ với $a, b \geq 0$ khi đó ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 10 \\ 2ab(a+b) - 4(a+b) = \frac{8}{3}ab \end{cases}. \text{ Đặt } a + b = S, a.b = P \text{ điều kiện } S^2 \geq 4P \text{ và giải hệ ta thu được:}$$

$$S = 4 \Rightarrow P = 3 \Leftrightarrow \sqrt{5+x} \cdot \sqrt{5-x} = 3 \Leftrightarrow 25 - x^2 = 9 \Leftrightarrow x^2 = 16 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = -4 \end{cases} \quad (TM)$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là: $x = 4; x = -4$.

d. Điều kiện $-1 \leq x \leq 3$. Đặt $\begin{cases} u = \sqrt{x+1} \\ v = \sqrt{3-x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u^2 = x+1 \\ 3u^2 - 2v^2 = 5x-3 \\ 4u^2 - v^2 = 5x+1 \\ u^2 + v^2 = 4 \end{cases}$.

Phương trình đã cho trở thành: $2(3u^2 - 2v^2) + 5uv^2 = 3(4u^2 - v^2) \Leftrightarrow 6u^2(2-u) = v^2(u+3)$.

Thay $v^2 = 4-u$ ta thu được phương trình: $2(3u^2 - 2v^2) + 5uv^2 = 3(4u^2 - v^2)$

$$\Leftrightarrow 6u^2(2-u) = (4-u^2)(u+3) \Leftrightarrow \begin{cases} u = 2 \\ u = \frac{5+\sqrt{145}}{10} \end{cases}$$

Từ đó tìm được các nghiệm của phương trình là: $\begin{cases} x = 3 \\ x = \frac{7+\sqrt{145}}{10} \end{cases}$

Khi gặp các phương trình dạng: $a\sqrt[n]{b+c.f(x)} + d\sqrt[m]{e+h.f(x)} = g$ ta có thể đặt ẩn phụ theo cách:

$$\text{Đặt } \sqrt[n]{b+c.f(x)} = u \Rightarrow f(x) = \frac{u^n - b}{c}, \sqrt[m]{e+h.f(x)} = v \Rightarrow f(x) = \frac{v^m - e}{h}.$$

Từ đó ta có hệ phương trình: $\begin{cases} au + dv = g \\ \frac{u^n - b}{c} - \frac{v^m - e}{h} = 0 \end{cases}$.

Ví dụ 6. Giải các phương trình

a. $\sqrt[3]{24+x} + \sqrt{12-x} = 6$

b. $\sqrt{1-x^2} + \sqrt[4]{x^2+x-1} + \sqrt[6]{1-x} = 1$

c. $1 + \frac{2}{3}\sqrt{x-x^2} = \sqrt{x} + \sqrt{1-x}$

d. $\sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{x-2} = \sqrt[3]{2x-3}$

Lời giải

a. Điều kiện: $x \leq 12$ Đặt $u = \sqrt[3]{24+x}$; $v = \sqrt{12-x} \Rightarrow u \leq \sqrt[3]{36}$, $v \geq 0$, ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} u+v=6 \\ u^3+v^2=36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v=6-u \\ u^3+(6-u)^2=36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v=6-u \\ u(u^2+u-12)=0 (*) \end{cases}$$

Phương trình (*) có 3 nghiệm $u = 0$; $u = -4$; $u = 3$ thỏa mãn $u \leq \sqrt[3]{36}$. Từ đây ta tìm được: $x = -24$; $x = -88$; $x = 3$ Vậy phương trình đã cho có 3 nghiệm $x = -24$; $x = -88$; $x = 3$.b. Điều kiện: $\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \leq x \leq 1$.Ta thấy tổng của biểu thức trong căn bằng 1 nên ta đặt: $a = \sqrt{1-x^2}$, $b = \sqrt[4]{x^2+x-1}$, $c = \sqrt[6]{1-x}$ với

$$a, b, c \geq 0. \text{ Khi đó ta có hệ: } \begin{cases} a+b+c=1 \\ a^2+b^4+c^6=1 \\ a, b, c \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{Vì } \begin{cases} a+b+c=1 \\ a, b, c \geq 0 \end{cases} \Rightarrow 0 \leq a, b, c \leq 1 \Rightarrow \begin{cases} a^2 \leq a \\ b^4 \leq b \Rightarrow a^2+b^4+c^6 \leq 1. \\ c^6 \leq c \end{cases}$$

$$\begin{cases} a=a^2 \\ b=b^4 \Leftrightarrow x=1 \text{ là nghiệm của phương trình đã cho.} \\ c=c^6 \end{cases}$$

c. Đặt $t = \sqrt{x} + \sqrt{1-x} \geq 0$ thì $\sqrt{x-x^2} = \frac{t^2-1}{2}$

Khi đó phương trình đã cho trở thành phương trình bậc hai với ẩn t:

$$1 + \frac{t^2-1}{3} = t \Leftrightarrow t^2 - 3t + 2 = 0 \Leftrightarrow t = 1; t = 2. \text{ Vậy ta có:}$$

$$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{1-x} = 1 \\ \sqrt{x} + \sqrt{1-x} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{x-x^2} = 0 \\ VN (VT < 2) \end{cases} \Leftrightarrow x = 0; x = 1.$$

d. Sử dụng đẳng thức $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$. Lập phương hai vế ta thu được:

$$2x-3 + 3\sqrt[3]{(x-1)(x-2)}(\sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{x-2}) = 2x-3. \text{ Thay } \sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{x-2} = \sqrt[3]{2x-3} \text{ thì phương trình}$$

$$\text{trở thành: } \sqrt[3]{(x-1)(x-2)(2x-3)} = 0 \Rightarrow x \in \left\{1; 2; \frac{3}{2}\right\}.$$

Ví dụ 7. Giải các phương trình.

$$a. \sqrt{7x+7} + \sqrt{7x-6} + 2\sqrt{49x^2+7x-42} = 181-14x$$

$$b. 5\sqrt{x} + \frac{5}{2\sqrt{x}} = 2x + \frac{1}{2x} + 4$$

$$c. x^3 + \sqrt{(1-x^2)^3} = x\sqrt{2(1-x^2)}$$

$$d. (x-1)(x+3) + 2(x-1)\sqrt{\frac{x+3}{x-1}} = 8$$

Lời giải

a. Điều kiện: $x \geq \frac{6}{7}$. Đặt $t = \sqrt{7x+7} + \sqrt{7x-6}$, ($t \geq 0$) $\Rightarrow 14x + 2\sqrt{49x^2+7x-42} = t^2 - 1$.

Phương trình đã cho trở thành: $t + t^2 - 1 = 181 \Leftrightarrow t^2 + t - 182 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 13 \\ t = -14 \end{cases} \Leftrightarrow t = 13$

$\Leftrightarrow \sqrt{7x+7} + \sqrt{7x-6} = 13$ (*). Giải phương trình (*) ta thu được $x = 6$.

Kết hợp với điều kiện suy ra nghiệm của phương trình là $x = 6$.

b. Điều kiện: $x > 0$. Phương trình $\Leftrightarrow 5\left(\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) = 2\left(x + \frac{1}{4x}\right) + 4$. Đặt $t = \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$, ($t \geq \sqrt{2}$)

$\Rightarrow x + \frac{1}{4x} = t^2 - 1$. Phương trình trở thành:

$$5t = 2(t^2 - 1) + 4 \Leftrightarrow 2t^2 - 5t + 2 = 0 \Leftrightarrow t = 2 \Leftrightarrow x + \frac{1}{4x} = 3 \Leftrightarrow 4x^2 - 12x + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3-2\sqrt{2}}{2} \\ x = \frac{3+2\sqrt{2}}{2} \end{cases} \quad \text{là}$$

nghiệm của phương trình.

c. Điều kiện: $-1 \leq x \leq 1$. Phương trình đã cho tương đương với

$(x + \sqrt{1-x^2})(x^2 - x\sqrt{1-x^2} + 1 - x^2) = x\sqrt{2(1-x^2)}$. Đặt $t = x + \sqrt{1-x^2} \Rightarrow \frac{t^2-1}{2} = x\sqrt{1-x^2}$. Ta có

phương trình: $t\left(1 - \frac{t^2-1}{2}\right) = \sqrt{2} \frac{t^2-1}{2} \Leftrightarrow t^3 + \sqrt{2}t^2 - 3t - \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow (t - \sqrt{2})(t^2 + 2\sqrt{2}t + 1) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} t = \sqrt{2} \\ t^2 + 2\sqrt{2}t + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \sqrt{2} \\ t = -\sqrt{2} \pm 1 \end{cases}$

+ Nếu $t = -\sqrt{2} - 1 \Leftrightarrow x + \sqrt{1-x^2} = -1 - \sqrt{2}$ vô nghiệm, do VT $\geq -1 >$ VP

+ Nếu $t = -\sqrt{2} + 1 \Leftrightarrow \sqrt{1-x^2} = 1 - \sqrt{2} - x$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 - \sqrt{2} \\ x^2 - (1 - \sqrt{2})x - \sqrt{2} + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1 - \sqrt{2} - \sqrt{2\sqrt{2}-1}}{2}$

Vậy phương trình có 2 nghiệm $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $x = \frac{1 - \sqrt{2} - \sqrt{2\sqrt{2}-1}}{2}$.

d. Điều kiện: $\frac{x+3}{x-1} \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -3$ hoặc $x > 1$. Đặt $t = (x-1)\sqrt{\frac{x+3}{x-1}}$ thì $t^2 = (x-1)(x+3)$ ta có

phương trình: $t^2 + 2t - 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = -4 \end{cases}$

$$\text{Nếu } t = 2 \Rightarrow (x-1)(x+3) = 4 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 7 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 + 2\sqrt{2} \\ x = -1 - 2\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\text{Nếu } t = -4 \text{ thì } (x-1)(x+3) = 16 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 19 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 + 2\sqrt{5} \\ x = -1 - 2\sqrt{5} \end{cases}$$

Tóm lại phương trình có 4 nghiệm là: $x = -1 + 2\sqrt{2}; x = -1 - 2\sqrt{2}; x = -1 - 2\sqrt{5}; x = -1 + 2\sqrt{5}$

II. MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP KHÁC

KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Lời giải phương trình vô tỉ bằng phương pháp sử dụng biểu thức liên hợp.

Dấu hiệu:

+ Khi ta gặp các bài toán giải phương trình dạng: $\sqrt[n]{f(x)} + \sqrt[m]{g(x)} + h(x) = 0$

Mà không thể đưa về một ẩn, hoặc khi đưa về một ẩn thì tạo ra những phương trình bậc cao dẫn đến việc phân tích hoặc giải quyết khó khăn.

+ Nhằm được nghiệm của phương trình đó bằng thủ công (hoặc sử dụng máy tính cầm tay)

Phương pháp:

Đặt điều kiện chặt của phương trình (nếu có)

Ví dụ: Đối với phương trình: $\sqrt{x^2 + 8} + 2 = \sqrt{x^2 + 3} + 3x$

Nếu bình thường nhìn vào phương trình ta thấy:

Phương trình áp dụng với mọi $x \in \mathbb{R}$. Nhưng đó chưa phải điều kiện chặt. Để giải quyết triệt để phương trình này ta cần đến điều kiện chặt đó là:

Ta viết lại phương trình thành: $\sqrt{x^2 + 8} - \sqrt{x^2 + 3} = 3x - 2$

Đề ý rằng: $\sqrt{x^2 + 8} - \sqrt{x^2 + 3} > 0$ do phương trình có nghiệm khi $3x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{2}{3}$

Nếu phương trình chỉ có một nghiệm x_0 :

Ta sẽ phân tích phương trình như sau: Viết lại phương trình thành:

$$\sqrt[n]{f(x)} - \sqrt[n]{f(x_0)} + \sqrt[m]{g(x)} - \sqrt[m]{g(x_0)} + h(x) - h(x_0) = 0$$

Sau đó nhân liên hợp cho từng cặp số hạng với chú ý:

$$+ (\sqrt[3]{a} - b)(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}) = a - b^3$$

$$+ (\sqrt{a} - b)(\sqrt{a} + b) = a - b^2$$

+ Nếu $h(x) = 0$ có nghiệm $x = x_0$ thì ta luôn phân tích được $h(x) = (x - x_0)g(x)$

Như vậy sau bước phân tích và rút nhân tử chung $x - x_0$ thì phương trình ban đầu trở thành:

$$(x - x_0)A(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - x_0 = 0 \\ A(x) = 0 \end{cases}$$

Việc còn lại là dùng hàm số, bất đẳng thức hoặc những đánh giá cơ bản để kết luận $A(x) = 0$ vô nghiệm

Nếu phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 theo định lý Vi-et đảo ta có nhân tử chung sẽ là:

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2$$

Ta thường làm như sau:

+ Muốn làm xuất hiện nhân tử chung trong $\sqrt[n]{f(x)}$ ta trừ đi một lượng $ax + b$. Khi đó nhân

tử chung sẽ là kết quả sau khi nhân liên hợp của $\sqrt[n]{f(x)} - (ax+b)$

+ Để tìm a, b ta xét phương trình: $\sqrt[n]{f(x)} - (ax+b) = 0$. Để phương trình có hai nghiệm

x_1, x_2 ta cần tìm a, b sao cho
$$\begin{cases} ax_1 + b = \sqrt[n]{f(x_1)} \\ ax_2 + b = \sqrt[n]{f(x_2)} \end{cases}$$

+ Hoàn thành tương tự cho các biểu thức còn lại:

Ta xét các ví dụ sau:

Ví dụ 1

Giải các phương trình:

$$a, \sqrt{x+5} + \sqrt{x+2} + 2x - 1 = 0$$

$$b, \sqrt{5x^3 - 1} + \sqrt[3]{2x - 1} + x - 4 = 0$$

$$c, \sqrt{x-2} + \sqrt{4-x} = 2x^2 - 5x - 3$$

Lời giải

a, Nếu ta bình phương liên tục cho đến lúc hết dấu $\sqrt{}$ thì sẽ tạo ra phương trình bậc 4.

Để ý rằng $x = -1$ là một nghiệm của phương trình nên ta sẽ phân tích để tạo nhân tử chung là $x+1$.

Điều kiện: $x \geq -2$

Khi $x = -1$ thì $\sqrt{x+5} = 2, \sqrt{x+2} = 1$ nên ta viết lại phương trình thành:

$$\sqrt{x+5} - 2 + \sqrt{x+2} - 1 + 2x + 2 = 0 \Leftrightarrow \frac{(\sqrt{x+5}-2)(\sqrt{x+5}+2)}{(\sqrt{x+5}+2)} + \frac{(\sqrt{x+2}-1)(\sqrt{x+2}+1)}{(\sqrt{x+2}+1)} + 2(x+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+1}{(\sqrt{x+5}+2)} + \frac{x+1}{(\sqrt{x+2}+1)} + 2(x+1) = 0 \Leftrightarrow (x+1) \left(\frac{1}{\sqrt{x+5}+2} + \frac{1}{\sqrt{x+2}+1} + 2 \right) = 0(*)$$

Để ý rằng với điều kiện $x \geq -2$ thì $\frac{1}{\sqrt{x+5}+2} + \frac{1}{\sqrt{x+2}+1} + 2 > 0$ nên phương trình (*) có

ng nghiệm duy nhất $x = -1$. Kết luận $x = -1$ là nghiệm của phương trình.

b, Phân tích: Phương trình trong đề bài gồm nhiều biểu thức chứa căn nhưng không quy về một ẩn. Nếu ta lũy thừa để triệt để dấu $\sqrt[3]{}, \sqrt{}$

thì sẽ tạo ra phương trình tối thiểu là bậc 6. Từ đó ta nghĩ đến hướng giải: Sử dụng biểu thức liên hợp để tách nhân tử chung

Điều kiện: $x \geq \sqrt[3]{\frac{1}{5}}$

Ta nhận được nghiệm của phương trình là: $x = 1$. Khi đó

$$\sqrt{5x^3 - 1} = \sqrt{5 - 1} = 2; \sqrt[3]{2x - 1} = \sqrt[3]{2 - 1} = 1$$

Ta viết lại phương trình thành: $\sqrt{5x^3 - 1} - 2 + \sqrt[3]{2x - 1} - 1 + x - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{5x^3 - 5}{\sqrt{5x^3 - 1} + 2} + \frac{2x - 2}{\sqrt[3]{2x - 1} + \sqrt[3]{2x - 1} + 1} + x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1) \left(\frac{5(x^2 + x + 1)}{\sqrt{5x^3 - 1} + 2} + \frac{2x - 21}{\sqrt[3]{2x - 1} + \sqrt[3]{2x - 1} + 1} + 1 \right) = 0$$

Dễ thấy:

Với điều kiện $x \geq \sqrt[3]{\frac{1}{5}}$ thì $\frac{5(x^2+x+1)}{\sqrt{5x^3-1}+2} + \frac{2x-21}{\sqrt[3]{2x-1}+\sqrt[3]{2x-1}+1} + 1 > 0$

Nên phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=1$.

c, Điều kiện: $2 \leq x \leq 4$.

Ta nhận được nghiệm của phương trình là: $x=3$. Khi đó $\sqrt{x-2} = \sqrt{3-2} = 1; \sqrt{4-x} = \sqrt{4-3} = 1$

Từ đó ta có lời giải như sau:

Phương trình đã cho tương đương với: $\sqrt{x-2} - 1 + 1 - \sqrt{4-x} = 2x^2 - 5x - 3$

$$\Leftrightarrow \frac{x-3}{\sqrt{x-2}-1} + \frac{x-3}{1+\sqrt{4-x}} = (x-3)(2x+1) \Leftrightarrow (x-3) \left(\frac{1}{\sqrt{x-2}-1} + \frac{1}{1+\sqrt{4-x}} - (2x+1) \right) = 0$$

$$\begin{cases} x=3 \\ \frac{1}{\sqrt{x-2}-1} + \frac{1}{1+\sqrt{4-x}} - (2x+1) = 0 \end{cases}$$

Để ý rằng với điều kiện $2 \leq x \leq 4$ thì $\frac{1}{\sqrt{x-2}-1} \leq 1; \frac{1}{1+\sqrt{4-x}} \leq 1; (2x+1) \geq 5$ nên

$$\frac{1}{\sqrt{x-2}-1} + \frac{1}{1+\sqrt{4-x}} - (2x+1) < 0$$

Từ đó suy ra $x=3$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

Nhận xét: Để đánh giá phương trình cuối cùng vô nghiệm ta thường dùng các ước lượng cơ bản:

$$A+B \geq A \text{ với } B \geq 0 \text{ từ đó suy ra } \frac{A}{A+B} \leq 1 \text{ với mọi số } A, B \text{ thỏa mãn } \begin{cases} A+B > 0 \\ B \geq 0 \end{cases}$$

Ví dụ 2

Giải các phương trình:

$$a, \sqrt[3]{x^2-1} + x = \sqrt{x^3-2}.$$

$$b, \sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x} - (x-4)\sqrt{x-7} - 3x + 28 = 0$$

Lời giải

a, Điều kiện: $x \geq \sqrt[3]{2}$

Ta nhận được nghiệm $x=3$. Nên phương trình được viết lại như sau:

$$a, \sqrt[3]{x^2-1} - 2 + x - 3 = \sqrt{x^3-2} - 5$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-9}{\sqrt[3]{x^2-1}+2\sqrt{x^3-1}+4} + x-3 = \frac{x^3-27}{\sqrt{x^3-2}+5}$$

$$\Leftrightarrow (x-3) \left(\frac{x+3}{\sqrt[3]{x^2-1}+2\sqrt{x^3-1}+4} + 1 - \frac{x^2+3x+9}{\sqrt{x^3-2}+5} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ \frac{x+3}{\sqrt[3]{x^2-1}+2\sqrt{x^3-1}+4} + 1 - \frac{x^2+3x+9}{\sqrt{x^3-2}+5} = 0 \end{cases}$$

Ta dự đoán $\frac{x+3}{\sqrt[3]{x^2-1}+2\sqrt{x^3-1}+4} + 1 - \frac{x^2+3x+9}{\sqrt{x^3-2}+5} < 0$ (Bằng cách thay một giá trị $x \geq \sqrt[3]{2}$ ta sẽ

thấy $\frac{x+3}{\sqrt[3]{x^2-1}+2\sqrt{x^3-1}+4} + 1 - \frac{x^2+3x+9}{\sqrt{x^3-2}+5} < 0$)

Ta sẽ chứng minh $\frac{x+3}{\sqrt[3]{x^2-1}+2\sqrt{x^3-1}+4} < 1$ và $\frac{x^2+3x+9}{\sqrt{x^3-2}+5} > 2$

Thật vậy:

+ Ta xét: $\frac{x+3}{\sqrt[3]{x^2-1}+2\sqrt{x^3-1}+4} < 1 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x^2-1}+2\sqrt{x^3-1} > x-1$.

Đặt $\sqrt[3]{x^2-1}=t > 0 \Rightarrow x = \sqrt{t^3+1}$. Bất phương trình tương đương với $t^2+2t+1 > \sqrt{t^3+1}$
 $\Leftrightarrow t^4+3t^3+6t^2+4t > 0$. Điều này là hiển nhiên đúng.

+ Ta xét: $\frac{x^2+3x+9}{\sqrt{x^3-2}+5} > 2 \Leftrightarrow x^2+3x-1 > 2\sqrt{x^3-2} \Leftrightarrow x^4+2x^3+7x^2-6x+9 > 0 \forall x \geq 0 (*)$

Điều này luôn đúng. Từ đó suy ra phương trình có nghiệm duy nhất: $x=3$

b, Điều kiện: $x \geq 7$

Để đơn giản ta đặt $\sqrt{x^3}=t \geq \sqrt[3]{7} \Rightarrow x=t^3$

Phương trình đã cho trở thành:

$$t^2 = 2t - (t^3 - 4)\sqrt{t^3 - 7} = 3t^3 + 28 = 0 \Leftrightarrow 3t^3 - t^2 + 2t - 28 + (t^3 - 4)\sqrt{t^3 - 7} = 0$$

Nhắm được $t=2$. Nên ta phân tích phương trình thành :

$$4t^3 - t^2 + 2t - 32 + (t^3 - 4)\sqrt{t^3 - 7} = 0$$

$$\Leftrightarrow (t-2) \left[(4t^2+7t+16) + (t^3-4) \left(\frac{t^2+2t+4}{\sqrt{t^3-7}+1} \right) \right] = 0$$

Để ý rằng $4t^2+7t+16 > 0$ và $t^3 \geq 7$ nên ta có $(4t^2+7t+16) + (t^3-4) \left(\frac{t^2+2t+4}{\sqrt{t^3-7}+1} \right) > 0$. Vì vậy

phương trình có nghiệm duy nhất $t=2 \Leftrightarrow x=8$

Nhận xét: Việc đặt $\sqrt{x^3}=t$ trong bài toán để giảm số lượng dấu căn đã giúp đơn giản hình thức bài toán. Ngoài ra khi tạo liên hợp do $(t^3-4) > 0$ nên ta tách nó ra khỏi biểu thức để các thao tác tính toán được đơn giản hơn.

Ví dụ 3

Giải các phương trình:

a, $4\sqrt{x+3} + \sqrt{19-3x} = x^2 + 2x + 9$

b, $\sqrt{3x-8} - \sqrt{x+1} = \frac{2x-11}{5}$

c, $\sqrt{x+\frac{3}{x}} = \frac{x^2+7}{2(x+1)}$ (Đề tuyển sinh vòng 1 lớp 10 Trường THPT Chuyên Tự nhiên –

ĐHQG Hà Nội 2012)

d, $\frac{x^3+5x^2+4x+2}{x^2+2x+3} = \sqrt{x^2+x+2}$

Lời giải

a, Điều kiện: $-3 \leq x \leq \frac{19}{3}$.

Ta nhắm được hai nghiệm là $x=1, x=-2$ nên ta phân tích để tạo ra nhân tử chung là:

x^2+x-2 . Để được điều này ta thực hiện thêm bớt nhân tử như sau:

+ Ta tạo ra $4\sqrt{x+3} - (ax+b) = 0$ sao cho phương trình này nhận $x=1, x=-2$ là nghiệm.

Để có điều này ta cần: $\begin{cases} a+b=8 \\ -2a+b=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{4}{3} \\ b=\frac{20}{3} \end{cases}$

+ Tương tự $\sqrt{19-3x}-(mx+n)=0$ nhận $x=1, x=-2$ là nghiệm.

Tức là $\begin{cases} m+n=5 \\ -2m+n=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{-1}{3} \\ b=\frac{13}{3} \end{cases}$. Từ đó ta phân tích phương trình thành:

$$4\sqrt{x+3}-\left(\frac{4}{3}x+\frac{20}{3}\right)+\sqrt{19-3x}-\left(\frac{13}{3}-\frac{x}{3}\right)-(x^2+x+2)=0 \quad q$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{3}\left[3\sqrt{x+3}-(x+5)\right]+\frac{3\sqrt{19-3x}-(13-x)}{3}-(x^2+x-2)=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{3}\left[\frac{-x^2-x+2}{3\sqrt{x+3}+(x+5)}\right]+\frac{-x^2-x+2}{3\left[3\sqrt{19-3x}+(13-x)\right]}-(x^2+x-2)=0$$

$$\Leftrightarrow -(x^2+x-2)\left[\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{3\sqrt{x+3}+(x+5)}+\frac{1}{3\sqrt{19-3x}+(13-x)}+1\right]=0$$

Để thấy với $-3 \leq x \leq \frac{19}{3}$ thì $\frac{1}{3\sqrt{x+3}+(x+5)} > 0, \frac{1}{3\sqrt{19-3x}+(13-x)} > 0$.

Nên $\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{3\sqrt{x+3}+(x+5)}+\frac{1}{3\sqrt{19-3x}+(13-x)}+1 > 0$

Phương trình đã cho tương đương với $x^2+x-2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-2 \end{cases}$

Vậy phương trình có 2 nghiệm là: $x=3, x=8$.

b) Điều kiện: $x \geq \frac{8}{3}$.

Phương trình được viết lại như sau: $5\sqrt{3x-8}-5\sqrt{x+1}=2x-11$

Ta nhân được 2 nghiệm $x=3, x=8$ nên suy ra nhân tử chung là: $x^2-11x+24$

Ta phân tích với nhân tử $5\sqrt{3x-8}$ như sau:

+ Tạo ra $5\sqrt{3x-8}-(ax+b)=0$ sao cho phương trình này nhận $x=3, x=8$ là nghiệm. Tức là

a, b cần thỏa mãn hệ: $\begin{cases} 3a+b=5 \\ 8a+b=20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=-4 \end{cases}$

+ Tương tự với $5\sqrt{x+1}-(mx+n)=0$ ta thu được: $\begin{cases} 3m+n=10 \\ 8m+n=15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=1 \\ n=7 \end{cases}$

Phương trình đã cho trở thành:

$$5\sqrt{3x-8} - (3x-4) + (x+7) - 5\sqrt{x+1} = 0 \Leftrightarrow \frac{-9(x^2-11x+24)}{5\sqrt{3x-8} + (3x-4)} + \frac{x^2-11x+24}{(x+7)+5\sqrt{x+1}} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2-11x+24) \left[\frac{-9}{5\sqrt{3x-8} + (3x-4)} + \frac{1}{(x+7)+5\sqrt{x+1}} \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-11x+24=0 \\ \frac{-9}{5\sqrt{3x-8} + (3x-4)} + \frac{1}{(x+7)+5\sqrt{x+1}} = 0 \end{cases}$$

Ta xét $A(x) = \frac{-9}{5\sqrt{3x-8} + (3x-4)} + \frac{1}{(x+7)+5\sqrt{x+1}}$

Ta chứng minh $A(x) < 0$ tức là: $\frac{-9}{5\sqrt{3x-8} + (3x-4)} + \frac{1}{(x+7)+5\sqrt{x+1}} < 0$

$$5\sqrt{3x-8} + 3x - 4 - 9(x+7+5\sqrt{x+1}) < 0$$

$$\Leftrightarrow 3x-8-5\sqrt{3x-8} + \frac{25}{4} + \frac{275}{4} + x + 45\sqrt{x+1} > 0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{3x-8} - \frac{5}{2} \right)^2 + \frac{275}{4} + x + 45\sqrt{x+1} > 0$$

Điều này là hiển nhiên đúng.

Vậy phương trình có 2 nghiệm là: $x=3, x=8$.

Chú ý:

Những đánh giá để kết luận $A(x) < 0$ thường là những bất đẳng thức không chặt chẽ ta luôn đưa về được tổng các biểu thức bình phương.

Ngoài ra nếu tính ý ta có thể thấy: $5\sqrt{3x-8} + 3x - 4 - 9(x+7+5\sqrt{x+1}) < 0$

$5\sqrt{3x-8} + 3x - 4 \leq 9x + 63 + 5\sqrt{81x+81}$. Nhưng điều này là hiển nhiên đúng do:

$$5\sqrt{3x-8} < 5\sqrt{81x+81}; 3x-4 < 9x+63 \text{ với mọi } x \geq \frac{8}{3}.$$

c) Điều kiện: $x > 0$

Ta nhận được $x=1; x=3$ nên biến đổi phương trình như sau:

Ta có: khi $x=1 \Rightarrow \frac{x^2+7}{2(x+1)} = 2$, khi $x=3 \Rightarrow \frac{x^2+7}{2(x+1)} = 2$ nên ta trừ 2 vào 2 vế thì thu được:

$$\sqrt{x+\frac{3}{x}} - 2 = \frac{x^2+7}{2(x+1)} - 2 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x^2+3} - 2\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \frac{x^2-4x+3}{2(x+1)}$$

$$\frac{x^2-4x+3}{\sqrt{x^3+3x+2x}} = \frac{x^2-4x+3}{2(x+1)} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-4x+3=0 & (1) \\ \sqrt{x^3+3x+2x}=2(x+1) & (2) \end{cases}$$

Giải (1) suy ra $x=1; x=3$

Giải (2) ta có: $\sqrt{x^3+3x+2x}=2(x+1) \Leftrightarrow \sqrt{x^3+3x}=2 \Leftrightarrow x^3+3x-4=0 \Leftrightarrow x=1$

Kết luận: Phương trình có nghiệm là $x=1; x=3$.

Nhận xét: Ta cũng có thể phân tích phương trình như câu a, b.

d) Ta có: $x^3+5x^2+4x+2=(x+3)(x^2+2x+3)-5x-7$ nên phương trình tương đương với

$$\frac{x^3 + 5x^2 + 4x + 2}{x^2 + 2x + 3} = \sqrt{x^2 + 2x + 3} \Leftrightarrow x + 3 - \sqrt{x^2 + 2x + 3} - \frac{5x + 7}{x^2 + 2x + 3} = 0$$

$$\Leftrightarrow (5x + 7) \left(\frac{1}{x + 3 + \sqrt{x^2 + 2x + 3}} - \frac{1}{x^2 + 2x + 3} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x + 7 = 0 \\ \frac{1}{x + 3 + \sqrt{x^2 + 2x + 3}} - \frac{1}{x^2 + 2x + 3} = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Giải (1): $\frac{1}{x + 3 + \sqrt{x^2 + 2x + 3}} - \frac{1}{x^2 + 2x + 3} = 0 \Leftrightarrow x^2 + x - \sqrt{x^2 + x + 2} = 0$

Đặt $t = \sqrt{x^2 + x + 2} > 0$. Phương trình trở thành:

$$t^2 - t - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = -1 \end{cases} (l) \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \end{cases}$$

Kết luận: phương trình có 3 nghiệm: $x = -\frac{7}{5}; x = 1; x = -2$.

Ví dụ 4. Giải các phương trình

a) $\sqrt{x^3 + 15} + 2 = \sqrt{x^3 + 8} + 3x$

b) $\sqrt{3x + 1} - \sqrt{x + 3} + 1 - x = 0$.

Lời giải:

a) Phương trình được viết lại như sau: $\sqrt{x^3 + 15} + 2 = \sqrt{x^3 + 8} + 3x \Leftrightarrow \sqrt{x^3 + 15} - \sqrt{x^3 + 8} = 3x - 2$.

Để phương trình có nghiệm ta cần: $3x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{2}{3}$. Nhẩm được $x = 1$ nên ta có thể viết lại

phương trình thành: $\sqrt{x^3 + 15} - 4 = \sqrt{x^3 + 8} - 3 + 3x - 3$

$$\Leftrightarrow (x - 1) \left[\frac{x^2 + x + 1}{\sqrt{x^3 + 15} + 4} - \frac{x^2 + x + 1}{\sqrt{x^3 + 8} + 3} - 3 \right] = 0$$

Để ý rằng: $\frac{x^2 + x + 1}{\sqrt{x^3 + 15} + 4} - \frac{x^2 + x + 1}{\sqrt{x^3 + 8} + 3} - 3 < 0$ nên phương trình có nghiệm duy nhất $x = 1$.

b) Điều kiện $x \in \left[-3; -\frac{1}{3}\right]$

Ta viết lại phương trình như sau: $\sqrt{3x + 1} - \sqrt{x + 3} + 1 - x = 0$.

$$\Leftrightarrow \frac{2x - 2}{\sqrt{3x + 1} + \sqrt{x + 3}} + 1 - x = 0 \Leftrightarrow (2x - 2) \left(\frac{1}{\sqrt{3x + 1} + \sqrt{x + 3}} - \frac{1}{2} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ \sqrt{3x + 1} + \sqrt{x + 3} = 2 \end{cases}$$

Xét phương trình: $\sqrt{3x + 1} + \sqrt{x + 3} = 2$. Bình phương 2 vế ta thu được:

$$4x + 4 + 2\sqrt{(3x + 1)(x + 3)} = 4 \Leftrightarrow \sqrt{(3x + 1)(x + 3)} = -2x \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ x^2 - 10x - 3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = 5 - 2\sqrt{7}$$

Kết luận: Phương trình có 2 nghiệm là $x = 1; x = 5 - 2\sqrt{7}$.

Nhận xét:

+ Ta thấy phương trình có nghiệm $x = 1$. Nếu ta phân tích phương trình thành $\sqrt{3x + 1} - 2 + 2 - \sqrt{x + 3} + 4 - 4x = 0$ thì sau khi liên hợp phương trình mới thu được sẽ là:

$\frac{3x-3}{\sqrt{3x+1}+2} + \frac{1-x}{2+\sqrt{x+3}} + 4-4x=0$. Rõ ràng phương trình hệ quả phức tạp hơn phương trình ban đầu rất nhiều.

+ Đề ý rằng khi $x=1$ thì $\sqrt{3x+1}=\sqrt{x+3}$ nên ta sẽ liên hợp trực tiếp biểu thức $\sqrt{3x+1}-\sqrt{x+3}$

2. Đặt ẩn phụ dựa vào tính đẳng cấp của phương trình

Ta thường gặp phương trình dạng này ở các biến thể như:

$$+ ax^2 + bx + c = d\sqrt{px^3 + qx^2 + rx + t} \quad (1)$$

$$+ ax^2 + bx + c = d\sqrt{px^4 + qx^3 + rx^2 + ex + h} \quad (2)$$

$$+ A\sqrt{ax^2 + bx + c} + B\sqrt{ex^2 + gx + h} = C\sqrt{rx^2 + px + q} \quad (*)$$

Thực chất phương trình (*) khi bình phương 2 vế thì xuất hiện theo dạng (1) hoặc (2).

Để giải các phương trình (1), (2).

Phương pháp chung là:

+ Phân tích biểu thức trong dấu $\sqrt{\quad}$ thành tích của 2 đa thức $P(x), Q(x)$.

+ Ta biến đổi $ax^2 + bx + c = mP(x) + nQ(x)$ bằng cách đồng nhất 2 vế.

Khi đó phương trình trở thành: $mP(x) + nQ(x) = d\sqrt{P(x).Q(x)}$

Chia hai vế cho biểu thức $Q(x) > 0$ ta thu được phương trình:

$$\frac{mP(x)}{Q(x)} + n = d\sqrt{\frac{P(x)}{Q(x)}}. \text{ Đặt } t = \sqrt{\frac{P(x)}{Q(x)}} \geq 0 \text{ thì thu được phương trình:}$$

$$mt^2 - dt + n = 0.$$

Một cách tổng quát: Với mọi phương trình có dạng:

$$aP^n(x) + bQ^n(x) + cP^{n-k}(x)Q^k(x) + d\sqrt[n]{P(x).Q(x)} = 0 \text{ thì ta luôn giải được theo cách trên.}$$

Một số ví dụ:

Ví dụ 1. Giải các phương trình

$$a) 2(x^2 - 3x + 2) = 3\sqrt{x^3 + 8}$$

$$b) x + 1 + \sqrt{x^2 - 4x + 1} = 3\sqrt{x}$$

$$c) 4x^2 + 3(x^2 - x)\sqrt{x+1} = 2(x^3 + 1)$$

Lời giải:

a) Điều kiện: $x \geq -2$.

Ta viết lại phương trình thành: $2(x^2 - 3x + 2) = 3\sqrt{(x+2)(x^2 - 2x + 4)}$

Giả sử $x^2 - 3x + 2 = m(x+2) + n(x^2 - 2x + 4)$. Suy ra m, n phải thỏa mãn

$$\begin{cases} n=1 \\ m-2n=-3 \\ 2m+4n=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=-1 \\ n=1 \end{cases}$$

Phương trình đã cho có dạng:

$$-2(x+2) + 2(x^2 - 2x + 4) - 3\sqrt{(x+2)(x^2 - 2x + 4)} = 0$$

Chia phương trình cho $x^2 - 2x + 4 > 0$ ta thu được: $-2\left(\frac{x+2}{x^2 - 2x + 4}\right) - 3\sqrt{\frac{(x+2)}{(x^2 - 2x + 4)}} + 2 = 0$

Đặt $t = \sqrt{\frac{(x+2)}{(x^2-2x+4)}} \geq 0$, ta thu được phương trình: $-2t^2 - 3t + 2 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = -2 \\ t = \frac{1}{2} \end{cases} \text{ do } t \geq 0 \Rightarrow t = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{(x+2)}{(x^2-2x+4)}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x^2 - 2x + 4 = 4(x+2)$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 6x - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 + \sqrt{13} \\ x = 3 - \sqrt{13} \end{cases}$$

b) Điều kiện: $\begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 - 4x + 1 \geq 0 \end{cases}$

Bình phương 2 vế của phương trình ta thu được:

$$x^2 + 2x + 1 + 2(x+1)\sqrt{x^2 - 4x + 1} + x^2 - 4x + 1 = 9x$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 11x + 2 + 2\sqrt{(x^2 + 2x + 1)(x^2 - 4x + 1)} = 0$$

Giả sử

$$2x^2 - 11x + 2 = m(x^2 + 2x + 1)n(x^2 - 4x + 1) \Rightarrow \begin{cases} m + n = 2 \\ 2m - 4n = -11 \\ m + n = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -\frac{1}{2} \\ n = \frac{5}{2} \end{cases}$$

Phương trình trở thành

$$-\frac{1}{2}(x^2 + 2x + 1) + \frac{5}{2}(x^2 - 4x + 1) + 2\sqrt{(x^2 + 2x + 1)(x^2 - 4x + 1)} = 0$$

Chia phương trình cho $x^2 + 2x + 1 > 0$ ta thu được:

$$-1 + 5\left(\frac{x^2 - 4x + 1}{x^2 + 2x + 1}\right) + 4\sqrt{\frac{x^2 - 4x + 1}{x^2 + 2x + 1}} = 0. \text{ Đặt } t = \sqrt{\frac{x^2 - 4x + 1}{x^2 + 2x + 1}} \geq 0 \text{ ta có phương trình}$$

$$5t^2 + 4t - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = \frac{1}{5} \end{cases} \Leftrightarrow t = \frac{1}{5} \Leftrightarrow \frac{x^2 - 4x + 1}{x^2 + 2x + 1} = \frac{1}{25} \Leftrightarrow 24x^2 - 102x + 24 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{4} \\ x = 4 \end{cases}$$

Kết luận: Phương trình có 2 nghiệm $x = \frac{1}{4}$, $x = 4$.

Nhận xét: Trong lời giải ta đã biến đổi:

$$(x+1)\sqrt{x^2 - 4x + 1} = \sqrt{(x^2 + 2x + 1)(x^2 - 4x + 1)} \text{ là vì } x+1 > 0.$$

c). Điều kiện $x \geq -1$.

$$\text{Ta viết lại phương trình: } (x-1)(2x^2 - 2x - 2 - 3x\sqrt{x+1}) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ 2x^2 - 2x - 2 - 3x\sqrt{x+1} = 0 \end{cases}$$

$$\text{Xét phương trình: } 2x^2 - 2x - 2 - 3x\sqrt{x+1} = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 3x\sqrt{x+1} - 2(x+1) = 0.$$

Dễ thấy $x = -1$ không phải là nghiệm.

Xét $x > -1$ ta chia cho $x+1$ thì thu được phương trình:

$$2\frac{x^2}{x+1} - 3\frac{x}{\sqrt{x+1}} - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{\sqrt{x+1}} = 2 \\ \frac{x}{\sqrt{x+1}} = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Giải (1): $\frac{x}{\sqrt{x+1}} = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 - 4x - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2 + 2\sqrt{2}.$

Giải (2): $\frac{x}{\sqrt{x+1}} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ x^2 - 4x - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1 - \sqrt{17}}{8}.$

Kết hợp điều kiện ta suy ra các nghiệm của phương trình là: $x = 1, x = 2 + \sqrt{2}, x = \frac{1 - \sqrt{17}}{8}.$

Ví dụ 2

Giải các phương trình:

a). $4(2x^2 + 1) + 3(x^2 - 2x)\sqrt{2x - 1} = 2(x^3 + 5x)$ b). $\sqrt{5x^2 + 4x} - \sqrt{x^2 - 3x - 18} = 5\sqrt{x}$

c). $\sqrt{5x^2 - 14x + 9} - \sqrt{x^2 - x - 20} = 5\sqrt{x + 1}$

Lời giải

a). Điều kiện: $x \geq \frac{1}{2}.$

Phương trình đã cho được viết lại như sau:

$$2x^3 - 8x^2 + 10x - 4 - 3x(x - 2)\sqrt{2x - 1} = 0 \Leftrightarrow (x - 2)(2x^2 - 4x + 2) - 3x(x - 2)\sqrt{2x - 1} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 2)\left[(2x^2 - 4x + 2) - 3x\sqrt{2x - 1}\right] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = 0 \\ (2x^2 - 4x + 2) - 3x\sqrt{2x - 1} = 0 \end{cases}$$

Xét phương trình $2x^2 - 4x + 2 - 3x\sqrt{2x - 1} = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 4x + 2 - 3\sqrt{x^2(2x - 1)} = 0.$

Ta giả sử: $2x^2 - 4x + 2 = mx^2 + n(2x - 1) \Rightarrow \begin{cases} m = 2 \\ n = -2 \end{cases}.$

Phương trình trở thành $2x^2 - 2(2x - 1) - 3\sqrt{x^2(2x - 1)} = 0.$ Chia cho $x^2 > 0.$

Ta có: $2 - 2\left(\frac{2x - 1}{x^2}\right) - 3\sqrt{\frac{2x - 1}{x^2}} = 0.$ Đặt $t = \sqrt{\frac{2x - 1}{x^2}} \geq 0,$ phương trình mới là:

$$-2t^2 - 3t + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -2 \\ t = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Với $t = \frac{1}{2}$ ta có $\sqrt{\frac{2x - 1}{x^2}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x^2 - 8x + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 + 2\sqrt{3} \\ x = 4 - 2\sqrt{3} \end{cases}.$

Nhận xét:

+Đối với phương trình $2x^2 - 4x + 2 - 3x\sqrt{2x - 1} = 0$ ta có thể không cần đưa x vào trong dấu $\sqrt{\quad}$ khi đó ta phân tích: $2x^2 - 4x + 2 = mx^2 + n(2x - 1)$ và chia như trên thì bài toán vẫn được giải quyết. Việc đưa vào $\sqrt{\quad}$ là giúp các em học sinh nhìn rõ hơn bản chất bài toán.

+Ngoài ra cần lưu ý rằng khi đưa một biểu thức $P(x)$ vào trong dấu $\sqrt[n]{\quad}$ thì điều kiện $P(x) \geq 0.$ Đây là một sai lầm học sinh thường mắc phải khi giải toán.

$$\text{b). Điều kiện } \begin{cases} x^2 - 3x - 18 \geq 0 \\ x \geq 0 \\ 5x^2 + 4x \geq \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 6.$$

Phương trình đã cho được viết lại thành: $\sqrt{5x^2 + 4x} = \sqrt{x^2 - 3x - 18} + 5\sqrt{x}$.

Bình phương 2 vế và thu gọn ta được $2x^2 - 9x + 9 - 5\sqrt{x(x^2 - 3x - 18)} = 0$.

Nếu ta giả sử $2x^2 - 9x + 9 = mx + n(x^2 - 3x - 18)$ thì m, n phải thỏa mãn
$$\begin{cases} n = 2 \\ m - 3n = -9 \\ -18n = 9 \end{cases}$$

điều này là hoàn toàn vô lý.

Để khắc phục vấn đề này ta có chú ý sau: $x^2 - 3x - 18 = (x - 6)(x + 3)$ khi đó

$$\sqrt{x(x^2 - 3x - 18)} = \sqrt{x(x - 6)(x + 3)} = \sqrt{(x^2 - 6x)(x + 3)}.$$

Bây giờ ta viết lại phương trình $2x^2 - 9x + 9 - 5\sqrt{(x^2 - 6x)(x + 3)} = 0$.

$$\text{Giả sử: } 2x^2 - 9x + 9 = m(x^2 - 6x) + n(x + 3) \Rightarrow \begin{cases} m = 2 \\ -6m + n = -9 \\ n = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ n = 3 \end{cases}.$$

Như vậy, phương trình trở thành $2(x^2 - 6x) + 3(x + 3) - 5\sqrt{(x^2 - 6x)(x + 3)} = 0$.

Chia hai vế cho $x + 3 > 0$ ta thu được: $2\left(\frac{x^2 - 6x}{x + 3}\right) - 5\sqrt{\left(\frac{x^2 - 6x}{x + 3}\right)} + 3 = 0$.

Đặt $t = \sqrt{\left(\frac{x^2 - 6x}{x + 3}\right)} \geq 0$, ta thu được phương trình: $2t^2 - 5t + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = \frac{3}{2} \end{cases}$

$$\text{Trường hợp 1: } t = 1 \Leftrightarrow \sqrt{\left(\frac{x^2 - 6x}{x + 3}\right)} = 1 \Leftrightarrow x^2 - 7x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{7 + \sqrt{61}}{2} \\ x = \frac{7 - \sqrt{61}}{2} \end{cases}.$$

Suy ra $x = \frac{7 + \sqrt{61}}{2}$ thỏa mãn điều kiện.

$$\text{Trường hợp 2: } t = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \sqrt{\left(\frac{x^2 - 6x}{x + 3}\right)} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow 4x^2 - 33x - 27 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 9 \\ x = -\frac{3}{4} \end{cases} \Rightarrow x = 9.$$

Tóm lại: Phương trình có 2 nghiệm là $x = \frac{7 + \sqrt{61}}{2}$ và $x = 9$

c). Điều kiện $x \geq 5$.

Chuyển vế bình phương ta được: $2x^2 - 5x + 2 = 5\sqrt{(x^2 - x - 20)(x + 1)}$.

Giả sử: $2x^2 - 5x + 2 = m(x^2 - x - 20) + n(x + 1)$.

Khi đó ta có: $\begin{cases} m=2 \\ -m+n=-5 \\ -20m+n=2 \end{cases}$ không tồn tại m, n thỏa mãn hệ:

Nhưng ta có $(x^2 - x - 20)(x+1) = (x+4)(x-5)(x+1) = (x+4)(x^2 - 4x - 5)$.

Giả sử: $2x^2 - 5x + 2 = m(x^2 - 4x - 5) + n(x+4)$. Suy ra $\begin{cases} m=2 \\ -4m+n=-5 \\ -5m+4n=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=2 \\ n=3 \end{cases}$

Ta viết lại phương trình: $2(x^2 - 4x - 5) + 3(x+4) = 5\sqrt{(x^2 - 4x - 5)(x+4)}$.

Chia hai vế cho $x+4 > 0$ ta thu được $2\left(\frac{x^2 - 4x - 5}{x+4}\right) - 5\sqrt{\left(\frac{x^2 - 4x - 5}{x+4}\right)} + 3 = 0$.

Đặt $t = \sqrt{\left(\frac{x^2 - 4x - 5}{x+4}\right)} \geq 0$ ta thu được phương trình $2t^2 - 5t + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=1 \\ t=\frac{3}{2} \end{cases}$.

Trường hợp 1: $t=1 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 4x - 5}{x+4} = 1 \Leftrightarrow x^2 - 5x - 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5 + \sqrt{61}}{2} \\ x = \frac{5 - \sqrt{61}}{2} \end{cases}$.

Trường hợp 2: $t = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{x^2 - 4x - 5}{x+4} = \frac{9}{4} \Leftrightarrow 4x^2 - 25x - 56 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=8 \\ x=-\frac{7}{4} \end{cases}$.

Kết hợp điều kiện ta suy ra các nghiệm của phương trình là $x=8$; $x = \frac{5 + \sqrt{61}}{2}$

Ví dụ 3

Giải các phương trình:

a). $\sqrt{x^2 + 2x} + \sqrt{2x - 1} = \sqrt{3x^2 + 4x + 1}$ b). $x^3 - 3x^2 + 2\sqrt{(x+2)^3} - 6x = 0$.

Lời giải

a). Điều kiện: $x \geq \frac{1}{2}$.

Bình phương 2 vế phương trình ta thu được:

$$x^2 + 4x - 1 + 2\sqrt{(x^2 + 2x)(2x - 1)} = 3x^2 + 4x + 1 \Leftrightarrow x^2 + 1 - \sqrt{(x^2 + 2x)(2x - 1)} = 0.$$

Ta giả sử: $x^2 + 1 = m(x^2 + 2x) + n(2x - 1) \Leftrightarrow \begin{cases} m=1 \\ n=-1 \\ 2m+2n=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=1 \\ n=-1 \end{cases}$.

Phương trình trở thành: $(x^2 + 2x) - (2x - 1) - \sqrt{(x^2 + 2x)(2x - 1)} = 0$

$$\Leftrightarrow -\left(\frac{2x-1}{x^2+2x}\right) - \sqrt{\frac{2x-1}{x^2+2x}} + 1 = 0 \quad t = \sqrt{\frac{2x-1}{x^2+2x}} \geq 0 \Rightarrow -t^2 - t + 1 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Về cơ bản đến đây ta hoàn toàn tìm được x . Nhưng với giá trị $\frac{1}{\sqrt[3]{(3x+1)^2}} > 0$ như vậy

việc tính toán sẽ gặp khó khăn.

Để khắc phục ta có thể xử lý theo hướng khác như sau:

Ta viết lại: $\sqrt{(x^2+2x)(2x-1)} = \sqrt{(x+2)(2x^2-x)}$ lúc này bằng cách phân tích như trên ta thu được phương trình:

$$\frac{1}{2}(2x^2-x) + \frac{1}{2}(x+2) - \sqrt{(x+2)(2x^2-x)} = 0 \Leftrightarrow \frac{2x^2-x}{x+2} - 2\sqrt{\frac{2x^2-x}{x+2}} + 1 = 0.$$

Đặt $t = \sqrt{\frac{2x^2-x}{x+2}} \geq 0$, ta được phương trình $t^2 - 2t + 1 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Leftrightarrow 2x^2 - x = x + 2$

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Kiểm tra điều kiện ta thấy chỉ có giá trị $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ là thỏa mãn điều kiện.

b). Điều kiện $x \geq -2$.

Ta viết lại phương trình $x^3 - 3x(x+2) + 2\sqrt{(x+2)^2} = 0$.

Để ý rằng:

Nếu ta đặt $y = \sqrt{x+2}$ thì phương trình trở thành $x^3 - 3xy^2 + 2y^3 = 0$. Đây là một phương trình đẳng cấp bậc 3. Từ định hướng trên ta có lời giải cho bài toán như sau:

+ Xét trường hợp $x = 0$ không thỏa mãn phương trình:

+ Xét $x \neq 0$. Ta chia hai vế phương trình cho x^3 thì thu được:

$$1 - 3\frac{x+2}{x^3} + 2\frac{\sqrt{(x+2)^3}}{x^3} = 0.$$

Đặt $t = \frac{\sqrt{x+2}}{x}$ ta có phương trình $2t^3 - 3t^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -\frac{1}{2} \\ t = 1 \end{cases}$

Trường hợp $t = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x+2}}{x} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2\sqrt{x+2} = -x \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ x^2 - 4x - 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2 - 2\sqrt{3}$

Trường hợp $t = 1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x+2}}{x} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x+2} = x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 - x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2$

Kết luận: Phương trình có 2 nghiệm $x = 2, x = 2 - 2\sqrt{3}$.

Ví dụ 4:

Giải các phương trình:

- a). $2x^3 - x^2 - 3x + 1 = \sqrt{x^5 + x^4 + 1}$ b). $5\sqrt{x^4 + 8x} = 4x^2 + 8$
c). $(x^2 + 4)\sqrt{2x + 4} = 3x^2 + 6x - 4$ d). $(x^2 - 6x + 11)\sqrt{x^2 - x + 1} = 2(x^2 - 4x + 7)\sqrt{x - 2}$

Lời giải

a. Hình thức bài toán dễ làm cho người giải bối rối nhưng để ý thật kỹ ta thấy:

Chìa khóa bài toán nằm ở vấn đề phân tích biểu thức: $x^5 + x^4 + 1$

Ta thấy do vế trái là biểu thức bậc 3 nên ta nghĩ đến phân tích:

$x^5 + x^4 + 1 = (x^2 + ax + 1)(x^3 + bx^2 + cx + 1)$. Đồng nhất hai vế ta thu được:

$a = 1; b = 0; c = -1$. Nên ta viết lại phương trình đã cho thành:

$$2(x^3 - x + 1) - (x^2 + x + 1) - \sqrt{(x^3 - x + 1)(x^2 + x + 1)} = 0$$

Chia cho $x^2 + x + 1 > 0$ ta được:

$$2\left(\frac{x^3 - x + 1}{x^2 + x + 1}\right) - \sqrt{\left(\frac{x^3 - x + 1}{x^2 + x + 1}\right)} - 1 = 0$$

Đặt $t = \sqrt{\left(\frac{x^3 - x + 1}{x^2 + x + 1}\right)} \geq 0$ ta có phương trình: $2t^2 - t - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -\frac{1}{2} \end{cases} (L)$

Giải $t = 1 \Leftrightarrow \frac{x^3 - x + 1}{x^2 + x + 1} = 1 \Leftrightarrow x^3 - x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$

Kết luận: Thử lại ta thấy 3 nghiệm: $x = 0, x = -1, x = 2$ đều thỏa mãn:

b. Điều kiện: $x^4 + 8x \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \neq -2 \end{cases}$

Ta thấy chìa khóa bài nằm ở việc phân tích biểu thức:

$$x^4 + 8x = x(x^3 + 8) = x(x + 2)(x^2 - 2x + 4) = (x^2 + 2x)(x^2 - 2x + 4)$$

Giải sử $4x^2 + 8 = m(x^2 - 2x + 4) + n(x^2 + 2x) \Rightarrow \begin{cases} m + n = 4 \\ -2m + 2n = 0 \Leftrightarrow m = n = 2 \\ 4m = 8 \end{cases}$

Phương trình trở thành:

$2(x^2 - 2x + 4) + 2(x^2 + 2x) - 5\sqrt{(x^2 - 2x + 4)(x^2 + 2x)} = 0$. Chia hai vế cho $x^2 - 2x + 4 > 0$ ta thu được

$2\frac{x^2 + 2x}{x^2 - 2x + 4} - 5\sqrt{\frac{x^2 + 2x}{x^2 - 2x + 4}} + 2 = 0$. Đặt $t = \sqrt{\frac{x^2 + 2x}{x^2 - 2x + 4}} \geq 0$ ta có phương trình:

$$2t^2 - 5t + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Trường hợp 1: $t = 2 \Leftrightarrow \frac{x^2 + 2x}{x^2 - 2x + 4} = 4 \Leftrightarrow 3x^2 - 10x + 16 = 0$ vô nghiệm

Trường hợp 2: $t = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{x^2 + 2x}{x^2 - 2x + 4} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow 3x^2 + 10x - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-5 - \sqrt{37}}{3} \\ x = \frac{-5 + \sqrt{37}}{3} \end{cases}$

Kết luận: Phương trình có hai nghiệm là: $\begin{cases} x = \frac{-5 - \sqrt{37}}{3} \\ x = \frac{-5 + \sqrt{37}}{3} \end{cases}$

Nhận xét: Ta có thể phân tích

$$\sqrt{x^4 + 8x} = \sqrt{x(x^3 + 8)} = \sqrt{x(x + 2)(x^2 - 2x + 4)} = \sqrt{(x^2 + 2x)(x^2 - 2x + 4)}$$

Chú ý: Trong một số phương trình: Ta cần dựa vào tính đẳng cấp của từng nhóm số hạng để từ đó phân tích tạo nhân tử chung.

c. Ta thấy rằng nếu bình phương trực tiếp sẽ dẫn tới phương trình bậc 5.

Để khắc phục điều này ta tìm cách tách $x^2 + 4$ ra khỏi $\sqrt{2x+4}$

Từ đó viết lại phương trình như sau: $(x^2 + 4)\sqrt{2x+4} + x^2 + 4 = 4x^2 + 6x$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 4)(\sqrt{2x+4} + 1) = 2x(2x+3) \Leftrightarrow (x^2 + 4)(\sqrt{2x+4} + 1) = 2x(\sqrt{(2x+4)^2} - 1)$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 4)(\sqrt{2x+4} + 1) = 2x(\sqrt{2x+4} + 1)(\sqrt{2x+4} - 1)$$

Do $\sqrt{2x+4} + 1 > 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\Leftrightarrow x^2 + 4x = 2x(\sqrt{2x+4} - 1) \Leftrightarrow x^2 + 2x + 4 - 2x\sqrt{2x+4} = 0 \Leftrightarrow (x - \sqrt{2x+4})^2 = 0$$

$$x - \sqrt{2x+4} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 1 + \sqrt{5}.$$

Kết luận: Phương trình đã cho có duy nhất nghiệm $x = 1 + \sqrt{5}$

d. Điều kiện: $x \geq 2$

$$\text{Giải sử } x^2 - 6x + 11 = m(x^2 - x + 1) + n(x - 2) \Rightarrow \begin{cases} m = 1 \\ -m + n = -6 \Leftrightarrow m = 1, n = -5 \\ m - 2n = 11 \end{cases}$$

$$x^2 - 4x + 7 = p(x^2 - x + 1) + q(x - 2) \Rightarrow \begin{cases} p = 1 \\ -p + q = -4 \Leftrightarrow p = 1, q = -3 \\ p - 2q = 7 \end{cases}$$

Phương trình đã cho trở thành:

$$[(x^2 - x + 1) - 5(x - 2)]\sqrt{x^2 - x + 1} - 2[(x^2 - x + 1) - 3(x - 2)]\sqrt{x - 2} = 0$$

Chia phương trình cho $\sqrt{(x^2 - x + 1)^3} > 0$ ta thu được:

$$1 - 5\frac{x-2}{x^2-x+1} - 2\sqrt{\frac{x-2}{x^2-x+1}} + 6\sqrt{\left(\frac{x-2}{x^2-x+1}\right)^3} = 0.$$

$$\text{Đặt } t = \frac{x-2}{x^2-x+1} \geq 0 \text{ ta thu được phương trình } 6t^3 - 5t^2 - 2t + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = \frac{1}{3} \\ t = -\frac{1}{2} (L) \end{cases}$$

$$+ \text{ Nếu } t = 1 \Leftrightarrow a = b \Leftrightarrow x^2 - 2x + 3 = 0 \text{ (VN)}$$

$$+ \text{ Nếu } t = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x^2 - 10x + 19 = 0 \Leftrightarrow x = 5 \pm \sqrt{6}$$

Kết luận: $x = 5 \pm \sqrt{6}$

• Giải phương trình vô tỉ bằng phương pháp đặt ẩn phụ không hoàn toàn.

+ Đặt ẩn phụ không hoàn toàn là phương pháp chọn một số hạng trong phương trình làm ẩn sau đó ta quy phương trình ban đầu về dạng một phương trình bậc 2:

$$mt^2 + g(x)t + h(x) = 0 \text{ (phương trình này vẫn còn ẩn } x)$$

+ Vấn đề của bài toán là ta phải chọn giá trị m bằng bao nhiêu để phương trình bậc 2 theo ẩn t có giá trị Δ chẵn ($\Delta = [A(x)]^2$). Như thế việc tính t theo x sẽ dễ dàng hơn.

+ Thông thường khi gặp các phương trình dạng:

$ax^2 + bx + c + (dx + e)\sqrt{px^2 + qx + r} = 0$ thì phương pháp đặt ẩn phụ không hoàn toàn tỏ ra rất hiệu quả:

+ Để giải các phương trình dạng này ta thường làm theo cách:

- Đặt $\sqrt{f(x)} = t \Rightarrow t^2 = f(x)$
- Tạo ra phương trình: $mt^2 + g(x)t + h(x) = 0$

Ta có $\Delta = [g(x)]^2 - 4mh(x) = f_1(m)x^2 + g_1(m)x + h_1(m)$. Để Δ có dạng $[A(x)]^2$ thì điều kiện cần và đủ là $\Delta_m = [g_1(m)]^2 - 4f_1(m)h_1(m) = 0 \Rightarrow m$.

Ta xét các ví dụ sau:

Ví dụ 1

Giải các phương trình sau:

a, $x^2 + 1 - (x+1)\sqrt{x^2 - 2x + 3} = 0$

b, $2\sqrt{2x+4} + 4\sqrt{2-x} = \sqrt{9x^2 + 16}$

c, $(2x+7)\sqrt{2x+7} = 9x^2 + 9x + 7$ (Trích đề TS chuyên tự nhiên – ĐHQG Hà Nội 2009)

d, $x^2 + 3x + 8 = (x+5)\sqrt{x^2 + x + 2}$ (Trích đề TS chuyên toán TP Hà Nội, 2018)

Lời giải

a) Đặt $t = \sqrt{x^2 - 2x + 3} > 0 \Rightarrow t^2 = x^2 - 2x + 3$

Phương trình đã cho trở thành: $x^2 + 1 - (x+1)t = 0$

Ta sẽ tạo ra phương trình: $mt^2 - (x+1)t + x^2 + 1 - m(x^2 - 2x + 3) = 0$

(Ta đã thêm vào mt^2 nên phải bớt đi một lượng $mt^2 = m(x^2 - 2x + 3)$)

Phương trình được viết lại như sau:

$$mt^2 - (x+1)t + (1-m)x^2 + 2mx + 1 - 3m = 0 \Rightarrow \Delta = (x+1)^2 - 4m[(1-m)x^2 + 2mx + 1 - 3m]$$

$$= (4m^2 - 4m + 1)x^2 + (2 - 8m^2)x + 12m^2 - 4m + 1$$

Ta mong muốn

$$\Delta = (Ax + B)^2 \Leftrightarrow \Delta_m = (1 - 4m^2)^2 - (12m^2 - 4m + 1)(4m^2 - 4m + 1) = 0 \Leftrightarrow m = 1$$

Phương trình mới được tạo ra là: $t^2 - (x+1)t + 2x - 2 = 0$

Ta có: $\Delta = x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$

Từ đó ta có:
$$\begin{cases} t = \frac{x+1-(x-3)}{2} = 2 \\ t = \frac{x+1+(x-3)}{2} = x-1 \end{cases}$$

+ Trường hợp 1: $t = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 2x + 3} = 2 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{2}$

+ Trường hợp 2: $t = x-1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 2x + 3} = x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2 - 2x + 3 = x^2 - 2x + 1 \end{cases}$

Phương trình vô nghiệm

Tóm lại: Phương trình có hai nghiệm là $x = 1 \pm \sqrt{2}$

b. Điều kiện $-2 \leq x \leq 2$

Bình phương 2 vế của phương trình và thu gọn ta được: $9x^2 - 16\sqrt{8-2x^2} + 8x - 32 = 0$

Đặt $t = \sqrt{8-2x^2}$ ta tạo ra phương trình là:

$$mt^2 - 16t - m(8-2x^2) + 9x^2 + 8x - 32 = 0 \Leftrightarrow mt^2 - 16t + (9+2m)x^2 + 8x - 8m - 32 = 0$$

$$\Delta' = 64 - m[(9+2m)x^2 + 8x - 8m - 32] = (-2m^2 - 9m)x^2 + 8mx + 8m^2 + 32m + 64$$

$$\text{Ta mong muốn } \Delta'_m = 16m^2 - (-2m^2 - 9m)(8m^2 + 32m + 64) = 0 \Leftrightarrow m = -4$$

Từ đó suy ra phương trình mới là: $-4t^2 - 16t + x^2 + 8x = 0$

$$\text{Tính được } \Delta' = 4x^2 + 32x + 64 = (2x+8)^2 \Rightarrow \begin{cases} t = \frac{8-(2x+8)}{-4} = \frac{x}{2} \\ t = \frac{8+(2x+8)}{-4} = -\frac{x}{2} - 4 \end{cases}$$

$$+ \text{ Trường hợp 1: } t = \frac{x}{2} \Leftrightarrow \sqrt{8-2x^2} = \frac{x}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 4(8-2x^2) = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

$$+ \text{ Trường hợp 2: } t = -\frac{x}{2} - 4 \Leftrightarrow \sqrt{8-2x^2} = -\frac{x}{2} - 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -8 \\ 4(8-2x^2) = (x+8)^2 \end{cases}$$

Tóm lại phương trình có nghiệm duy nhất $x = \frac{4\sqrt{2}}{3}$

c. Đặt $\sqrt{2x+7} = t$ ta tạo ra phương trình $mt^2 - (2x+7)t + x^2 + (9-2m)x + 7 - 7m = 0$

Làm tương tự như trên ta tìm được $m = 1$. Nên phương trình có dạng:

$$t^2 - (2x+7)t + x^2 + 7x = 0 \Rightarrow \Delta = (2x+7)^2 - 4(x^2 + 7x) = 49 \Rightarrow \begin{cases} t = x+7 \\ t = x \end{cases} \text{ giải theo các trường}$$

hợp của t ta tìm được $x = 1 + 2\sqrt{2}$ là nghiệm của phương trình

d. Đặt $t = \sqrt{x^2 + x + 2}$ ta tạo ra phương trình $mt^2 - (x+5)t + (1-m)x^2 + (3-m)x + 8 - 2m = 0$

Làm tương tự như trên ta tìm được $m = 1$ khi đó phương trình trở thành

$$t^2 - (x+5)t + 2x + 4 = 0$$

$$\text{Ta có: } \Delta = (x+5)^2 - 4(2x+6) = x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2 \text{ suy ra } \begin{cases} t = \frac{x+5-(x+1)}{2} = 2 \\ t = \frac{x+5+(x+1)}{2} = x+3 \end{cases}.$$

Từ đó suy ra x

Ví dụ 2. Giải các phương trình sau

a, $10x^2 - 9x - 8x\sqrt{2x^2 - 3x + 1} + 3 = 0$.

b, $x^3 + 6x^2 - 2x + 3 - (5x-1)\sqrt{x^3 + 3} = 0$.

c, $4\sqrt{x+1} - 1 = 3x + 2\sqrt{1-x} + \sqrt{1-x^2}$.

c, $4\sqrt{x+3} = 1 + 4x + \frac{2}{x}$ (**Đề tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán TP HCM, 2018**)

d, $x^2 + 3x + 8 = (x+5)\sqrt{x^2 + x + 2}$ (**Trích đề TS chuyên toán TP Hà Nội, 2018**)

Lời giải

a. Điều kiện: $\begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq \frac{1}{2} \end{cases}$. Đặt $t = \sqrt{2x^2 - 3x + 1}$ ta tạo ra phương trình:

$mt^2 - 8xt + (10 - 2m)x^2 + (3m - 9)x + 3 - m = 0$. Ta có:

$$\Delta = 16x^2 - m[(10 - 2m)x^2 + (3m - 9)x + 3 - m] = 16x^2 - m[(10 - 2m)x^2 + (3m - 9)x + 3 - m]$$

$$= (2m^2 - 10m + 16)x^2 + (9m - 3m^2)x + m^2 - 3m$$

Ta cần: $\Delta_m = (9m - 3m^2)^2 - 4(2m^2 - 10m + 16)(m^2 - 3m) = 0 \Rightarrow m = 3$. Phương trình đã cho trở

thành $3t^2 - 8xt + 4x^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{2}{3}x \\ t = 2x \end{cases}$

Trường hợp 1: $t = \frac{2}{3}x \Leftrightarrow \sqrt{2x^2 - 3x + 1} = \frac{2}{3}x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 9(2x^2 - 3x + 1) = 4x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 14x^2 - 27x + 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ x = \frac{3}{7} \end{cases}$

Trường hợp 2: $t = 2x \Leftrightarrow \sqrt{2x^2 - 3x + 1} = 2x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ -3x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$

Kết luận phương trình có ba nghiệm: $x = \frac{3}{2}$, $x = \frac{3}{7}$, $x = \frac{1}{3}$

b, Điều kiện: $x \geq 1$. Đặt $t = \sqrt{x^3 + 3} \geq 0 \Leftrightarrow x^3 = t^2 - 3$. Do hệ số của x^3 trong phương trình là 1; Phương trình đã cho trở thành: $t^2 - (5x - 1)t + 6x^2 - 2x = 0$

$\Delta = (5x - 1)^2 - 4(6x^2 - 2x) = x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$. Suy ra $\begin{cases} t = \frac{(5x - 1) - (x - 1)}{2} = 2x \\ t = \frac{(5x - 1) + (x - 1)}{2} = 3x - 1 \end{cases}$

Trường hợp 1: $\sqrt{x^3 + 3} = 2x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^3 - 4x^2 + 3x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{3 + \sqrt{21}}{2} \\ x = \frac{3 - \sqrt{21}}{2} (L) \end{cases}$

Trường hợp 2: $\sqrt{x^3 + 3} = 3x - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{3} \\ x^3 - 9x^2 + 6x + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 4 + 2\sqrt{3} \\ x = 4 - 2\sqrt{3} (L) \end{cases}$

Tóm lại phương trình có ba nghiệm: $x = 1$, $x = \frac{3 + \sqrt{21}}{2}$, $x = 4 + 2\sqrt{3}$

c, Điều kiện: $-1 \leq x \leq 1$. Ta viết phương trình thành: $4\sqrt{x+1} - 2\sqrt{1-x} = 3x + 1 + \sqrt{1-x^2}$. Bình phương hai vế ta thu được phương trình mới:

$$16(x+1) + 4(1-x) - 16\sqrt{1-x^2} = 9x^2 + 6x + 1 + 2(3x+1)\sqrt{1-x^2} + 1 - x^2$$

$\Leftrightarrow 8x^2 - 6x - 18 + (6x + 18)\sqrt{1-x^2} = 0$. Đặt $t = \sqrt{1-x^2}$ ta tạo ra phương trình:

$$mt^2 + (6x+18)t + (8+m)x^2 - 6x - 18 - m = 0, \text{ có } \Delta' = (3x+9)^2 - m[(m+8)x^2 - 6x - 18 - m]$$

$$= (9-8m-m^2)x^2 + (54+6m)x + m^2 + 18m + 81$$

$$\text{Ta mong muốn } \Delta = (Ax+B)^2 \Leftrightarrow \Delta' = (3m+27)^2 - (9-8m-m^2)(m^2+18m+81) = 0$$

Từ đó ta tính được: $m = -8$

Phương trình đã cho trở thành: $-8t^2 + (6x+18)t - 6x - 10 = 0$

$$\text{Ta có } \Delta' = (3x+9)^2 - 8(6x+10) = (3x+1)^2. \text{ Suy ra } \begin{cases} t = \frac{-3x-9-(3x+1)}{2} = \frac{3x+5}{4} \\ t = \frac{-3x-9+(3x+1)}{-8} = 1 \end{cases}$$

Trường hợp 1: $t=1 \Leftrightarrow \sqrt{1-x^2} = 1 \Leftrightarrow x=0$ thỏa mãn điều kiện

$$\text{Trường hợp 2: } t = \frac{3x+5}{4} \Leftrightarrow 4\sqrt{1-x^2} = 3x+5 \Leftrightarrow 16(1-x^2) = 9x^2 + 30x + 25$$

$$16(1-x^2) = 9x^2 + 30x + 25 \Leftrightarrow 25x^2 + 30x + 9 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-3}{5}$$

Thử lại ta thấy: $x = \frac{-3}{5}$ thỏa mãn phương trình;

Kết luận: Phương trình có 2 nghiệm: $x=0$, $x = \frac{-3}{5}$

Chú ý: Ở bước cuối cùng khi giải ra nghiệm ta phải thử lại vì phép bình phương lúc đầu khi ta giải là không tương đương.

d, Ta viết lại phương trình thành: $4x\sqrt{x+3} = 4x^2 + x + 2$. Đặt $t = \sqrt{x+3} \geq 0$, ta tạo ra phương trình: $mt^2 - 4tx + 4x^2 + (1-m)x + 2 - 3m = 0$ từ đó dễ tìm được $m=1$ và phương trình trở thành:

$$t^2 - 4tx + 4x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2x+1 \\ t = 2x-1 \end{cases} \text{ công việc khá đơn giản, dành cho các bạn học sinh.}$$

Ví Dụ 3: Giải các phương trình sau:

$$a, 3(\sqrt{2x^2+1}-1) = x(1+3x+8\sqrt{2x^2+1})$$

$$b, \sqrt{x^2+3x+6} + \sqrt{2x^2-1} = 3x+1$$

Lời giải

a, Ta viết lại phương trình thành: $3x^2 + x + 3 + 4x\sqrt{2x^2+1} = 0$

Đặt $t = \sqrt{2x^2+1} \geq 0$ suy ra $t^2 = 2x^2+1$. Ta tạo ra phương trình

$$mt^2 - (8x-3)t + (3-2m)x^2 + x + 3 - m = 0. \text{ Ta có } \Delta = (8x-3)^2 - 4m[(3-2m)x^2 + x + 3 - m]$$

$$(8m^2 - 12m + 64)x^2 - (48+4m)x + 4m^2 - 12m + 9.$$

$$\text{Ta cần: } \Delta'_m = (24+2m)^2 - (8m^2 - 12m + 64)(4m^2 - 12m + 9) = 0 \Rightarrow m = 3$$

Phương trình trở thành: $3t^2 + (8x-3)t - 3x^2 + x = 0$

$$\text{Ta có: } \Delta = (8x-3)^2 - 12(-3x^2+x) = 100x^2 - 60x + 9 = (10x-3)^2.$$

$$\text{Từ đó ta tính được: } \begin{cases} t = \frac{3x-8-(10x-3)}{6} = -3x+1 \\ t = \frac{3x-8+(10x-3)}{6} = -\frac{x}{3} \end{cases}$$

Trường hợp 1: $\sqrt{2x^2+1} = -3x+1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{1}{3} \\ 9x^2 - 6x = 0 \end{cases}$

Trường hợp 2: $\sqrt{2x^2+1} = -\frac{x}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ 18x^2 + 9 = 0 \end{cases} \quad (VN)$

Vậy phương trình trên có nghiệm duy nhất $x=0$

b, Điều kiện $x \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$. Ta viết lại phương trình thành: $\sqrt{x^2+3x+6} = 3x+1 - \sqrt{2x^2-1}$

Bình phương hai vế và thu gọn ta được phương trình mới: $10x^2+3x-6-2(3x+1)\sqrt{2x^2-1}=0$.

Đặt $t = \sqrt{2x^2-1} \geq 0$ suy ra $t^2 = 2x^2-1$. Ta tạo ra phương trình:

$$mt^2 - 2(3x+1)t + (10-2m)x^2 + 3x - 6 + m = 0. \text{ Ta có } \Delta' = (3x+1)^2 - m[(10-2m)x^2 + 3x - 6 + m]$$

$$= (2m^2 - 10m + 9)x^2 + (6-3m)x - m^2 + 6m + 1.$$

Ta cần chứng minh: $\Delta_m = (6-3m)^2 - 4(2m^2-10m+9)(-m^2+6m+1) = 0 \Rightarrow m=4$

Phương trình trở thành: $4t^2 - 2(3x+1)t + 2x^2 + 3x - 2 = 0$

Ta có: $\Delta' = (3x+1)^2 - 4(2x^2+3x-2) = x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$.

Từ đó ta tính được:
$$\begin{cases} t = \frac{3x+1-(x-3)}{4} = \frac{x+2}{2} \\ t = \frac{3x+1+(x-3)}{4} = \frac{2x-1}{2} \end{cases}$$

Trường hợp 1: $\sqrt{2x^2-1} = \frac{x+2}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ 7x^2 - 4x - 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2+2\sqrt{5}}{7} \\ x = \frac{2-2\sqrt{5}}{7} \end{cases}$

Đối chiếu với điều kiện ban đầu ta thấy chỉ có $x = \frac{2+2\sqrt{5}}{7}$ là thỏa mãn điều kiện

Trường hợp 2: $\sqrt{2x^2-1} = \frac{2x-1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ 4x^2 + 4x - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-1-\sqrt{6}}{2} \\ x = \frac{-1+\sqrt{6}}{2} \end{cases}$

Đối chiếu với điều kiện ban đầu ta thấy chỉ có $x = \frac{-1-\sqrt{6}}{2}$ là thỏa mãn điều kiện

Vậy phương trình trên có 2 nghiệm là: $x = \frac{2+2\sqrt{5}}{7}$ và $x = \frac{-1-\sqrt{6}}{2}$

III. SỬ DỤNG HẰNG ĐẲNG THỨC ĐỂ GIẢI PHƯƠNG TRÌNH

KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Các bài toán giải được bằng hằng đẳng thức thường có dạng:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = e(fx+h)\sqrt{px+q} \text{ hoặc } ax^3 + bx^2 + cx + d = e(fx+h)\sqrt[3]{px^3 + qx^2 + rx + s}$$

Phương pháp chung để giải bài toán này là: Đặt $\sqrt[n]{f(x)} = y$ với $n=2$ hoặc $n=3$.

Đưa phương trình ban đầu về dạng $m(Ax+B)^3 + n(Ax+B) = my^3 + ny$

Ví dụ 1: Giải các phương trình:

a, $8x^3 - 36x^2 + 53x - 25 = \sqrt[3]{3x-5}$

b, $8x^3 - 13x^2 + 7x = 2\sqrt[3]{x^2+3x-3}$

c, $\sqrt[3]{24x-11} - 16x\sqrt{2x-1} - 1 = 0$

d, $x^3 = 6\sqrt[3]{6x+4} + 4$

e, $x^3 + 1 = 2\sqrt[3]{2x-1}$

f, $(4x^2+1)x = (3-x)\sqrt{5-2x}$

Lời giải

Những phương trình có dạng: $ax^3 + bx^2 + cx + d = (ex+h)\sqrt{px+q}$ (1)

Hoặc: $ax^3 + bx^2 + cx + d = e\sqrt[3]{px^3 + qx^2 + rx + s}$ (2) ta thường giải theo cách:

Đối với (1): Đặt $\sqrt{px+q} = y$ Khi đó $x = \frac{y^2 - p}{q}$ thay vào phương trình ta đưa về dạng:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = Ay^3 + By. \text{ Sau đó biến đổi phương trình thành: } A[u(x)]^3 + B.u(x) = Ay^3 + By$$

Đối với (2): Đặt $g\sqrt[3]{px^3 + qx^2 + rx + s} = y$ sau đó tạo ra hệ tạm:

$$\begin{cases} ax^3 + bx^2 + cx + d = s.y \\ g^3(px^3 + qx^2 + rx + h) = y^3 \end{cases}, \text{ cộng hai phương trình về dạng:}$$

$$Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = s.y + y^3, \text{ sau đó đưa phương trình về dạng:}$$

$$[u(x)]^3 + s.[u(x)] = y^3 + s.y$$

Ta xét các ví dụ sau:

a, Đặt $\sqrt[3]{3x-5} = y$ ta có hệ sau:
$$\begin{cases} 8x^3 - 36x^2 + 53x - 25 = y \\ 3x - 5 = y^3 \end{cases} \quad (1)$$

Cộng hai vế của phương trình với nhau ta được:

$$8x^3 - 36x^2 + 56x - 30 = y^3 \quad (*). \text{ Ta nghĩ đến việc biến đổi vế trái thành:}$$

$$[A(x)]^3 + A(x) \text{ để phương trình có dạng: } [A(x)]^3 + A(x) = y^3 + y$$

$$\text{Giả sử: } 8x^3 - 36x^2 + 56x - 30 = (2x+a)^3 + (2x+a).$$

$$\text{Đồng nhất hệ số của } x^2 \Rightarrow a = -3$$

$$\text{Như vậy phương trình } (*) \text{ có dạng: } (2x-3)^3 + (2x-3) = y^3 + y \quad (1)$$

$$\text{Đặt } z = (2x-3). \text{ Từ phương trình ta suy ra } z^3 + z = y^3 + y$$

$$z^3 + z = y^3 + y \Leftrightarrow (z-y)(z^2 + zy + y^2 + 1) = 0.$$

$$\text{Do } z^2 + zy + y^2 + 1 = \left(z + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 + 1 > 0, \forall y, z \Rightarrow PT \Leftrightarrow y = z$$

$$\Leftrightarrow y = 2x - 3 \Leftrightarrow 8x^3 - 36x^2 + 53x - 25 = 2x - 3 \Leftrightarrow 8x^3 - 36x^2 + 51x - 22 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5 \pm \sqrt{3}}{4} \\ x = 2 \end{cases}$$

Qua ví dụ trên ta thấy việc chuyển qua hệ tạm (1) giúp ta hình dung bài toán trở được dễ dàng hơn.

b, Đặt $\sqrt[3]{x^2+3x-3} = y$ ta có hệ sau:
$$\begin{cases} 8x^3 - 13x^2 + 7x = 2y \\ x^2 + 3x - 3 = y^3 \end{cases}$$

Cộng hai vế của phương trình với nhau ta được:

$$8x^3 - 12x^2 + 10x - 3 = y^3 + 2y \Leftrightarrow (2x-1)^3 + 2(2x-1) = y^3 + 2y \quad (*)$$

Đặt $z = (2x-1)$. Từ phương trình ta suy ra $z^3 + 2z = y^3 + 2y$

$$\Leftrightarrow (z-y)(z^2 + zy + y^2 + 2) = 0 \Leftrightarrow z = y \Leftrightarrow y = 2x-1 \Leftrightarrow 8x^3 - 13x^2 + 7x = 4x - 2$$

$$\Leftrightarrow 8x^3 - 13x^2 + 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{5 \pm \sqrt{89}}{16} \end{cases}$$

c, Điều kiện $x \geq \frac{1}{2}$. Ta đặt $\sqrt{2x-1} = a \geq 0$ thì phương trình đã cho trở thành:

$$\sqrt[3]{12a^2+1} - 8a^3 - 8a - 1 = 0 \Leftrightarrow 8a^3 + 8a + 1 = \sqrt[3]{12a^2+1} \text{ Đặt } \sqrt[3]{12a^2+1} = y \text{ ta có hệ sau:}$$

$$\begin{cases} 8a^3 + 8a + 1 = y \\ 12a^2 + 1 = y^3 \end{cases} \text{ Cộng hai phương trình của hệ với nhau ta thu được:}$$

$$(2a+1)^3 + (2a+1) = y^3 + y \quad (*)$$

Đặt $z = (2a+1)$. Ta có: $z^3 + z = y^3 + y$. Tương tự như cách giải trên ta suy ra: $z = y$

Theo (*) ta có $\Leftrightarrow y = 2a+1 \Rightarrow 8a^3 + 8a + 1 = 2a+1 \Leftrightarrow a = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

Kết luận $x = \frac{1}{2}$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

d, Đặt $y = \sqrt[3]{6x+4}$ ta có hệ sau:

$$\begin{cases} x^3 - 4 = 6y \\ 6x + 4 = y^3 \end{cases} \Leftrightarrow x^3 + 6x = y^3 + 6y \Leftrightarrow (x-y)(x^2 + xy + y^2 + 6) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

Thay vào phương trình ta có: $x^3 - 6x - 4 = 0 \Leftrightarrow (x+2)(x^2 - 2x - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 1 + \sqrt{3} \\ x = 1 - \sqrt{3} \end{cases}$

e, Đặt $y = \sqrt[3]{2x-1}$ ta có hệ:

$$\begin{cases} x^3 + 1 = 2y \\ 2x = y^3 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow x^3 + 2x = y^3 + 2y \Leftrightarrow (x-y)(x^2 + xy + y^2 + 2) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

$$\text{Suy ra } x^3 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 + x - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \\ x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

$$(4x^2 + 1)x = (3-x)\sqrt{5-2x}$$

f, Đặt $\sqrt{5-2x} = y \geq 0 \Rightarrow x = \frac{5-y^2}{2}$ thay vào ta có:

$$(4x^2 + 1)x = \left(3 - \frac{5-y^2}{2}\right)y \Leftrightarrow 8x^3 + 2x = y^3 + 2y \Leftrightarrow (2x-y)(4x^2 + 2xy + y^2 + 2) = 0$$

$$y = 2x \Leftrightarrow 4x^2 + 2x - 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-1+\sqrt{21}}{2} \\ x = \frac{-1-\sqrt{21}}{2} \end{cases} \text{ Thử lại ta thấy chỉ có } x = \frac{-1+\sqrt{21}}{2} \text{ thỏa mãn điều kiện}$$

bài toán.

Ví dụ 2. Giải các phương trình

a, $7x^2 - 13x + 8 = 2x^2 \sqrt[3]{x(1+3x-3x^2)}$

b, $3x^3 + 4x^2 - 1 = \sqrt[3]{x^6 + 2x^3 + x^2}$

c, $\left(\frac{x^3 - x}{2}\right)^3 = 2x + \sqrt[3]{\frac{x^3 + 3x}{2}}$

Lời giải:

a, Nhận thấy $x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình:

Chia hai vế phương trình cho x^3 ta thu được: $\frac{7}{x} - \frac{13}{x^2} + \frac{8}{x^3} = 2\sqrt[3]{\frac{1}{x^2} + \frac{3}{x} - 3}$.

Đặt $y = \sqrt[3]{\frac{1}{x^2} + \frac{3}{x} - 3}$ ta thu được hệ sau:
$$\begin{cases} \frac{7}{x} - \frac{13}{x^2} + \frac{8}{x^3} = 2y \\ \frac{1}{x^2} + \frac{3}{x} - 3 = y^3 \end{cases}$$

Cộng hai phương trình của hệ ta có:

$$\frac{8}{x^3} - \frac{12}{x^2} + \frac{10}{x} - 3 = y^3 + 2y \Leftrightarrow \left(\frac{2}{x} - 1\right)^3 + 2\left(\frac{2}{x} - 1\right) = y^3 + 2y \quad (*)$$

Đặt $z = \frac{2}{x} - 1$ ta thu được: $z^3 + 2z = y^3 + 2y \Rightarrow (z - y)(z^2 + zy + y^2 + 2) = 0 \Leftrightarrow z = y$

$$\Leftrightarrow y = \frac{2}{x} - 1 \Leftrightarrow \frac{7}{x} - \frac{13}{x^2} + \frac{8}{x^3} = \frac{4}{x} - 2 \Leftrightarrow \frac{8}{x^3} - \frac{13}{x^2} + \frac{3}{x} + 2 = 0.$$

Suy ra $x = 1$, $x = \frac{-5 \pm \sqrt{89}}{4}$

b, Nhận thấy $x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình trên nên ta chia cả hai vế phương trình cho x thì thu được phương trình tương đương là: $3x^2 + 4x - \frac{1}{x} = \sqrt[3]{x^3 + 2 + \frac{1}{x}}$.

Đặt $y = \sqrt[3]{x^3 + 2 + \frac{1}{x}}$ ta có hệ sau:
$$\begin{cases} 3x^2 + 4x - \frac{1}{x} = y \\ x^3 + 2 + \frac{1}{x} = y^3 \end{cases}$$
. Cộng hai phương trình của hệ ta có:

$$(x+1)^3 + (x+1) = y^3 + y.$$

Từ phương trình ta suy ra $y = x+1 \Leftrightarrow 3x^2 + 4x - \frac{1}{x} = x+1$

$$3x^2 + 4x - \frac{1}{x} = x+1 \Leftrightarrow 3x^3 + 3x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

c, Ta viết lại phương trình thành: $(x^3 - x)^3 - 16x = 4\sqrt[3]{4x^3 + 12x}$

Đặt $y = \sqrt[3]{4x^3 + 12x}$ ta có hệ tạm sau:
$$\begin{cases} (x^3 - x)^3 - 16x = 4y \\ 4x^3 + 12x = y^3 \end{cases}$$

Cộng hai vế hệ phương trình ta thu được: $(x^3 - x)^3 + 4(x^3 - x) = y^3 + 4y$ Đặt $z = x^3 - x$ ta có:

$$z^3 + 4z = y^3 + 4y \Leftrightarrow (z - y)(z^2 + yz + y^2 + 4) = 0 \Leftrightarrow (x^3 - x)^3 = 4x^3 + 12x$$

$$\Leftrightarrow x[x^2(x^2 - 1)^3 - 4x^2 - 12] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = 3 \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho có 3 nghiệm là: $x = 0; x = \pm\sqrt{3}$

IV. PHƯƠNG PHÁP ĐÁNH GIÁ

Những kỹ thuật quan trọng để giải phương trình giải bằng phương pháp đánh giá ta thường sử dụng là:

+ Dùng hằng đẳng thức: $A_1^2 + A_2^2 + \dots + A_n^2 = 0 \Leftrightarrow A_1 = A_2 = \dots = A_n = 0$

+ Dùng các bất đẳng thức cổ điển Cô si, Bunhiacopski, Bất đẳng thức hình học;

+ Dùng phương pháp khảo sát hàm số để tìm.

Ví dụ 1. Giải các phương trình

a, $4x^2 + 3x + 3 = 4x\sqrt{x+3} + 2\sqrt{2x-1}$.

b, $13\sqrt{x-1} + 9\sqrt{x+1} = 16x$.

c, $x(5x^3 + 2) - 2(\sqrt{2x+1} - 1) = 0$

(Trích Đề tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán trường Chuyên Amsterdam, 2014).

d, $\sqrt{x-1} + 2\sqrt{y-4} + 3\sqrt{z-9} = \frac{1}{2}(x+y+z)$.

Lời giải:

a, Điều kiện: $x \geq -\frac{1}{2}$. Ta viết lại phương trình thành:

$$4x^2 - 4x\sqrt{x+3} + (x+3) + 2x - 1 - 2\sqrt{2x-1} + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2x - \sqrt{x+3})^2 + (\sqrt{2x-1} - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - \sqrt{x+3} = 0 \\ \sqrt{2x-1} - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$$

b, Điều kiện: $x \geq 1$. Ta viết lại phương trình thành:

$$13\left(x - 1 - \sqrt{x-1} + \frac{1}{4}\right) + 3\left(x + 1 - 3\sqrt{x+1} + \frac{9}{4}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow 13\left(\sqrt{x-1} - \frac{1}{2}\right)^2 + 3\left(\sqrt{x+1} - \frac{3}{2}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-1} - \frac{1}{2} = 0 \\ \sqrt{x+1} - \frac{3}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{5}{4}$$

c, Điều kiện $x \geq -\frac{1}{2}$. Ta viết lại phương trình:

$$5x^4 + (2x + 1 - 2\sqrt{2x+1} + 1) = 0 \Leftrightarrow 5x^4 + (\sqrt{2x+1} - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \sqrt{2x+1} - 1 = 0 \end{cases}$$

Suy ra $x = 0$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

d, Điều kiện $x \geq 1; y \geq 4; z \geq 9$ ta viết lại phương trình thành:

$$2\sqrt{x-1} + 4\sqrt{y-4} + 6\sqrt{z-9} = x + y + z$$

$$\Leftrightarrow x-1-2\sqrt{x-1}+1+y-4-4\sqrt{y-4}+4+z-9-6\sqrt{z-9}+9=0$$

$$(\sqrt{x-1}-1)^2 + (\sqrt{y-4}-2)^2 + (\sqrt{z-9}-3)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-1}-1=0 \\ \sqrt{y-4}-2=0 \\ \sqrt{z-9}-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=8 \\ z=18 \end{cases}$$

Ví dụ 2. Giải các phương trình

a, $16x^4 + 5 = 6\sqrt[3]{4x^3 + x}$

b, $4x^4 + x^2 + 3x + 4 = 3\sqrt[3]{16x^3 + 12x}$

c, $96x^2 - 20x + 2 + x\sqrt{8x-1} - \sqrt[3]{4x(8x+1)} = 0$

Lời giải

a, Vì $16x^4 + 5 > 0$ nên phương trình đã cho có nghiệm khi $4x^3 + x \geq 0 \Leftrightarrow x(4x^2 + 1) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$.

Để ý rằng khi $x = \frac{1}{2}$ thì VT = VP nên ta nghĩ đến sử dụng bất đẳng thức Cô si sao cho dấu

bằng xảy ra khi $x = \frac{1}{2}$. Mặt khác, khi $x = \frac{1}{2} \Rightarrow 4x^3 + x = 4 \cdot \frac{1}{8} + \frac{1}{2} = 1$ thì từ những cơ sở trên ta

có lời giải như sau: Theo bất đẳng thức Cô si dạng $3\sqrt[3]{abc} \leq a + b + c$ ta có

$$\text{Ta có } 6\sqrt[3]{4x^3 + x} = 2.3.\sqrt[3]{(4x^3 + x).1.1} \leq 2(4x^3 + x + 1 + 1) = 8x^3 + 2x + 4$$

Mặt khác ta có:

$$16x^4 + 5 - (8x^3 + 2x + 4) = 16x^4 - 8x^3 - 2x + 1 = (2x-1)^2(4x^2 + 2x + 1) \geq 0$$

$$\text{Suy ra VT = VP. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi } \begin{cases} 2(2x-1)^2(4x^2 + 2x + 1) = 0 \\ 4x = (4x^2 + 1) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

Tóm lại: Phương trình có nghiệm duy nhất $x = \frac{1}{2}$.

b, Vì $4x^4 + x^2 + 3x + 4 > 0$ nên phương trình đã cho có nghiệm khi

$$16x^3 + 12x \geq 0 \Leftrightarrow 4x(4x^2 + 3) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0. \text{ Để ý rằng khi } x = \frac{1}{2} \text{ thì VT = VP nên ta nghĩ đến sử}$$

dụng bất đẳng thức Cô si sao cho dấu bằng xảy ra khi $x = \frac{1}{2}$. Khi $x = \frac{1}{2}$ thì

$$16x^3 + 12x = 16 \cdot \frac{1}{8} + 12 \cdot \frac{1}{2} = 8. \text{ Từ những cơ sở trên ta có lời giải như sau:}$$

Theo bất đẳng thức Cô si dạng $3\sqrt[3]{abc} \leq a + b + c$ ta có

$$3\sqrt[3]{16x^3 + 12x} = \frac{3}{4}\sqrt[3]{16x^3 + 12x.8.8} \leq \frac{1}{4}(16x^3 + 12x + 8 + 8) = 4x^3 + 3x + 4$$

Mặt khác ta có:

$$4x^4 + x^2 + 3x + 4 - (4x^3 + 3x + 4) = 4x^4 - 4x^3 + x^2 = x^2(2x-1)^2 \geq 0.$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi } \begin{cases} x^2(2x-1)^2 = 0 \\ 2 = x(4x^2 + 3) \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}.$$

c, Điều kiện: $x \geq \frac{1}{8}$. Để ý rằng $x = \frac{1}{8}$ là nghiệm của phương trình nên ta có lời giải như sau:

$$\sqrt[3]{4x(8x+1)} = \sqrt[3]{1 \cdot 1 \cdot 4x(8x+1)} \leq \frac{1+1+4x(8x+1)}{3} = \frac{32x^2+4x+2}{3}.$$

Mặt khác, ta có:

$$96x^2 - 20x + 2 - \frac{32x^2+4x+2}{3} = \frac{256x^2 - 64x + 4}{3} = \frac{4(8x-1)^2}{3} \geq 0.$$

Suy ra $96x^2 - 20x + 2 + x\sqrt{8x-1} - \sqrt[3]{4x(8x+1)} \geq 0$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = \frac{1}{8}$

Ví dụ 3. Giải các phương trình

a, $\frac{1}{\sqrt{2x-1}} + \frac{1}{\sqrt[4]{4x-3}} = \frac{2}{x}$

b, $\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{2x-1}} = \sqrt{3} \left(\frac{1}{\sqrt{4x-1}} + \frac{1}{\sqrt{5x-2}} \right)$

c, $\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{2x-1} = \sqrt[4]{\frac{4x-1}{3}} + \sqrt[4]{\frac{5x-2}{3}}$

d, $\sqrt{-x^2+4x+21} - \sqrt{-x^2+3x+10} = \sqrt{2}$

Lời giải

a, Điều kiện: $x > \frac{1}{2}$.

Phương trình đã cho có thể viết lại như sau: $\frac{x}{\sqrt{2x-1}} + \frac{x}{\sqrt[4]{4x-3}} = 2$

+ Ta chứng minh: $\frac{1}{\sqrt{2x-1}} \geq 1$. Thật vậy, bất đẳng thức tương đương với

$$x^2 \geq 2x-1 \Leftrightarrow (x-1)^2 \geq 0. \text{ Điều này là hiển nhiên đúng.}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x=1$

Ta chứng minh: $\frac{x}{\sqrt[4]{4x-3}} \geq 1$. Thật vậy, bất đẳng thức tương đương với

$$x^4 \geq 4x-3 \Leftrightarrow x^4 - 4x + 3 \geq 0 \Leftrightarrow (x^2 - 2x + 1)(x^2 + 2x + 3) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2(x^2 + 2x + 3) \geq 0$$

Điều này là hiển nhiên đúng. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x=1$

Từ đó suy ra VT ≥ 2 . Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x=1$

b, $\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{2x-1}} = \sqrt{3} \left(\frac{1}{\sqrt{4x-1}} + \frac{1}{\sqrt{5x-2}} \right)$

Ta thấy rằng: $4x-1 = x+x+2x-1$; $5x-2 = x+2x-1+2x-1$

Theo bất đẳng thức Cô si ta có:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{2x-1}} \right) (\sqrt{x} + \sqrt{x} + \sqrt{2x-1}) \geq 9$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{2x-1}} \geq \frac{9}{\sqrt{x} + \sqrt{x} + \sqrt{2x-1}}$$

Mặt khác, ta có:

$$(\sqrt{x} + \sqrt{x} + \sqrt{2x-1})^2 \leq 3(4x-1) \Rightarrow \sqrt{x} + \sqrt{x} + \sqrt{2x-1} \leq \sqrt{3(4x-1)}$$

(Theo bất đẳng thức Bunhiacopxki cho 3 số)

$$\text{Từ đó suy ra: } \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{2x-1}} \geq \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{4x-1}}$$

Tương tự ta cũng có : $\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{2}{\sqrt{2x-1}} \geq \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{5x-2}}$

Cộng hai bất đẳng thức cùng chiều ta có : $\frac{3}{\sqrt{x}} + \frac{3}{\sqrt{2x-1}} \geq \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{4x-1}} + \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{5x-2}}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{2x-1}} \geq \sqrt{3} \left(\frac{1}{\sqrt{4x-1}} + \frac{1}{\sqrt{5x-2}} \right)$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x=1$

c, Áp dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz dạng : $(ax+by+cz)^2 \leq (a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)$

ta có : $(\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{2x-1})^2 \leq (1+1+1)(\sqrt{x} + \sqrt{x} + \sqrt{2x-1})$

$$\Leftrightarrow \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{2x-1} \leq \sqrt{3(\sqrt{x} + \sqrt{x} + \sqrt{2x-1})}. \text{ Lại có } \sqrt{x} + \sqrt{x} + \sqrt{2x-1} \leq \sqrt{3(4x-1)} \text{ suy ra}$$

$$\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{2x-1} \leq \sqrt[4]{3\sqrt{3(4x-1)}} = \sqrt[4]{27(4x-1)} \quad (1)$$

$$\text{Tương tự : } \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{2x-1} + \sqrt[4]{2x-1} \leq \sqrt[4]{3\sqrt{3(5x-2)}} = \sqrt[4]{27(5x-2)} \quad (2)$$

Cộng hai bất đẳng thức cùng chiều (1),(2) , ta có :

$$3(\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{2x-1}) \leq \sqrt[4]{27(4x-1)} + \sqrt[4]{27(5x-2)} \Leftrightarrow \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{2x-1} \leq \sqrt[4]{\frac{4x-1}{3}} + \sqrt[4]{\frac{5x-2}{3}}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=1$.

$$\text{d, Ta có } VT = \sqrt{(x+3)(7-x)} - \sqrt{(x+2)(5-x)} = \frac{x+11}{\sqrt{(x+3)(7-x)} + \sqrt{(x+2)(5-x)}}$$

Điều kiện xác định là $-2 \leq x \leq 5$

Theo bất đẳng thức AM-GM ta có :

$$\sqrt{(x+3)(7-x)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(2x+6)(7-x)} \leq \frac{1}{2\sqrt{2}} [(2x+6) + (7-x)] = \frac{x+13}{2\sqrt{2}}$$

$$\text{Và } \sqrt{(x+2)(5-x)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(2x+4)(5-x)} \leq \frac{1}{2\sqrt{2}} [(2x+4) + (5-x)] = \frac{x+9}{2\sqrt{2}}$$

$$\text{Nhu vậy: } \sqrt{(x+3)(7-x)} + \sqrt{(x+2)(5-x)} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} (x+11)$$

Từ đó suy ra: $VT = \frac{x+11}{\sqrt{(x+3)(7-x)} + \sqrt{(x+2)(5-x)}} \geq \sqrt{2}$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} (2x+6) = (7-x) \\ (2x+4) = (5-x) \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$$

Vậy $x = \frac{1}{3}$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

Ví dụ 4: Giải các phương trình sau:

$$a, \sqrt{3x^2-1} + \sqrt{x^2-x} - x\sqrt{x^2+1} = \frac{1}{2\sqrt{2}}(7x^2-x+4)$$

$$b, \sqrt{13x^2-6x+10} + \sqrt{5x^2-13x+\frac{17}{2}} + \sqrt{17x^2-48x+36} = \frac{1}{2}(36x-8x^2-21)$$

$$c, \sqrt{x^2+x-1} + \sqrt{-x^2+x+1} = x^2-x+2$$

Lời giải

a, Điều kiện: $x \geq 1 \vee x \leq -\frac{1}{\sqrt{3}}$

Áp dụng BĐT Cauchy – Shwarz cho hai bộ số $(1; 1; -x)$ và $(\sqrt{3x^2-1}; \sqrt{x^2-x}; \sqrt{x^2+1})$ ta có:

$VT(*) \leq \sqrt{(x^2+2)(5x^2-x)}$. Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $x=1$. Do $x \geq 1 \vee x \leq -\frac{1}{\sqrt{3}}$ nên

$5x^2-x > 0$. Áp dụng BĐT Cauchy ta có:

$$VP(*) = \frac{1}{2\sqrt{2}}[5x^2-x+2(x^2+1)] \geq \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot 2\sqrt{(5x^2-x)2(x^2+2)} = \sqrt{(5x^2-x)(x^2+2)}$$

Dấu của đẳng thức xảy ra khi $x=-1$ và $x=\frac{4}{3}$. Từ đó ta có nghiệm của PT (*) là: $x=-1$

b, Ta có:

$$VT = \sqrt{(3x+1)^2 + (2x-3)^2} + \sqrt{\left(2x-\frac{5}{2}\right)^2 + \left(x-\frac{3}{2}\right)^2} + \sqrt{x^2 + (4x-6)^2}$$

$$\geq |3x+1| + \left|2x-\frac{5}{2}\right| + |x| \Rightarrow VT \geq \left|3x+1+2x-\frac{5}{2}+x\right| = \left|6x-\frac{3}{2}\right| \geq 6x-\frac{3}{2}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=\frac{3}{2}$. Mặt khác ta cũng có

$$VP = \frac{1}{2}[12x-3-2(4x^2-12x+9)] = \frac{1}{2}[12x-3-2(x-3)^2] \leq \frac{1}{2}(12x-3) = 6x-\frac{3}{2}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=\frac{3}{2}$. Từ đó ta có nghiệm của phương trình là $x=\frac{3}{2}$.

c, Theo bất đẳng thức AM-GM ta có: $\sqrt{x^2+x-1} = \sqrt{1(x^2+x-1)} \leq \frac{1}{2}[1+(x^2+x-1)] = \frac{x^2+x}{2}$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $1=x^2+x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-2 \end{cases}$

$\sqrt{-x^2+x+1} = \sqrt{1(-x^2+x+1)} \leq \frac{1}{2}[1+(-x^2+x+1)] = \frac{-x^2+x+2}{2}$. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ

khi $1=-x^2+x+1 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=0 \end{cases}$. Từ đó suy ra $VT \leq \frac{x^2+x}{2} + \frac{-x^2+x+2}{2} = (x+1)$.

Mặt khác ta có $x^2-x+2-(x+1) = (x-1)^2 \geq 0$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=1$

Từ đó suy ra phương trình có nghiệm duy nhất $x=1$.

Ví dụ 5. Giải các phương trình sau :

$$a, \sqrt[3]{14-x^3} + x = 2(1+\sqrt{x^2-2x-1}) \quad b, x\sqrt{x} + \sqrt{x+12} = 12(\sqrt{5-x} + \sqrt{4-x})$$

Lời giải :

a, Điều kiện: $x^2-2x-1 \geq 0$

Phương trình đã cho tương đương với: $\sqrt[3]{14-x^3} = 2\sqrt{x^2-2x-1} + 2-x$

Do $2\sqrt{x^2-2x-1} \geq 0$ nên từ phương trình ta cũng suy ra: $\sqrt[3]{14-x^3} \geq 2-x$

Lập phương hai vế ta thu được: $14-x^3 \geq (2-x)^3 \Leftrightarrow 6(x^2-2x-1) \leq 0$

Như vậy phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $x^2-2x-1=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1+\sqrt{2} \\ x=1-\sqrt{2} \end{cases}$

Kết luận: Phương trình có 2 nghiệm là: $x=1+\sqrt{2}$ và $x=1-\sqrt{2}$

b, Điều kiện : $0 \leq x \leq 4$.

Xét $f(x) = x\sqrt{x} + \sqrt{x+12}$ trên $[0;4]$. Dễ thấy $\sqrt{12} = f(0) \leq f(x) \leq f(4) = 12 \Rightarrow VT \leq 12$ (1)

Xét $1 = g(4) \leq g(x) \leq g(0) = \sqrt{5}$. Suy ra $VP \geq 12$ (2)

Từ (1),(2) suy ra phương trình có nghiệm khi $VT = VP = 12 \Leftrightarrow x = 4$.

CHỦ ĐỀ 6: MỘT SỐ KỸ THUẬT CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC**I. BIẾN ĐỔI TƯƠNG ĐƯƠNG****KIẾN THỨC CẦN NHỚ**

Để chứng minh bất đẳng thức $A \geq B$. Tư tưởng của phương pháp là biến đổi tương đương bất đẳng thức trên thành một bất đẳng thức phổ biến là các dạng sau:

+ Sử dụng định nghĩa bất đẳng thức: $A \geq B \Leftrightarrow A - B \geq 0$

+ Dạng tổng bình phương: $A \geq B \Leftrightarrow mX^2 + nY^2 + kZ^2 \geq 0$, với các số m, n, k không âm

+ Dạng tích hai thừa số cùng dấu: $A \geq B \Leftrightarrow X.Y \geq 0$ hoặc $A \geq B \Leftrightarrow X^{2n}.Y \geq 0$

MỘT SỐ VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1: Chứng minh các bất đẳng thức sau với a, b là số thực bất kỳ.

$$a, a^2 + b^2 \geq 2ab$$

$$b, 2(a^2 + b^2) \geq (a + b)^2$$

$$c, (a + b)^2 \geq 4ab$$

$$d, a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca.$$

$$e, 3(a^2 + b^2 + c^2) \geq (a + b + c)^2$$

$$f, (a + b + c)^2 \geq 3(ab + bc + ca).$$

$$g, a^2 + b^2 + c^2 + 3 \geq 2(a + b + c).$$

$$h, \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq a + b + c \text{ với } a, b, c > 0$$

Lời giải:

a, Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với $a^2 + b^2 \geq 2ab$ (*)

$\Leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 \geq 0 \Leftrightarrow (a - b)^2 \geq 0$ rõ ràng bất đẳng thức này luôn đúng. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b$.

b, Cộng hai vế (*) với $a^2 + b^2$ ta thu được bất đẳng thức cần chứng minh.

c, Cộng 2 vế (*) với $2ab$ ta thu được bất đẳng thức cần chứng minh.

d, Từ $a^2 + b^2 \geq 2ab$, tương tự ta cũng có: $b^2 + c^2 \geq 2bc$; $c^2 + a^2 \geq 2ca$ cộng 3 bất đẳng thức cùng chiều ta có: $2(a^2 + b^2 + c^2) \geq 2(ab + bc + ca) \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$ (**)

Ngoài ra ta cũng có thể làm cách khác :

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ac \Leftrightarrow 2(a^2 + b^2 + c^2) \geq 2(ab + bc + ac)$$

$$\Leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 + b^2 - 2bc + c^2 + c^2 - 2ac + a^2 \geq 0 \Leftrightarrow (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \geq 0.$$

Bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

e. Nhân hai vế (**) với 2 rồi cộng hai vế với $a^2 + b^2 + c^2$. Ta thu được bất đẳng thức cần chứng minh.

f. cộng 2 vế (**) với $2(ab + bc + ca)$ ta thu được điều phải chứng minh.

g. Ta viết lại bất đẳng thức cần chứng minh thành: $a^2 - 2a + 1 + b^2 - 2b + 1 + c^2 - 2c + 1 \geq 0$

$$\Leftrightarrow (a - 1)^2 + (b - 1)^2 + (c - 1)^2 \geq 0. \text{ Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi } a = b = c = 1.$$

h. Với mọi số thực dương a, b, c và số thực k thỏa mãn $0 \leq k \leq 1$. ta có :

$$(a - b)^2 \geq 0 \Rightarrow (1 - k)(a - b)^2 \geq 0 \Leftrightarrow (a - b)^2 \geq k(a - b)^2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab + k(a - b)^2$$

Chia hai vế cho $b > 0$ ta thu được: $\frac{a^2}{b} + b \geq 2a + k \frac{(a - b)^2}{b}$, tương tự ta cũng có hai bất đẳng thức nữa và cộng lại thì ta thu được :

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} + a + b + c \geq 2a + 2b + 2c + k \left[\frac{(a - b)^2}{b} + \frac{(b - c)^2}{c} + \frac{(c - a)^2}{a} \right]$$

Hay $\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq a + b + c + k \left[\frac{(a-b)^2}{b} + \frac{(b-c)^2}{c} + \frac{(c-a)^2}{a} \right] \geq a + b + c$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Ví dụ 2.

Cho các số thực không âm a, b . Chứng minh các đẳng thức sau:

- $a^3 + b^3 \geq ab(a + b)$.
- $4(a^3 + b^3) \geq (a + b)^3$.
- $(ax + by)^2 \leq (a^2 + b^2)(x^2 + y^2)$.
- $\frac{1}{a^2 + 1} + \frac{1}{b^2 + 1} \geq \frac{2}{1 + ab}$ với $a, b \geq 1$.
- $\frac{1}{a^2 + 1} + \frac{1}{b^2 + 1} \leq \frac{2}{1 + ab}$ với $a, b \leq 1$.
- $\frac{1}{(a+1)^2} + \frac{1}{(b+1)^2} \geq \frac{1}{ab+1}$.
- $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} \geq \frac{(x+y)^2}{a+b}$ với $a, b, x, y > 0$.
- $(ax + by + cz)^2 \leq (a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2)$.
- $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} \geq \frac{(x+y+z)^2}{a+b+c}$ với $a, b, c, x, y, z > 0$.
- $\frac{1}{1+a^3} + \frac{1}{1+b^3} + \frac{1}{1+c^3} \geq \frac{3}{1+abc}$ với $a, b, c \geq 1$.
- $a^4 + b^4 + c^4 \geq abc(a + b + c)$.

Lời giải:

a. Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với : $a^3 + b^3 - ab(a + b) \geq 0$

$\Leftrightarrow (a + b)(a^2 - ab + b^2 - ab) \geq 0 \Leftrightarrow (a + b)(a - b)^2 \geq 0$. Bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b$.

b. Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với : $4(a^3 + b^3) - (a + b)^3 \geq 0$

$\Leftrightarrow (a + b)[4(a^2 - ab + b^2) - (a + b)^2] \geq 0 \Leftrightarrow (a + b)[3(a - b)]^2 \geq 0$. Bất đẳng thức cuối cùng

luôn đúng. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b$.

c. Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) - (ax + by)^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2x^2 + a^2y^2 + b^2x^2 + b^2y^2 - a^2x^2 - 2abxy - b^2y^2 \geq 0$$

Hay $a^2y^2 - 2abxy + b^2x^2 \geq 0 \Leftrightarrow (ay - bx)^2 \geq 0$. Bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $ax = by$.

d. Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với:

$$\frac{a^2 + b^2 + 2}{(a^2 + 1)(b^2 + 1)} \geq \frac{2}{1 + ab} \Leftrightarrow (a^2 + b^2 + 2)(1 + ab) \geq 2(a^2 + 1)(b^2 + 1)$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + a^3b + ab^3 + 2ab + 2 \geq 2a^2b^2 + 2a^2 + 2b^2 + 2 \Leftrightarrow a^3b - 2a^2b^2 + ab^3 - (a^2 - 2ab + b^2) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow a^3b - 2a^2b^2 + ab^3 - (a^2 - 2ab + b^2) \geq 0 \Leftrightarrow ab(a^2 - 2ab + b^2) - (a^2 - 2ab + b^2) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (ab-1)(a-b)^2 \geq 0. \text{ Bất đẳng thức luôn đúng với mọi số thực } a, b \text{ và } ab \geq 1.$$

e. Làm tương tự câu d.

f. Áp dụng bất đẳng thức ở câu c ta có :

$$(a+1)^2 = \left(\sqrt{ab} \cdot \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} + 1.1 \right)^2 \leq (ab+1) \left(\frac{a}{b} + 1 \right) = \frac{(ab+1)(a+b)}{b} \Rightarrow \frac{1}{(a+1)^2} \geq \frac{b}{(a+b)(ab+1)}.$$

Tương tự ta cũng có : $\frac{1}{(b+1)^2} \geq \frac{a}{(a+b)(ab+1)}$, cộng hai bất đẳng thức cùng chiều ta thu

được:

$$\frac{1}{(a+1)^2} + \frac{1}{(b+1)^2} \geq \frac{b}{(a+b)(ab+1)} + \frac{a}{(a+b)(ab+1)} = \frac{1}{ab+1}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ

khi $a = b = 1$.

g. Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với :

$$\frac{bx^2 + ay^2}{ab} \geq \frac{(x+y)^2}{a+b} \Leftrightarrow (a+b)(bx^2 + ay^2) \geq ab(x+y)^2$$

$$\Leftrightarrow abx^2 + aby^2 + b^2x^2 + a^2y^2 \geq abx^2 + aby^2 + 2abxy \Leftrightarrow b^2x^2 - 2abxy + a^2y^2 \geq 0 \Leftrightarrow (bx - ay)^2 \geq 0.$$

Rõ ràng bất đẳng thức cuối luôn đúng. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $ay = bx$.

h) Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với :

$$(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) - (ax + by + cz)^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow a^2(x^2 + y^2 + z^2) + b^2(x^2 + y^2 + z^2) + c^2(x^2 + y^2 + z^2) - (a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 + 2abxy + 2bcyz + 2cazx) \geq 0.$$

$$\Leftrightarrow (a^2y^2 - 2abxy + b^2x^2) + (b^2z^2 - 2bcyz + c^2y^2) + (c^2x^2 - 2cazx + a^2z^2) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (ay - bx)^2 + (bz - cy)^2 + (cx - az)^2 \geq 0. \text{ Bất đẳng thức này luôn đúng. Dấu đẳng thức xảy ra}$$

$$\text{khi và chỉ khi } \begin{cases} ay = bx \\ bz = cy \\ cx = az \end{cases} \Leftrightarrow \frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}.$$

i) Áp dụng bất đẳng thức ở câu g liên tục hai lần ta có :

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} \geq \frac{(x+y)^2}{a+b} + \frac{z^2}{c} \geq \frac{(x+y+z)^2}{a+b+c} \text{ (đpcm). Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi}$$

$$\begin{cases} ay = bx \\ c(x+y) = z(a+b) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a}{x} = \frac{b}{y} \\ \frac{a+b}{x+y} = \frac{c}{z} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}.$$

Cách khác : Áp dụng bất đẳng thức ở câu h ta có :

$$(x+y+z)^2 = \left(\frac{x}{\sqrt{a}} \cdot \sqrt{a} + \frac{y}{\sqrt{b}} \cdot \sqrt{b} + \frac{z}{\sqrt{c}} \cdot \sqrt{c} \right)^2 \leq \left(\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} \right) (a+b+c)$$

Hay $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} \geq \frac{(x+y+z)^2}{a+b+c}$ (đpcm).

Các bất đẳng thức ở câu g, h, i còn có tên gọi là bất đẳng thức Cauchy – Schwarz. Đây là những bất đẳng thức cơ sở để giải quyết hầu hết các bài toán chứng minh bất đẳng thức Học sinh cần nắm chắc phần này.

j. Áp dụng bất đẳng thức ở câu d) liên tục hai lần ta có :

$$\frac{1}{1+a^3} + \frac{1}{1+b^3} + \frac{1}{1+c^3} + \frac{1}{1+abc} \geq \frac{2}{1+\sqrt{a^3b^3}} + \frac{2}{1+\sqrt{abc^4}} \geq \frac{4}{1+\sqrt{a^3b^3}\sqrt{abc^4}} = \frac{4}{1+abc}.$$

Hay $\frac{1}{1+a^3} + \frac{1}{1+b^3} + \frac{1}{1+c^3} \geq \frac{3}{1+abc}$, Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

k) Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$a^4 + b^4 + c^4 - a^2bc - b^2ac - c^2ab \geq 0 \Leftrightarrow 2a^4 + 2b^4 + 2c^4 - 2a^2bc - 2b^2ac - 2c^2ab \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a^2 - b^2)^2 + 2a^2b^2 + (b^2 - c^2)^2 + 2b^2c^2 + (c^2 - a^2)^2 + 2a^2c^2 - 2a^2bc - 2b^2ac - 2c^2ab \geq 0.$$

$$\Leftrightarrow (a^2 - b^2)^2 + (b^2 - c^2)^2 + (c^2 - a^2)^2 + (ab - bc)^2 + (bc - ac)^2 + (ab - ac)^2 \geq 0.$$

$a^4 + b^4 + c^4 \geq abc(a+b+c)$. Vậy đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Cách khác :

Áp dụng bất đẳng thức $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$ với $x=a^2, y=b^2, z=c^2$ ta thu được

$$a^4 + b^4 + c^4 \geq a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \geq ab.bc + bc.ca + ca.ab = abc(a+b+c).$$

Ví dụ 3.

Chứng minh rằng :

a. $\frac{a^3+b^3}{ab} + \frac{b^3+c^3}{bc} + \frac{c^3+a^3}{ca} \geq 2(a+b+c)$ với các số thực dương a, b, c

b. $a\sqrt{b-1} + b\sqrt{a-1} \leq ab$ với $a, b \geq 1$.

c. $\frac{4a^2b^2}{(a^2+b^2)^2} + \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} \geq 3$ với $a, b \neq 0$.

d. $\frac{a^2b}{2a^3+b^3} + \frac{2}{3} \geq \frac{a^2+2ab}{2a^2+b^2}$ với $a, b > 0$.

e. Tìm hằng số k lớn nhất sao cho $\frac{k}{a^3+b^3} + \frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} \geq \frac{16+4k}{(a+b)^3}$ với $a, b > 0$.

f. $\frac{2ab}{(a+b)} + \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq \sqrt{ab} + \frac{a+b}{2}$ với $a, b > 0$.

Lời giải

a. Trước hết ta chứng minh bất đẳng thức $x^3 + y^3 \geq xy(x+y)$ với x, y là các số dương.

$$\text{Thật vậy } x^3 + y^3 \geq xy(x+y) \Leftrightarrow (x+y)(x^2 + y^2 - xy) \geq xy(x+y) \Leftrightarrow (x-y)^2 \geq 0.$$

Áp dụng bất đẳng thức trên ta được :

$$\frac{a^3+b^3}{ab} + \frac{b^3+c^3}{bc} + \frac{c^3+a^3}{ca} \geq \frac{ab(a+b)}{ab} + \frac{bc(b+c)}{bc} + \frac{ca(c+a)}{ca} = 2(a+b+c)$$

$$\frac{a^3+b^3}{ab} + \frac{b^3+c^3}{bc} + \frac{c^3+a^3}{ca} \geq 2(a+b+c)$$

b. Đặt $x = \sqrt{a-1}$; $y = \sqrt{b-1}$ khi đó $x \geq 0$; $y \geq 0$.

Bất đẳng thức cần chứng minh được viết lại thành $(x^2+1)y + (y^2+1)x \leq (x^2+1)(y^2+1)$
 $\Leftrightarrow (x^2+1)(y^2+1) - 2(x^2+1)y + (x^2+1)(y^2+1) - 2(y^2+1)x \geq 0$.

$\Leftrightarrow (x^2+1)(y-1)^2 + (y^2+1)(x-1)^2 \geq 0$. Bất đẳng thức cuối cùng đúng. Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = 1$ hay $a = b = 2$.

c. Cách 1: Bất đẳng thức đã cho tương đương với.

$$\frac{4a^2b^2}{(a^2+b^2)^2} - 1 + \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} - 2 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{4a^2b^2 - (a^2 - b^2)^2}{(a^2+b^2)^2} + \frac{a^4 - 2a^2b^2 + b^4}{a^2b^2} \geq 0.$$

$$\Leftrightarrow \frac{-(a^2-b^2)^2}{(a^2+b^2)^2} + \frac{(a^2-b^2)^2}{a^2b^2} \geq 0 \Leftrightarrow (a^2-b^2)^2 \left[\frac{1}{a^2b^2} - \frac{1}{(a^2+b^2)^2} \right] \geq 0.$$

$$\Leftrightarrow \frac{(a^2-b^2)^2 \left[(a^2+b^2)^2 - a^2b^2 \right]}{a^2b^2(a^2+b^2)^2} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(a^2-b^2)^2(a^4+b^4+a^2b^2)}{a^2b^2(a^2+b^2)^2} \geq 0.$$

Bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng. Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = \pm b$.

Cách 2. Bất đẳng thức được viết lại thành $\frac{4a^2b^2}{(a^2+b^2)^2} + \frac{(a^2+b^2)^2}{a^2b^2} \geq 5$. Đặt $t = \left(\frac{2ab}{a^2+b^2} \right)^2$.

Khi đó ta được $0 < t \leq 1$. Suy ra $\frac{(a^2+b^2)^2}{a^2b^2} = 4 \left(\frac{a^2+b^2}{2ab} \right)^2 = \frac{4}{t}$. Bất đẳng thức cần chứng

minh trở thành $t + \frac{4}{t} \geq 5 \Leftrightarrow t^2 - 5t + 4 \geq 0 \Leftrightarrow (t-1)(t-4) \geq 0$. Bất đẳng thức cuối cùng luôn

đúng $0 < t \leq 1$.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = \pm b$.

d. Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{a^2b}{2a^3+b^3} + \frac{2}{3} \geq \frac{a^2+2ab}{2a^2+b^2} \Leftrightarrow \frac{a^2b}{2a^3+b^3} - \frac{1}{3} \geq \frac{a^2+2ab}{2a^2+b^2} - 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{-(a-b)^2(2a+b)}{3(2a^3+b^3)} \geq \frac{-(a-b)^2}{2a^2+b^2} \Leftrightarrow (a-b)^2 \left[\frac{1}{2a^2+b^2} - \frac{2a+b}{3(2a^3+b^3)} \right] \geq 0.$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2 \left[3(2a^3+b^3) - (2a^2+b^2)(2a+b) \right] \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2 (2a^3+2b^3-2a^2b-2ab^2) \geq 0 \Leftrightarrow (a+b)(a-b)^4 \geq 0.$$

Bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng. Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b$.

e. Biến đổi tương đương bất đẳng thức cần chứng minh ta được $\frac{k}{a^3+b^3} + \frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} \geq \frac{16+4k}{(a+b)^3}$

.

$$\Leftrightarrow \frac{k}{a^3+b^3} - \frac{4k}{(a+b)^3} + \frac{1}{a^3} - \frac{8}{(a+b)^3} + \frac{1}{b^3} - \frac{8}{(a+b)^3} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{a-b}{(a+b)^3} \left(\frac{7b^2+4ab+a^2}{b^3} - \frac{7a^2+4ab+b^2}{a^3} \right) - \frac{3k(a-b)^2(a+b)}{(a^3+b^3)(a+b)^3} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(a-b)^2(a^4+5a^3b+12a^2b^2+5ab^3+b^4)}{a^3b^3} - \frac{3k(a-b)^2}{a^2-ab+b^2} \geq 0$$

$\Leftrightarrow (a-b)^2 \left[(a^4+5a^3b+12a^2b^2+5ab^3+b^4)(a^2-ab+b^2) - 3ka^3b^3 \right] \geq 0$. Vì $(a-b)^2 \geq 0$ nên bất đẳng thức đúng khi và chỉ khi $(a^4+5a^3b+12a^2b^2+5ab^3+b^4)(a^2-ab+b^2) - 3ka^3b^3 \geq 0$.

Cho $a=b$ thì bất đẳng thức trên trở thành $24a^6 - 3ka^6 \geq 0 \Rightarrow k \leq 8$. Ta chứng minh $k=8$ là hằng số lớn nhất thỏa mãn bất đẳng thức đã cho. Thật vậy, ta xét các trường hợp sau:

+ Với $k < 8$ thì $(a^4+5a^3b+12a^2b^2+5ab^3+b^4)(a^2-ab+b^2) - 3ka^3b^3 > 0$.

+ Với $k=8$ thì bất đẳng thức trên được viết lại thành

$$(a^4+5a^3b+12a^2b^2+5ab^3+b^4)(a^2-ab+b^2) - 24a^3b^3 \geq 0. \text{ Ta có } a^4+b^4 \geq 2a^2b^2; a^2+b^2 \geq 2ab$$

nên $a^4+5a^3b+12a^2b^2+5ab^3+b^4 = a^4+b^4+5ab(a^2+b^2)+12a^2b^2 \geq 24a^2b^2$

Và $a^2-ab+b^2 \geq ab$. Do đó ta có $(a^4+5a^3b+12a^2b^2+5ab^3+b^4)(a^2-ab+b^2) \geq 24a^3b^3$. Suy ra bất đẳng thức được chứng minh. Vậy hằng số k lớn nhất là 8.

f, Bất đẳng thức cần chứng minh được biến đổi như sau:

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} - \sqrt{ab} \geq \frac{a+b}{2} - \frac{2ab}{a+b} \Leftrightarrow \frac{(a-b)^2}{2} - \left(\frac{1}{\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} - \sqrt{ab}} - \frac{1}{a+b} \right) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2 \left[2a+2b - \sqrt{2(a^2+b^2)} - 2\sqrt{ab} \right] \geq 0$$

Vì $(a-b)^2 \geq 0$ nên ta cần chứng minh $2a+2b - \sqrt{2(a^2+b^2)} - 2\sqrt{ab} \geq 0$

Thật vậy, ta có

$$a+b - \sqrt{2(a^2+b^2)} = \frac{(a-b)^2}{\sqrt{2(a^2+b^2)} + (a+b)}; a+b - 2\sqrt{ab} = (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 = \frac{(a-b)^2}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2}$$

Do vậy bất đẳng thức trên tương đương với

$$(a-b)^2 \left[\frac{1}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2} - \frac{1}{\sqrt{2(a^2+b^2)} + (a+b)} \right] \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2 \left[\sqrt{2(a^2+b^2)} + (a+b) - (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 \right] \geq 0 \Leftrightarrow (a-b)^2 \left[\sqrt{2(a^2+b^2)} - 2\sqrt{ab} \right] \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2 \frac{2(a^2+b^2) - 4ab}{\sqrt{2(a^2+b^2)} + 2\sqrt{ab}} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2(a-b)^4}{\sqrt{2(a^2+b^2)} + 2\sqrt{ab}} \geq 0$$

Bất đẳng thức cuối này hiển nhiên đúng. Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b$.

Ví dụ 4. Chứng minh các bất đẳng thức:

$$a, \sqrt{a+bc} + \sqrt{b+ca} + \sqrt{c+ab} \geq 1 + \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca} \text{ với } a, b, c > 0; a+b+c=1.$$

$$b, \frac{5b^3 - a^3}{ab + 3b^2} + \frac{5c^3 - b^3}{bc + 3c^2} + \frac{5a^3 - c^3}{ca - 3a^2} \leq a + b + c \text{ với } a, b, c > 0.$$

$$c, \frac{1}{a^3 + b^3 + abc} + \frac{1}{b^3 + c^3 + abc} + \frac{1}{c^3 + a^3 + abc} \leq \frac{1}{abc}. \text{ Với } (a, b, c > 0)$$

$$d, 3\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) + 2 \geq \frac{33}{ab + bc + ca} \text{ với } a, b, c > 0 \text{ và } a + b + c = 3.$$

Lời giải

a, Quan sát bất đẳng thức ta có các nhận xét sau:

+ Dự đoán đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = \frac{1}{3}$.

+ Khi thay 1 bằng $a + b + c$ vào bất đẳng thức và chuyển về thì ta được các nhóm $\sqrt{a+bc} - a - \sqrt{bc}$; $\sqrt{b+ca} - b - \sqrt{ca}$; $\sqrt{c+ab} - c - \sqrt{ab}$. Do va trò a, b, c như nhau nên ta dự đoán mỗi nhóm trên không âm. Để chứng minh dự đoán trên ta có thể bình phương làm mất căn bậc hai rồi biến đổi tương đương thành tổng các bình phương.

+ Để ý giả thiết $a + b + c = 1$, khi đó ta có $\sqrt{a+bc} = \sqrt{(a+b)(a+c)}$. Dễ dàng nhận ra $\sqrt{(a+b)(a+c)} \geq a + \sqrt{bc}$. Như vậy chỉ cần áp dụng tương tự cho hai trường hợp còn lại thì bất đẳng thức được chứng minh.

Cách 1: Bất đẳng thức cần được chứng minh tương đương với

$$\begin{aligned} \sqrt{a+bc} + \sqrt{b+ca} + \sqrt{c+ab} &\geq a + b + c + \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca} \\ \Leftrightarrow (\sqrt{a+bc} - a - \sqrt{bc}) + (\sqrt{b+ca} - b - \sqrt{ca}) + (\sqrt{c+ab} - c - \sqrt{ab}) &\geq 0 \end{aligned}$$

Ta cần chứng minh

$$\sqrt{a+bc} - a - \sqrt{bc} \geq 0; \sqrt{b+ca} - b - \sqrt{ca} \geq 0; \sqrt{c+ab} - c - \sqrt{ab} \geq 0$$

Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned} \sqrt{a+bc} - a - \sqrt{bc} \geq 0 &\Leftrightarrow \sqrt{a+bc} \geq a + \sqrt{bc} \Leftrightarrow a + bc \geq a^2 + 2a\sqrt{bc} + bc \\ \Leftrightarrow 1 \geq a + 2\sqrt{bc} &\Leftrightarrow a + b + c \geq a + 2\sqrt{bc} \Leftrightarrow (\sqrt{b} - \sqrt{c})^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Chứng minh tương tự ta được $\sqrt{b+ca} - b - \sqrt{ca} \geq 0; \sqrt{c+ab} - c - \sqrt{ab} \geq 0$.

Đến đây bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{1}{3}$.

Cách 2: Kết hợp với giả thiết $a + b + c = 1$ ta có

$$\sqrt{a+bc} = \sqrt{(a+b)(a+c)}; \sqrt{b+ca} = \sqrt{(a+b)(b+c)}; \sqrt{c+ab} = \sqrt{(c+a)(b+c)}$$

Khi đó bất đẳng thức được viết lại thành

$$\sqrt{(a+b)(a+c)} + \sqrt{(a+b)(b+c)} + \sqrt{(c+a)(b+c)} \geq 1 + \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}$$

Mặt khác, ta có:

$$\begin{aligned} \sqrt{(a+b)(a+c)} &\geq a + \sqrt{bc} \Leftrightarrow a^2 + ab + bc + ca \geq a^2 + 2a\sqrt{bc} + bc \\ \Leftrightarrow b + c &\geq 2\sqrt{bc} \Leftrightarrow (\sqrt{b} - \sqrt{c})^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Chứng minh tương tự ta được $\sqrt{(b+c)(a+b)} \geq b + \sqrt{ca}; \sqrt{(c+a)(b+c)} \geq c + \sqrt{ab}$

Cộng theo về các bất đẳng thức ta được

$$\sqrt{(a+b)(a+c)} + \sqrt{(a+b)(b+c)} + \sqrt{(c+a)(b+c)} \geq a + b + c + \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}$$

Hay $\sqrt{(a+b)(a+c)} + \sqrt{(a+b)(b+c)} + \sqrt{(c+a)(b+c)} \geq a + b + c + \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}$.

Vậy bất đẳng thức chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{1}{3}$.

b, Ta sẽ chứng minh $\frac{5b^3 - a^3}{ab + 3b^2} \leq 2b - a$ với a, b là các số thực dương.

Thật vậy, biến đổi tương đương bất đẳng thức trên ta được

$$5b^3 - a^3 \leq (2b - a)(ab + 3b^2) \Leftrightarrow 5b^3 - a^3 \leq 2ab^2 + 6b^3 - a^2b - 3ab^2 \Leftrightarrow a^3 + b^3 \geq a^2b + ab^2$$

$$\Leftrightarrow (a + b)(a - b)^2 \geq 0. \text{ Bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng, do đó bất đẳng thức trên được}$$

chứng minh. Chứng minh tương tự ta được $\frac{5c^3 - b^3}{bc + 3c^3} \leq 2c - b; \frac{5a^3 - c^3}{ca - 3a^2} \leq 2a - c$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được $\frac{5b^3 - a^3}{ab + 3b^2} + \frac{5c^3 - b^3}{bc + 3c^3} + \frac{5a^3 - c^3}{ca - 3a^2} \leq a + b + c$

Vậy bài toán được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Cách 3: Ta có

$$a^3 - 5b^3 + 2b(ab + 3b^2) = a^3 + b^3 + 2ab^2 = (a^3 + ab^2) + (b^3 + a^2b) + 2ab^2 - (a^2b + ab^2)$$

$$\geq 2a^2b + 2ab^2 + 2ab^2 - (a^2b + ab^2) = a(ab + 3b^2). \text{ Do đó ta có } \frac{a^3 - 5b^3}{ab + 3b^2} + 2b \geq a \text{ hay ta được}$$

$$\frac{5b^3 - a^3}{ab + 3b^2} \leq 2b - a. \text{ Áp dụng tương tự ta được } \frac{5c^3 - b^3}{bc + 3c^2} \leq 2c - b; \frac{5a^3 - c^3}{ca + 3a^2} \leq 2a - c.$$

$$\text{Công vế các bất đẳng thức trên ta được } \frac{5b^3 - a^3}{ab + 3b^2} + \frac{5c^3 - b^3}{bc + 3c^2} + \frac{5a^3 - c^3}{ca + 3a^2} \leq a + b + c.$$

Vậy bài toán được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

c, Ta có: $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$. Suy ra:

$$a^3 + b^3 - ab(a + b) = (a + b)(a^2 - ab + b^2) - ab(a + b) = (a + b)(a - b)^2 \geq 0. \text{ Suy ra điều phải chứng minh.}$$

Áp dụng bất đẳng thức ở trên ta có: $a^3 + b^3 + abc \geq ab(a + b) + abc = ab(a + b + c)$.

Suy ra $\frac{1}{a^3 + b^3 + abc} \leq \frac{1}{ab(a + b + c)}$. Tương tự ta có:

$$\frac{1}{b^3 + c^3 + abc} \leq \frac{1}{bc(a + b + c)}; \frac{1}{c^3 + a^3 + abc} \leq \frac{1}{ca(a + b + c)}. \text{ Cộng ba bất đẳng thức cùng chiều ta}$$

suy ra:

$$\frac{1}{a^3 + b^3 + abc} + \frac{1}{b^3 + c^3 + abc} + \frac{1}{c^3 + a^3 + abc} \leq \frac{1}{abc}. \text{ Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi } a = b = c.$$

d, Ta viết lại bất đẳng thức cần chứng minh thành:

$$3\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)(ab + bc + ca) + 2(ab + bc + ca) \geq 33 \Leftrightarrow 3\left(\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b}\right) + 2(ab + bc + ca) \geq 15.$$

Sử dụng bất đẳng thức quen thuộc $(x + y + z)^2 \geq 3(xy + yz + zx)$ ta có:

$$\left(\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b}\right)^2 \geq 3\left(\frac{ab}{c} \cdot \frac{bc}{a} + \frac{bc}{a} \cdot \frac{ca}{b} + \frac{ca}{b} \cdot \frac{ab}{c}\right) = 3(a^2 + b^2 + c^2) \text{ ta chứng minh bất đẳng thức mạnh}$$

hơn là: $3\sqrt{3(a^2 + b^2 + c^2)} + 2(ab + bc + ca) \geq 15(*)$. Đặt

$$t = \sqrt{3(a^2 + b^2 + c^2)} \Rightarrow t^2 = 3(a^2 + b^2 + c^2) = 3(a + b + c)^2 - 6(ab + bc + ca) = 27 - 6(ab + bc + ca)$$

Do $a, b, c > 0$ suy ra $t^2 < 27 \Leftrightarrow t < 3\sqrt{3}$, lại có $3(ab + bc + ca) \leq (a + b + c)^2 = 9 \Rightarrow ab + bc + ca \leq 3$

dẫn đến $t^2 \geq 9 \Leftrightarrow t \geq 3$, vậy $3 \leq t \leq 3\sqrt{3}$. Ta có $(*) \Leftrightarrow 3t + 9 - \frac{t^2}{3} \geq 15 \Leftrightarrow (t-3)(t-6) \leq 0$, bất đẳng thức này luôn đúng với mọi $3 \leq t \leq 3\sqrt{3}$. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $t = 3 \Leftrightarrow a = b = c = 1$.

II. BẤT ĐẲNG THỨC AM – GM

1. Bất đẳng thức AM – GM

Trong chương trình toán THCS ta thường dùng, bất đẳng thức AM – GM cho 2 số thực không âm hoặc 3 số thực không âm. Phạm vi chuyên đề này chỉ đề cập các bài toán trong khuôn khổ trên.

a, Cho các số thực không âm a, b khi đó ta có: $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b$.

b, Cho các số thực không âm a, b, c , khi đó ta có: $a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc}$ dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

2. Một số kết quả được suy ra từ bất đẳng thức AM – GM

a, Với $a, b \geq 0$ từ $a + b \geq 2\sqrt{ab} \Rightarrow 4ab \leq (a + b)^2 (*)$.

b, Với $a, b > 0$ từ $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq 2\sqrt{\frac{1}{ab}}$ lại có $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$ suy ra $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b} \Leftrightarrow \frac{1}{a+b} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$

đây là kết quả rất hay dùng trong chứng minh các bài toán BĐT.

c, Với $a, b, c \geq 0$ từ $a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc} \Rightarrow 27abc \leq (a + b + c)^3$.

d, Với $a, b, c > 0$ từ $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{3}{\sqrt[3]{abc}}$, vì $a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc}$ suy ra

$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c} \Leftrightarrow \frac{1}{a+b+c} \leq \frac{1}{9} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$ đây cũng là kết quả rất hay dùng trong chứng minh các bài toán BĐT.

e, $(a^3 + b^3)(x^3 + y^3)(m^3 + n^3) \geq (axm + byn)^3$ với $a, b, m, n, x, y > 0$.

Thật vậy: Áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta có:

$$\frac{a^3}{a^3 + b^3} + \frac{x^3}{x^3 + y^3} + \frac{m^3}{m^3 + n^3} \geq \frac{3axm}{\sqrt[3]{(a^3 + b^3)(x^3 + y^3)(m^3 + n^3)}}$$

$$\frac{b^3}{a^3 + b^3} + \frac{y^3}{x^3 + y^3} + \frac{n^3}{m^3 + n^3} \geq \frac{3byn}{\sqrt[3]{(a^3 + b^3)(x^3 + y^3)(m^3 + n^3)}}$$

Cộng hai bất đẳng thức cùng chiều ta suy ra:

$$3 \geq \frac{3axm + 3byn}{\sqrt[3]{(a^3 + b^3)(x^3 + y^3)(m^3 + n^3)}} \Leftrightarrow (a^3 + b^3)(x^3 + y^3)(m^3 + n^3) \geq (axm + byn)^3.$$

+ Hoàn toàn tương tự, ta cũng chứng minh được:

$$(a^3 + b^3 + c^3)(x^3 + y^3 + z^3)(m^3 + n^3 + p^3) \geq (axm + byn + czp)^3.$$

3. Một số ví dụ

Ví dụ 1. Cho các số thực dương a, b, c . Chứng minh rằng:

a) $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$

b) $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$.

c) $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8(a+b+c)(ab+bc+ca)$.

d) Cho $(a + b)(b + c)(c + a) = 1$. Chứng minh rằng: $ab + bc + ca \leq \frac{3}{4}$.

(Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán TP Hà Nội, năm 2014)

e) Cho các số thực $x, y, z > 2$. Tìm GTNN của: $P = \frac{x}{\sqrt{y+z-4}} + \frac{y}{\sqrt{z+x-4}} + \frac{c}{\sqrt{x+y-4}}$.

(Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán - THPT chuyên KHTN, năm 2015).

f) Cho các số thực dương a, b . Chứng minh $(\sqrt{\frac{ab}{a+b}} + \sqrt{\frac{bc}{b+c}})(\frac{1}{\sqrt{a+b}} + \frac{1}{\sqrt{b+c}}) \leq 2$.

(Trích đề thi tuyển sinh THPT chuyên KHTN, năm 2018).

g) Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn: $xyz = 1$. Chứng minh:

$$\frac{1}{x^2 + 2y^2 + 3} + \frac{1}{y^2 + 2z^2 + 3} + \frac{1}{z^2 + 2x^2 + 3} \leq \frac{1}{2}$$

h) Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 3$. Tìm giá trị lớn nhất của

$$P = \frac{1}{\sqrt{2x^2 + y^2 + 3}} + \frac{1}{\sqrt{2y^2 + z^2 + 3}} + \frac{1}{\sqrt{2z^2 + x^2 + 3}}.$$

(Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán – THPT chuyên TP Hà Nội, năm 2018)

Lời giải

a. Ta có

$$\begin{aligned} \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} + 3 &= \left(\frac{a}{b+c} + 1\right) + \left(\frac{b}{c+a} + 1\right) + \left(\frac{c}{a+b} + 1\right) = (a+b+c)\left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b}\right) \text{ và} \\ (a+b+c)\left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b}\right) &= \frac{1}{2}(a+b+b+c+c+a)\left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{a+b}{b+c} + \frac{a+b}{c+a} + 1 + \frac{b+c}{a+b} + \frac{b+c}{c+a} + 1 + \frac{c+a}{a+b} + \frac{c+a}{b+c}\right). \end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta có: $\frac{a+b}{b+c} + \frac{b+c}{a+b} \geq 2$ suy ra

$$\frac{a+b}{b+c} + \frac{a+b}{c+a} + \frac{b+c}{a+b} + \frac{b+c}{c+a} + \frac{c+a}{a+b} + \frac{c+a}{b+c} \geq 6 \text{ nên } \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} + 3 \geq \frac{9}{2} \text{ hay}$$

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}. \text{ Dấu đẳng thức xảy ra khi } a = b = c.$$

Cách khác: Đặt

$$a+b=x, b+c=y, c+a=z \Rightarrow a+b+c = \frac{x+y+z}{2} \Rightarrow a = \frac{x-y+z}{2}, b = \frac{x+y-z}{2}, c = \frac{y+z-x}{2}, \text{ thay}$$

vào ta có bất đẳng thức chứng minh trở thành:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{x-y+z}{y} + \frac{x+y-z}{z} + x\right) \geq \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{x}{y} + \frac{y}{x} + \frac{y}{z} + \frac{z}{y} + \frac{x}{z} + \frac{z}{x} \geq 6. \text{ Do } \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2 \text{ theo bất đẳng thức}$$

AM– GM nên ta suy ra bất đẳng thức cuối cùng đúng.

b. Cách 1: Ta có $a+b \geq 2\sqrt{ab}, b+c \geq 2\sqrt{bc}, c+a \geq 2\sqrt{ca} \Rightarrow (a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$

Cách 2: $(a+b)(b+c)(c+a) = (a+b+c)(ab+bc+ca) - abc$. Theo bất đẳng thức

AM-GM ta có $a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc}$, $ab+bc+ca \geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} \Rightarrow (a+b+c)(ab+bc+ca) \geq 9abc$.
Suy ra $(a+b)(b+c)(c+a) = (a+b+c)(ab+bc+ca) - abc \geq 8abc$.

Chú ý : $(a+b)(b+c)(c+a) = (a+b+c)(ab+bc+ca) - abc$ là một biến đổi sử dụng rất nhiều trong chứng minh bất đẳng thức.

c. $(a+b)(b+c)(c+a) \geq \frac{8}{9}(a+b+c)(ab+bc+ca)$

Chú ý : $(a+b)(b+c)(c+a) = (a+b+c)(ab+bc+ca) - abc$. Áp dụng ta có điều cần chứng minh.

d. Chú ý : $(a+b)(b+c)(c+a) = (a+b+c)(ab+bc+ca) - abc$. Suy ra

$$ab+bc+ca = \frac{1+abc}{a+b+c}. \text{ Theo bất đẳng thức AM-GM ta có:}$$

$$a+b+b+c+c+a \geq 3\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)} = 3 \Rightarrow a+b+c \geq \frac{3}{2}. \text{ Mặt khác sử dụng:}$$

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc \Rightarrow abc \leq \frac{1}{8}. \text{ Từ đó suy ra } ab+bc+ca = \frac{1+abc}{a+b+c} \leq \frac{1+\frac{1}{8}}{\frac{3}{2}} = \frac{3}{4}. \text{ Dấu}$$

$$\text{bằng xảy ra khi và chỉ khi } a=b=c=\frac{1}{2}.$$

e. Theo bất đẳng thức AM-GM ta có: $\sqrt{(y+z-4).4} \leq \frac{y+z-4+4}{2} = \frac{y+z}{2}$. Từ đó suy ra

$$\frac{x}{\sqrt{y+z-4}} \geq \frac{4x}{y+z}. \text{ Tương tự ta có 2 BĐT nữa và cộng lại ta có: } P \geq 4\left(\frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y}\right),$$

$$\text{Áp dụng câu a ta có } \frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} \geq \frac{3}{2}, \text{ suy ra } P \geq 6. \text{ Dấu bằng xảy ra khi } x=y=z=4.$$

f. Ta có $VT = \frac{\sqrt{ab}}{a+b} + \frac{\sqrt{bc}}{b+c} + \frac{\sqrt{ab}+\sqrt{bc}}{\sqrt{(a+b)(b+c)}}$. Theo bất đẳng thức AM - GM ta có:

$$a+b \geq 2\sqrt{ab}, b+c \geq 2\sqrt{bc}, (a+b)(b+c) = bc + b^2 + ac + bc \geq bc + 2\sqrt{b^2ac} + ab = (\sqrt{bc} + \sqrt{ab})^2 \text{ nên}$$

$$\sqrt{(a+b)(b+c)} \geq \sqrt{bc} + \sqrt{ab}. \text{ Dẫn đến } VT \leq \frac{\sqrt{ab}}{2\sqrt{ab}} + \frac{\sqrt{bc}}{2\sqrt{bc}} + \frac{\sqrt{ab}+\sqrt{bc}}{\sqrt{ab}+\sqrt{bc}} = 2$$

$$\text{Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi } a=b=c.$$

g. Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$x^2 + y^2 \geq 2xy, y^2 + 1 \geq 2y \Rightarrow x^2 + 2y^2 + 3 \geq 2xy + 2y + 2 \Rightarrow \frac{1}{x^2 + 2y^2 + 3} \leq \frac{1}{2(xy + y + 1)}.$$

$$\text{Tương tự ta có 2 bất đẳng thức nữa và cộng lại ta suy ra:}$$

$$VT \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{xy+y+1} + \frac{1}{yz+z+1} + \frac{1}{zx+x+1}\right) = \frac{1}{2} \text{ Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi } x=y=z=1.$$

$$\text{Chú ý: Trong bài toán này, ta sử dụng một kết quả là: Cho các số thực } x, y, z \text{ thỏa mãn } xyz$$

= 1 khi đó : $\frac{1}{xy+y+1} + \frac{1}{yz+z+1} + \frac{1}{zx+x+1} = 1$. Phần chứng minh dành cho bạn đọc.

h. Từ $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 3 \Rightarrow 3 = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{3}{\sqrt[3]{xyz}} \Rightarrow xyz \geq 1$. Áp dụng bất đẳng thức AM – GM, ta có:

$$2x^2 + 2y^2 + 3 = x^2 + y^2 + x^2 + 1 + 2 \geq 2xy + 2x + 2 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2y^2 + 3}} \leq \frac{1}{\sqrt{2(xy + y + 1)}}. \text{ Từ đó suy ra}$$

$$P^2 \leq \frac{3}{2} \left(\frac{1}{xy+x+1} + \frac{1}{yz+y+1} + \frac{1}{zx+z+1} \right).$$

Đề ý rằng: $\frac{1}{xy+x+1} + \frac{1}{yz+y+1} + \frac{1}{zx+z+1} = \frac{1}{xy+x+1} + \frac{x}{xyz+xy+x} + \frac{xy}{x^2yz+xyz+xy}$

$$\leq \frac{1}{xy+x+1} + \frac{x}{1+xy+x} + \frac{xy}{x+1+xy} = 1. \text{ Nên ta có } P \leq \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2} \text{ Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi } x = y = z = 1.$$

Ví dụ 2.

a) Cho các số thực dương a, b, c sao cho $a + b + c + ab + bc + ca = 6$. Chứng minh rằng:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 6.$$

(Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 - TP Hà Nội, năm 2013)

b) Cho các số thực dương a, b sao cho $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 2$. Chứng minh

$$Q = \frac{1}{a^4 + b^2 + 2ab^2} + \frac{1}{b^4 + a^2 + 2a^2b} \leq \frac{1}{2}$$

(Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Nguyễn Trãi – Hải Dương, năm 2013)

c) Cho các số thực dương a, b sao cho $a + b = 2$. Chứng minh:

$$2(a^2 + b^2) - 6\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + 9\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) \geq 10.$$

d) Cho các số thực dương a, b, c sao cho $a + b + c = 2$. Tìm GTNN của:

$$P = \sqrt{2a+bc} + \sqrt{2b+ac} + \sqrt{2c+ba}$$

(Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 TP Hà Nội, năm 2014)

e) Cho các số thực không âm a, b sao cho $a^2 + b^2 = 4$. Tìm GTLN của $P = \frac{ab}{a+b+2}$

(Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 TP Hà Nội, năm 2015)

f) Cho các số thực dương a, b, c sao cho $a + b + c = 2$. Chứng minh:

$$\frac{a}{a+b^2} + \frac{a}{a+b^2} + \frac{a}{a+b^2} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$$

(Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán – Tin TP Hà Nội, năm 2017)

Lời giải:

a. Dự đoán dấu bằng xảy ra khi $a = b = c = 1$. Ta có cách giải như sau

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$a^2 + b^2 \geq 2ab, b^2 + c^2 \geq 2bc, c^2 + a^2 \geq 2ca, a^2 + 1 \geq 2a, b^2 + 1 \geq 2b, c^2 + 1 \geq 2c. \text{ Cộng 6 bất đẳng thức}$$

cùng chiều ta có: $3(a^2 + b^2 + c^2) + 3 \geq 2(ab + bc + ca + a + b + c) = 12 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq 3$.

Dấu bằng xảy ra khi $a = b = c = 1$.

b. Dự đoán dấu bằng xảy ra khi $a = b = 1$. Ta có cách giải như sau

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$a^4 + b^2 \geq 2a^2b, b^4 + c^2 \geq 2ab^2 \text{ Suy ra}$$

$$Q \leq \frac{1}{2a^2b + 2ab^2} + \frac{1}{2b^2a + 2a^2b} \leq \frac{1}{2ab(a+b)} + \frac{1}{2ab(a+b)} = \frac{1}{ab(a+b)}. \text{ Từ giả thiết}$$

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 2 \Rightarrow \frac{a+b}{ab} = 2 \Rightarrow a+b = 2ab. \text{ Suy ra } Q \leq \frac{2}{(a+b)^2}. \text{ Do } 2 = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b} \Rightarrow \frac{1}{a+b} \leq \frac{1}{2}.$$

Suy ra $Q \leq \frac{1}{2}$. Dấu bằng xảy ra khi $a = b = 1$.

c. Ta viết lại bất đẳng thức cần chứng minh thành

$$2[(a+b)^2 - 2ab] - 6 \frac{(a+b)^2 - 2ab}{ab} + 9 \frac{(a+b)^2 - 2ab}{a^2b^2} \geq 10. \text{ Hay}$$

$$8 - 4ab - 6 \frac{4 - 2ab}{ab} + 9 \frac{4 - 2ab}{a^2b^2} - 10 \geq 0 \Leftrightarrow -2a^2b^2 - 4a^3b^3 - 24ab + 12a^2b^2 + 36 - 18ab \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 4t^3 - 10t^2 + 42t - 36 \leq 0 \quad (*)$$

$$\text{Với } 0 < t = ab \leq \frac{(a+b)^2}{4} = 1. \text{ Ta có } (*) \Leftrightarrow 2t^3 - 5t^2 + 21t - 18 \leq 0 \Leftrightarrow (t-1)(2t^2 - 3t + 18) \leq 0. \text{ Do}$$

$$2t^2 - 3t + 18 > 0, t-1 \leq 0 \text{ nên } (t-1)(2t^2 - 3t + 18) \leq 0. \text{ Dấu bằng xảy ra khi } t = 1 \text{ hay } a = b = 1.$$

d. $\sqrt{2a+bc} = \sqrt{a(a+b+c)+bc}$. Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$\sqrt{(a+b)(a+c)} \leq \frac{a+b+a+c}{2}. \text{ Tương tự ta có:}$$

$$\sqrt{2b+ac} = \sqrt{b(a+b+c)+ac} \leq \sqrt{(b+a)(b+c)} \leq \frac{b+a+b+c}{2}, \sqrt{2c+ab} \leq \frac{c+a+c+b}{2}. \text{ Từ đó suy ra:}$$

$$P = \sqrt{2a+bc} + \sqrt{2b+ac} + \sqrt{2c+ba} \leq \frac{a+b+a+c}{2} + \frac{b+a+b+c}{2} + \frac{c+a+c+b}{2} = 2(a+b+c) = 4$$

Dấu bằng xảy ra khi $a = b = c = \frac{2}{3}$.

$$\text{e. } P = \frac{ab}{a+b+2}. \text{ Đặt } a+b=t \Rightarrow t^2 = a^2 + b^2 + 2ab = 4 + 2ab > 4. \text{ Ta có } ab = \frac{t^2 - 4}{2}. \text{ Suy ra}$$

$$P = \frac{t^2 - 4}{2(t+2)} = \frac{t-2}{2}. \text{ Do } t^2 = 4 + 2ab \Rightarrow t^2 \leq 4 + a^2 + b^2 = 8 \Rightarrow t \leq 2\sqrt{2}. \text{ Vậy } P \leq \frac{2\sqrt{2} - 2}{2} = \sqrt{2} - 1.$$

Dấu bằng xảy ra khi $t = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow a = b = \sqrt{2}$.

f. Theo bất đẳng thức AM-GM

$$a + b^2 = a(a+b+c) + b^2 = a^2 + b^2 + ab + ac \geq 2ab + ab + ac = 3ab + ac. \text{ Từ đó suy ra}$$

$$\frac{a}{a+b^2} \leq \frac{a}{3ab+ac} = \frac{1}{3b+c} = \frac{1}{2b+b+c} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2b} + \frac{1}{b+c} \right) = \frac{1}{8b} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{b+c} \leq \frac{1}{8b} + \frac{1}{16} \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) = \frac{1}{16} \left(\frac{3}{b} + \frac{1}{c} \right).$$

Tương tự ta cũng có $\frac{b}{b+c^2} \leq \frac{1}{16} \left(\frac{3}{c} + \frac{1}{a} \right), \frac{c}{c+a^2} \leq \frac{1}{16} \left(\frac{3}{a} + \frac{1}{b} \right)$. Cộng theo vế 3 bất đẳng thức cùng chiều ta có điều phải chứng minh. Dấu bằng xảy ra khi $a = b = c$.

III. MỘT SỐ KỸ THUẬT VẬN DỤNG BẤT ĐẲNG THỨC AM – GM.

1. Dự đoán dấu đẳng thức để phân tích các số hạng và vận dụng bất đẳng thức AM – GM

Đối với các bài toán bất đẳng thức đối xứng thông thường dấu đẳng thức xảy ra khi các biến bằng nhau đây là cơ sở để ta phân tích các số hạng sao cho khi áp dụng bất đẳng thức AM – GM thì dấu đẳng thức phải đảm bảo.

Ta xét các ví dụ sau:

Ví dụ 1

a, Cho x, y là các số dương thỏa mãn $x + y = 2$. Chứng minh $x^2 y^2 (x^2 + y^2) \leq 2$

(Đề thi tuyển sinh lớp 10 Chu Văn An, Hà Nội – Amsterdam 2006 – 2007).

b, Cho các số thực dương a, b thỏa mãn $a + b \leq 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$P = \frac{1}{a^2 + b^2} + \frac{9}{ab} + 8ab + 7$$

c, Cho a, b là các số không âm thỏa mãn $a^2 + b^2 \leq 2$. Chứng minh rằng: $a\sqrt{3a(a+2b)} + b\sqrt{3b(b+2a)} \leq 6$. (Đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Ngoại ngữ ĐHQGHN, năm 2008 – 2009).

d, Với ba số dương x, y, z thỏa mãn $x + y + z = 1$, Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$Q = \frac{x}{x + \sqrt{x + yx}} + \frac{y}{y + \sqrt{y + zx}} + \frac{z}{z + \sqrt{z + xy}}. \text{ (Đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán TP Hà}$$

Nội 2014).

e, Cho $x, y > 0$ và $x + y \leq 1$. Chứng minh rằng $8(x^4 + y^4) + \frac{1}{xy} \geq 5$.

f, Cho a, b, c là ba số dương thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 + abc = 4$. Chứng minh rằng:

$$2a + b + c \leq \frac{9}{2}. \text{ (Tuyển sinh lớp 10 chuyên tỉnh Nam Định, 2018).}$$

Lời giải

a, Ta dự đoán dấu bằng xảy ra khi $x = y = 1$. Khi đó $xy = 1, x^2 + y^2 = 2$

Mặt khác, để tận dụng giả thiết $x + y = 2$ ta sẽ đưa về hằng đẳng thức $(x + y)^2$. Vì vậy ta phân tích bài toán như sau: $x^2 y^2 (x^2 + y^2) = \frac{1}{2} \cdot xy \cdot 2xy(x^2 + y^2)$. Theo bất đẳng thức AM – GM thì

$$xy \leq \frac{(x + y)^2}{4} = 1, 2xy(x^2 + y^2) \leq \left(\frac{2xy + x^2 + y^2}{2} \right) = \frac{(x + y)^4}{4} = 4. \text{ Từ đó suy ra } x^2 y^2 (x^2 + y^2) \leq 2.$$

Dấu bằng xảy ra khi $x = y = 1$.

Ngoài cách làm trên ta có thể giải bài toán bằng cách đưa về một biến: $t = x + y$ hoặc

$t = xy$ với chú ý: $(x + y)^2 \geq 4xy, 2(x^2 + y^2) \geq (x + y)^2$. Thật vậy: Đặt

$$t = xy; (x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy \Rightarrow 4 = x^2 + y^2 + 2t \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 4 - 2t. \text{ Do}$$

$$xy \leq \frac{(x + y)^2}{4} = 1 \Rightarrow 0 < t \leq 1. \text{ Ta cần chứng minh:}$$

$$t^2(4 - 2t) \leq 2 \Leftrightarrow t^3 - 2t^2 + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (t - 1)(t^2 - t - 1) \leq 0. \text{ Bất đẳng thức này luôn đúng với mọi giá trị } 0 < t \leq 1.$$

b, Ta dự đoán dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = 1$. Do $2(a^2 + b^2) \geq (a + b)^2$ nên việc đánh giá $a^2 + b^2$ theo $a + b$ sẽ dẫn đến ngược dấu. Do đó ta sẽ tìm cách dùng AM –

GM sao cho việc xuất hiện $a+b$ phải đảm bảo BĐT không bị ngược dấu.

Ta thấy rằng $a=b$ thì $a^2+b^2=2ab=2$. Nên ta phân tích

$P = \frac{1}{a^2+b^2} + \frac{1}{2ab} + \frac{17}{2ab} + \frac{17}{2}ab - \frac{ab}{2} + 7$. Áp dụng BĐT AM – GM với chú ý

$ab \leq \frac{(a+b)^2}{4} = 1$ và $\sqrt{(a^2+b^2)2ab} \leq \frac{a^2+b^2+2ab}{2} = \frac{(a+b)^2}{2} \leq \frac{4}{2} = 2$. Ta có:

$$P \geq 2\sqrt{\frac{1}{(a^2+b^2)2ab}} + 2\sqrt{\frac{17}{2ab} \cdot \frac{17}{2}ab} - \frac{1}{2} + 7 = 2\sqrt{\frac{1}{(a^2+b^2)2ab}} + 17 + \frac{13}{2} \geq 1 + 17 + \frac{13}{2} = \frac{49}{2}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=1$. Vậy GTNN của $P = \frac{49}{2}$ tại $a=b=1$.

c, Dự đoán dấu đẳng thức xảy ra khi $a=b=1$. Khi đó $3a=a+2b, 3b=b+2a$ nên ta có thể áp dụng BĐT AM – GM trực tiếp cho biểu thức trong dấu căn. Sử dụng BĐT AM – GM

dạng $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$, dễ thấy $a\sqrt{3a(a+2b)} \leq a\frac{3a+a+2b}{2} = 2a^2+ab$,

$$b\sqrt{3b(b+2a)} \leq b\frac{3b+b+2a}{2} = 2b^2+ab.$$

Cộng hai BĐT này lại về theo về, ta được:

$M = a\sqrt{3a(a+2b)} + b\sqrt{3b(b+2a)} \leq 2(a^2+b^2) + 2ab = 4 + 2ab$. Tiếp tục sử dụng BĐT AM – GM kết hợp với giả thiết, ta có: $4 + 2ab \leq 4 + a^2 + b^2 = 6$. Từ đó ta có ngay $M \leq 6$. Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=1$.

$$d, \text{ Ta có: } \frac{x}{x+\sqrt{x+yz}} = \frac{x(\sqrt{x-yz}-x)}{x+yz-x^2} = \frac{x(\sqrt{x(x+y+z)}+yz-x)}{x(x+y+z)+yz-x^2}$$

Áp dụng BĐT AM – GM cho hai số thực dương $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$ ta có:

$$\frac{x(\sqrt{(x+y)(x+z)}-x)}{xy+yz+xz} \leq \frac{x+\left(\frac{x+y+x+z}{2}-x\right)}{xy+yz+xz} = \frac{xy+xz}{2(xy+yz+xz)}.$$

Chứng minh tương tự rồi cộng về, ta suy ra $Q \leq 1$. Đẳng thức xảy ra khi $x=y=z=\frac{1}{3}$. Vậy

Q lớn nhất bằng 1 khi và chỉ khi $x=y=z=\frac{1}{3}$.

e, Dự đoán dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=\frac{1}{2}$. Ta đánh giá x^4+y^4 để đưa về

xy . Theo BĐT AM – GM ta có: $x^4+y^4 \geq 2x^2y^2$ suy ra $8(x^4+y^4) \geq 16x^2y^2$. Suy ra

$8(x^4+y^4) + \frac{1}{xy} \geq 16x^2y^2 + \frac{1}{xy}$ để ý rằng dấu đẳng thức xảy ra thì $16x^2y^2=1$ nên ta phân tích

như sau: $16x^2y^2 + \frac{1}{xy} = 16x^2y^2 + \frac{1}{4xy} + \frac{1}{4xy} + \frac{1}{2xy}$ Áp dụng BĐT AM – GM $a+b+c = 3\sqrt[3]{abc}$

ta có: $16x^2y^2 + \frac{1}{4xy} + \frac{1}{4xy} \geq 3$, $4xy \leq (x+y)^2 = 1 \Rightarrow xy \leq \frac{1}{4}$. Suy ra

$16x^2y^2 + \frac{1}{4xy} + \frac{1}{4xy} + \frac{1}{2xy} \geq 3 + 2 = 5$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=\frac{1}{2}$.

f, Từ $a, b, c > 0$ và $a^2+b^2+c^2+abc=4 \Rightarrow b^2+c^2-4 < 0; 4-b^2 > 0; 4-c^2 > 0$.

Do đó, phương trình bậc hai (ẩn a) $a^2 + (bc)a + b^2 + c^2 - 4 = 0$ có hai nghiệm phân biệt trái dấu. Có $\Delta_a = (4 - b^2)(4 - c^2)$. Vì $a > 0$ nên $a = \frac{-bc + \sqrt{(4 - b^2)(4 - c^2)}}{2}$. Ta dự đoán dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $b = c$ nên áp dụng BĐT AM – GM với hai số dương $(4 - b^2)$ và $(4 - c^2)$ ta được $2a = -bc + \frac{(4 - b^2) + (4 - c^2)}{2} \Rightarrow 2a \leq \frac{8 - (b + c)^2}{2}$
 $\Rightarrow 2a + b + c \leq \frac{9 - (b + c - 1)^2}{2} \Rightarrow 2a + b + c \leq \frac{9}{2}$ (đpcm).

Ví dụ 2

a, Cho $c > 0$ và $a, b \geq 0$. Chứng minh rằng $\sqrt{c(a - c)} + \sqrt{c(b - c)} \leq \sqrt{ab}$.

b, Cho các số dương x, y, z . Chứng minh rằng: $\frac{x^2}{x^2 + 2yz} + \frac{y^2}{y^2 + 2zx} + \frac{z^2}{z^2 + 2xy} \geq 1$.

c, Cho x, y, z là ba số dương và $xyz = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = \frac{1}{\sqrt{x^5 - x^2 + 3xy + 6}} + \frac{1}{\sqrt{y^5 - y^2 + 3yz + 6}} + \frac{1}{\sqrt{z^5 - z^2 + 3zx + 6}}$$

d, Cho x, y, z là các số thực không âm và thỏa mãn điều kiện $x^2 + y^2 + z^2 = 3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = \frac{x}{x^2 + 2y + 3} + \frac{y}{y^2 + 2z + 3} + \frac{z}{z^2 + 2x + 3}$

e, Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $xyz = 8$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{x^2}{\sqrt{(1 + x^3)(1 + y^3)}} + \frac{y^2}{\sqrt{(1 + y^3)(1 + z^3)}} + \frac{z^2}{\sqrt{(1 + z^3)(1 + x^3)}}$

f, Cho x, y, z là các số thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{x^3}{\sqrt{x^3 + (y + z)^3}} + \frac{y^3}{\sqrt{y^3 + (z + x)^3}} + \frac{z^3}{\sqrt{z^3 + (x + y)^3}}$$

Lời giải

a, Dự đoán dấu đẳng thức xảy ra khi $a = b$. Bất đẳng thức cần chứng minh có thể viết thành: $P = \sqrt{\frac{c}{b} \cdot \frac{a - c}{a}} + \sqrt{\frac{c}{a} \cdot \frac{b - c}{b}} \leq 1$. Sử dụng BĐT AM – GM dạng $\sqrt{xy} \leq \frac{x + y}{2}$, Ta có:

$$P = \frac{\frac{c}{b} \cdot \frac{a - c}{a}}{2} + \frac{\frac{c}{a} \cdot \frac{b - c}{b}}{2} = \frac{\frac{c}{b} + 1 - \frac{c}{a} + \frac{c}{a} + 1 - \frac{c}{b}}{2} = 1. \text{ Bài toán được giải quyết hoàn toàn. Đẳng}$$

thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} \frac{c}{b} = \frac{a - c}{a} \\ \frac{c}{a} = \frac{b - c}{b} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$. Ngoài ra ta cũng có thể chứng minh bài

toán bằng biến đổi tương đương.

b, Sử dụng BĐT AM – GM dạng $2ab \leq a^2 + b^2$, dễ thấy:

$$P = \frac{x^2}{x^2 + 2yz} + \frac{y^2}{y^2 + 2zx} + \frac{z^2}{z^2 + 2xy} \geq \frac{x^2}{x^2 + y^2 + z^2} + \frac{y^2}{y^2 + z^2 + x^2} + \frac{z^2}{z^2 + x^2 + y^2} = 1$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z$.

c, Ta dự đoán dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 1$. Với giả thiết $xyz = 1$ và các

số hạng ở dấu $\sqrt{\quad}$ giúp ta nghĩ đến đẳng thức quen thuộc:

$\frac{1}{xy+x+1} + \frac{1}{yz+y+1} + \frac{1}{zy+z+1} = 1$. Như vậy ta chỉ cần chỉ ra $x^5 - x^2 + 6 \geq 3x + 3$. Thật vậy ta

có: $x^5 - x^2 + 6 - (3x + 3) = (x-1)^2(x^3 + 2x^2 + 3x + 3) \geq 0$ với mọi $x > 0$

$\Rightarrow x^5 - x^2 + 6 + 3xy \geq 3(xy + x + 1) \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x^5 - x^2 + 6 + 3xy}} \leq \frac{1}{\sqrt{3(xy + x + 1)}}$. Tương tự ta có:

$$\frac{1}{\sqrt{y^5 - y^2 + 3yz + 6}} \leq \frac{1}{\sqrt{3(yz + y + 1)}}, \frac{1}{\sqrt{z^5 - z^2 + 6 + 3zx}} \leq \frac{1}{\sqrt{3(zx + z + 1)}}$$

$$\text{Suy ra } P \leq \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{xy+x+1} + \frac{1}{yz+y+1} + \frac{1}{zy+z+1} \right).$$

Sử dụng BĐT quen thuộc $(A+B+C)^2 \leq 3(A^2+B^2+C^2)$ ta có:

$$\left(\frac{1}{xy+x+1} + \frac{1}{yz+y+1} + \frac{1}{zy+z+1} \right)^2 \leq 3 \left(\frac{1}{xy+x+1} + \frac{1}{yz+y+1} + \frac{1}{zy+z+1} \right) = 3 \Rightarrow P \leq 1$$

Vậy $\max P = 1 \Leftrightarrow x = y = z = 1$.

d, Ta dự đoán dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 1$, từ đó ta cs đánh giá

$$x^2 + 1 \geq 2x; y^2 + 1 \geq 2y; z^2 + 1 \geq 2z \Rightarrow P \leq \frac{x}{2(x+y+1)} + \frac{y}{2(y+z+1)} + \frac{z}{2(z+x+1)}.$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \frac{x}{x+y+1} + \frac{y}{y+z+1} + \frac{z}{z+x+1} &= \left(1 - \frac{y+1}{x+y+1} \right) + \left(1 - \frac{z+1}{y+z+1} \right) + \left(1 - \frac{x+1}{z+x+1} \right) \\ &= 3 - \left(\frac{y+1}{x+y+1} + \frac{z+1}{y+z+1} + \frac{x+1}{z+x+1} \right) \Rightarrow P \leq \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{y+1}{x+y+1} + \frac{z+1}{y+z+1} + \frac{x+1}{z+x+1} \right) \\ &\leq \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \left[\frac{(y+1)^2}{(y+1)(x+y+1)} + \frac{(z+1)^2}{(z+1)(y+z+1)} + \frac{(x+1)^2}{(x+1)(z+x+1)} \right] \end{aligned}$$

Áp dụng BĐT Cauchy – Schwarz ta có:

$$\begin{aligned} &\frac{(y+1)^2}{(y+1)(x+y+1)} + \frac{(z+1)^2}{(z+1)(y+z+1)} + \frac{(x+1)^2}{(x+1)(z+x+1)} \\ &\geq \frac{(y+1+z+1+x+1)^2}{(y+1)(x+y+1) + (z+1)(y+z+1) + (x+1)(z+x+1)}. \text{ Để ý rằng do: } x^2 + y^2 + z^2 = 3 \text{ nên} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (y+1)(x+y+1) + (z+1)(y+z+1) + (x+1)(z+x+1) &= 3(x+y+z) + xy + yz + zx + x^2 + y^2 + z^2 + 3 \\ &= \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2 + 9 + 6x + 6y + 6z + 2xy + 2yz + 2zx) = \frac{1}{2}(x+y+z+3)^2. \text{ Do đó} \end{aligned}$$

$$\frac{(y+1)^2}{(y+1)(x+y+1)} + \frac{(z+1)^2}{(z+1)(y+z+1)} + \frac{(x+1)^2}{(x+1)(z+x+1)} \geq 2. \text{ Vậy } \max P = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = y = z = 1.$$

e, Dự đoán dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 2$. Để ý rằng khi $x = 2$ thì $1+x = x^2 - x + 1 = 3$ nên ta nghĩ đến áp dụng AM – GM cho

$$\sqrt{1+x^3} = \sqrt{(1+x)(1-x+x^2)} \leq \frac{x^2+2}{2} \text{ Suy ra}$$

$$P = \frac{2x^2}{\sqrt{4(1+x^3)(1+y^3)}} + \frac{2y^2}{\sqrt{4(1+y^3)(1+z^3)}} + \frac{2x^2}{\sqrt{4(1+z^3)(1+x^3)}}$$

$$\geq \frac{4x^2}{(2+x^2)(2+y^2)} + \frac{yx^2}{(2+y^2)(2+z^2)} + \frac{4z^2}{(2+z^2)(2+x^2)}. \text{ Đặt } a = \frac{x^2}{4}; b = \frac{y^2}{4}; c = \frac{z^2}{4}.$$

Khi đó do $x, y, z > 0$ và $xyz = 8 \Rightarrow a, b, c > 0$ và $abc = 1$.

$$P \geq \frac{16a}{(2+4a)(2+4b)} + \frac{16b}{(2+4b)(2+4c)} + \frac{16c}{(2+4c)(2+4a)}.$$

$$\text{Suy ra: Hay } P \geq 4 \left[\frac{a}{(1+2a)(1+2b)} + \frac{b}{(1+2b)(1+2c)} + \frac{c}{(1+2c)(1+2a)} \right]$$

$$\Rightarrow P \geq 4 \frac{a(1+2c) + b(1+2a) + c(1+2b)}{(1+2a)(1+2b)(1+2c)} \Rightarrow P \geq 4 \frac{a+b+c+2(ab+bc+ca)}{1+2(a+b+c)+4(ab+bc+ca)+8abc}.$$

Đề ý rằng: $a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc} = 3 \Rightarrow a+b+c+2(ab+bc+ca) \geq 9 = 1+8abc$.

$$\Rightarrow 1+8abc + [2(a+b+c)+4(ab+bc+ca)] \leq 3[(a+b+c)+2(ab+bc+ca)]$$

Dẫn đến $P \geq \frac{4}{3}$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 2$.

f, Ta có thể viết lại $\sqrt{\frac{x^3}{x^3+(y+z)^3}} = \sqrt{\frac{1}{1+\left(\frac{y+z}{x}\right)^3}}$, biểu thức này có dạng $\frac{1}{\sqrt{a^3+1}}$ đề ý khi

Dấu đẳng thức xảy ra thì $\frac{y+z}{x} = 2$, theo câu e ta có :

$$\sqrt{a^3+1} = \sqrt{(a+1)(a^2-a+1)} \leq \frac{a^2+2}{2} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{a^3+1}} \geq \frac{2}{a^2+2}. \text{ Thay } a = \frac{y+z}{x} \text{ suy ra}$$

$$\sqrt{\frac{x^3}{x^3+(y+z)^3}} \geq \frac{2x^2}{2x^2+(y+z)^2}$$

Lại có : $(x+y)^2 \leq 2(x^2+y^2)$ Suy ra $\sqrt{\frac{x^3}{x^3+(y+z)^3}} \geq \frac{x^2}{x^2+y^2+z^2}$. Tương tự có hai bất đẳng thức

nữa và cộng lại ta được $P \geq \frac{x^2}{x^2+y^2+z^2} + \frac{y^2}{x^2+y^2+z^2} + \frac{z^2}{x^2+y^2+z^2} = 1$. Dấu đẳng thức xảy ra khi

$$x = y = z$$

Đối với các bài toán mà dấu các đẳng thức không xảy ra khi các biến bằng nhau, Ta cần chú ý tính đối xứng của từng bộ phận để dự đoán sau đó liên kết các dữ kiện của bài toán để tìm ra điểm rơi. Từ đó áp dụng bất đẳng thức AM – GM để tìm ra kết quả.

Ta xét ví dụ sau

Ví dụ 3

a, Cho $x, y, z > 0$ thỏa mãn $xy + yz + zx = 1$. Tìm GTNN của $P = x^2 + y^2 + 2z^2$

b, Cho $x, y, z > 0$ thỏa mãn $x + y + z = 3$. Tìm GTNN của $P = x^2 + y^2 + z^3$

c, Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a^2 + 2b^2 + 3c^2 = 1$. Tìm GTNN của $P = 2a^3 + 3b^3 + 4c^3$

d, Cho các số thực dương a, b, c, d thỏa mãn $abc + bcd + cda + dab = 1$. Tìm GTNN của $P = 4(a^3 + b^3 + c^3) + 9d^3$ (Trích đề thi vào chuyên toán ĐHKHTN- ĐHQG Hà Nội năm học 2012)

e, Cho x, y, z là các số thực dương có tổng bằng 1. Chứng minh rằng $\frac{1}{16x} + \frac{1}{4y} + \frac{1}{z} \geq \frac{49}{16}$

(Tuyển sinh vào 10 chuyên thành phố Huế 2018)

f, Cho các số thực dương a, b . Tìm GTNN của $P = \frac{13a}{4b} + \frac{3b}{a} + \frac{b}{a+b}$

Lời giải

a, Ta dự đoán dấu đẳng thức xảy ra khi $x = y = az$ và mong muốn biến đổi được :

$P = x^2 + y^2 + 2z^2 \geq k(xy + yz + zx)$ để tận dụng giả thuyết $xy + yz + zx = 1$ và dấu bằng xảy ra khi $x = y = az$. Để có tích $x.y$ ta áp dụng $x^2 + y^2 \geq 2xy$. Để tạo ra yz ta áp dụng $y^2 + a^2z^2 \geq 2ayz$. Để tạo ra zx ta áp dụng $a^2z^2 + x^2 \geq 2azx$. Vì hệ số của yz, zx là a nên ta nhân a vào bất đẳng thức đầu tiên rồi cộng lại theo vế ta được

$$a(xy + yz + zx) \leq \frac{a(x^2 + y^2) + (y^2 + a^2z^2) + (a^2z^2 + x^2)}{2} = \frac{(a+1)(x^2 + y^2) + 2a^2z^2}{2}$$

Hay $2a \leq (a+1)(x^2 + y^2) + 2a^2z^2$. Để tạo ra $P = x^2 + y^2 + 2z^2$ ta cần có tỉ lệ

$$(a+1):2a^2 = 1:2 \Leftrightarrow a^2 - a - 1 = 0 \Rightarrow a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}. \text{ Từ đó suy ra } P \geq \frac{2a}{1+a} = \sqrt{5} - 1. \text{ Các em học sinh tự}$$

hoàn thiện lời giải.

b, Ta dự đoán dấu đẳng thức xảy ra khi $x = y = a, z = b; 2a + b = 3$. Theo bất đẳng thức AM –

$$\text{GM ta có : } \begin{cases} x^2 + a^2 \geq 2ax \\ y^2 + a^2 \geq 2ay \\ z^3 + b^3 + b^3 \geq 3b^2z \end{cases}$$

Cộng 3 bất đẳng thức cùng chiều ta có $x^2 + y^2 + z^3 + 2a^3 + 2b^3 \geq 2a(x+y) + 3b^2z$. Tức là :

$$x^2 + y^2 + z^3 \geq 2a(x+y) + 3b^2z - 2a^3 - 2b^3. \text{ Bây giờ ta cần chọn } 2a:3b^2 = 1:1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2a = 3b^2 \\ 2a + b = 3 \end{cases}$$

Giải hệ ta được $x = y = a = \frac{19-\sqrt{37}}{12}; z = b = \frac{\sqrt{37}-1}{6}$. Từ đó bạn đọc tự hoàn thiện bài giải.

c, Dự đoán dấu bằng xảy ra $a = x; b = y; c = z$ với $x, y, z > 0$ và $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$. Ta có :

$$a^3 + a^3 + x^3 \geq 3a^2x; b^3 + b^3 + y^3 \geq 3b^2y; c^3 + c^3 + z^3 \geq 3c^2z, \text{ Suy ra :}$$

$$2a^3 \geq 3a^2x - x^3; b^3 + b^3 + y^3 \geq 3b^2y \Rightarrow 3b^3 \geq \frac{9}{2}yb^2 - \frac{3}{2}y^3; 2c^3 \geq 3c^2z - z^3 \Rightarrow 4c^3 \geq 2(3c^2z - z^3)$$

Cộng 3 bất đẳng thức cùng chiều ta được :

$$P \geq 3\left(xa^2 + \frac{3}{2}yb^2 + 2zc^2\right) - x^3 - \frac{3}{2}y^3 - 2z^3. \text{ Ta cần chọn } x, y, z \text{ sao cho : } x:\frac{3}{2}y:2z = 1:2:3 \text{ và}$$

$x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$. Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta tìm được

$$x = \frac{6}{\sqrt{407}}; y = \frac{8}{\sqrt{407}}; z = \frac{9}{\sqrt{407}}. \text{ Học sinh tự hoàn thiện lời giải.}$$

d, Biểu thức P cho ta dự đoán dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = xd$, để giảm ẩn trong bài toán ta sẽ áp dụng bất đẳng thức AM – GM theo cách :

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc; b^3 + c^3 + x^3d^3 \geq 3bcxd; c^3 + a^3 + x^3d^3 \geq caxd; a^3 + b^3 + x^3d^3 \geq abxd$$

$$\text{Suy ra : } \begin{cases} x(a^3 + b^3 + c^3) = 3abcx \\ b^3 + c^3 + x^3d^3 \geq 3bcxd \\ c^3 + a^3 + x^3d^3 \geq caxd \\ a^3 + b^3 + x^3d^3 \geq abxd \end{cases} \text{ Cộng bốn bất đẳng thức cùng chiều ta có}$$

$$(x+2)a^3 + (x+2)b^3 + (x+2)c^3 + 3x^3d^3 \geq 3x(abc + bcd + cda + dab) = 3x. \text{ Bây giờ ta chọn } x \text{ sao cho}$$

$(x+2):3x^2 = 4:9 \Leftrightarrow 4x^3 - 3x = 6$. Đặt $x = \frac{1}{2}\left(y + \frac{1}{y}\right)$ thay vào ta tìm được

$y = \sqrt[3]{6+\sqrt{35}}; y = \sqrt[3]{6-\sqrt{35}} \Rightarrow x = \frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{6+\sqrt{35}} + \sqrt[3]{6-\sqrt{35}}\right)$. Bạn đọc tự hoàn thiện lời giải.

e, Ta có $\frac{1}{16x} + \frac{1}{4y} + \frac{1}{z} \geq \frac{49}{16} \Leftrightarrow \frac{1}{x} + \frac{4}{y} + \frac{16}{z} \geq 49$ nên ta dự đoán dấu bằng xảy ra khi

$x=a; y=b; z=c$ khi đó $\frac{1}{x} = \frac{1}{a} = \frac{x}{a^2}; \frac{4}{y} = \frac{4}{b} = \frac{4y}{b^2}; \frac{16}{z} = \frac{16}{c} = \frac{16z}{c^2}$.

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta có $\frac{1}{x} + \frac{x}{a^2} \geq \frac{2}{a}; \frac{4}{y} + \frac{4y}{b^2} \geq \frac{8}{b}; \frac{16}{z} + \frac{16z}{c^2} \geq \frac{32}{c}$

Suy ra: $\frac{1}{16x} + \frac{1}{4y} + \frac{1}{z} \geq \frac{2}{a} + \frac{8}{b} + \frac{32}{c} - \left(\frac{x}{a^2} + \frac{4y}{b^2} + \frac{16z}{c^2}\right)$, ta cần tìm a, b, c để

$\frac{1}{a^2} : \frac{4}{b^2} : \frac{16}{c^2} = 1:1:1 \Leftrightarrow a = \frac{b}{2} = \frac{c}{4}$ kết hợp với điều kiện $a+b+c=1 \Rightarrow a = \frac{1}{7}; b = \frac{2}{7}; c = \frac{4}{7}$

Từ đó ta có lời giải bài toán như sau: Áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta có $\frac{1}{x} + 49x \geq 14$ (1). Tương tự ta có $\frac{4}{y} + 49y \geq 28$ (2) và $\frac{16}{z} + 49z \geq 56$ (3)

Cộng (1);(2);(3) theo vế ta được: $\frac{1}{x} + \frac{4}{y} + \frac{16}{z} + 49(x+y+z) \geq 98 \Leftrightarrow \frac{1}{x} + \frac{4}{y} + \frac{16}{z} \geq 49$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $x = \frac{1}{7}; y = \frac{2}{7}; z = \frac{4}{7}$. Vậy bất đẳng thức đã được chứng minh.

f. Đặt $a = xb$ với $x > 0$ thì $P = \frac{13}{4}x + \frac{3}{x} + \frac{1}{x+1}$, giả sử dấu bằng xảy ra khi $x = m$ khi đó

$\frac{1}{x} = \frac{1}{m}$ nên ta tạo ra $\frac{3x}{m^2} = \frac{3}{x}, \frac{1}{x+1} = \frac{1}{m+1}$

nên ta tạo ra $\frac{1}{x+1} = \frac{x+1}{(m+1)^2}$. Từ đó ta có: $P = \frac{3x}{m^2} + \frac{3}{x} + \frac{x+1}{(m+1)^2} + \frac{1}{x+1} + 4x - \frac{3x}{m^2} - \frac{x+1}{(m+1)^2}$,

ta cần chọn m sao cho $\frac{3x}{m^2} + \frac{x+1}{(m+1)^2} = \frac{13}{4}x + A$. Ta có:

$$\frac{3x}{m^2} + \frac{x+1}{(m+1)^2} = \frac{3(m+1)^2 + m^2}{m^2(m+1)^2} \cdot x + \frac{1}{(m+1)^2}$$

Suy ra m phải thỏa mãn $\frac{3(m+1)^2 + m^2}{m^2(m+1)^2} = \frac{13}{4} \Leftrightarrow 13m^4 + 26m^3 - 3m^2 - 24m - 12 = 0 \Rightarrow m = 1$

Ta có lời giải như sau $P = 3x + \frac{3}{x} + \frac{x+1}{4} + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{4}$. Áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta

có: $3x + \frac{3}{x} \geq 6; \frac{x+1}{4} + \frac{1}{x+1} \geq 1 \Rightarrow P \geq 7 - \frac{1}{4} = \frac{27}{4}$. Khi $a = b \Rightarrow P = \frac{27}{4}$ nên GTNN của P là

$$\frac{27}{4}$$

2. Kỹ thuật ghép đối xứng

Trong nhiều bài toán mà biểu thức 2 vế tương đối phức tạp, việc chứng minh trực tiếp tương đối khó khăn thì ta có thể sử dụng kỹ thuật ghép đối xứng để bài toán trở nên đơn giản hơn. Các bài toán bất đẳng thức thông thường chúng ta hay gặp hai dạng sau:

Dạng 1 chứng minh $X + Y + Z \geq A + B + C$

Ý tưởng:

Nếu ta chứng minh được $X + Y \geq 2A$ sau đó tương tự hóa ta chứng minh được

$Y + Z \geq 2B; Z + X \geq 2C$, (nhờ tính đối xứng của bài toán). Cộng về với về của 3 bất đẳng thức trên sau đó thu gọn ta được đpcm.

Dạng 2 Chứng minh $XYZ \geq ABC$ với $X, Y, Z \geq 0$

Ý tưởng: Nếu ta chứng minh được $XY \geq A^2$. Sau đó tương tự hóa để chỉ ra $YZ \geq B^2; ZX \geq C^2$ (nhờ tính chất đối xứng của bài toán). Sau đó nhân ba bất đẳng thức trên theo về rồi lấy căn bậc hai ta được điều phải chứng minh.

Ví dụ

a, Cho ba số dương x, y, z thỏa mãn $x + y + z = 1$ Chứng minh rằng

$$\sqrt{2x^2 + xy + 2y^2} + \sqrt{2y^2 + yz + 2z^2} + \sqrt{2z^2 + zx + 2x^2} \geq \sqrt{5}$$

(đề thi vào 10 tỉnh Thái Bình 2005 – 2006)

b, Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $ab + bc + ca = 1$. Chứng minh rằng

$$2abc(a + b + c) \leq \frac{5}{9} + a^4b^2 + b^4c^2 + c^4a^2$$

(Trích đề thi vào lớp 10 – Trường chuyên ĐHKHTN Hà Nội 2014).

c, Cho 3 số dương x, y, z thỏa mãn $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z+1} \geq 2$. Chứng minh rằng $xyz \leq \frac{1}{8}$

d, Cho $x, y, z > 2$ và $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$. Chứng minh rằng $(x-2)(y-2)(z-2) \leq 1$.

(Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 chuyên Lam Sơn Thanh Hóa năm 2005- 2006)

Lời giải

a, Ta cần một đánh giá dạng $2x^2 + xy + 2y^2 \geq (mx + ny)^2$ sao cho dấu bằng xảy ra khi $x = y$. Để có được đánh giá này thông thường ta viết lại:

$$2x^2 + xy + 2y^2 = a(x-y)^2 + b(x+y)^2 = (a+b)x^2 + 2(b-a)xy + (a+b)y^2$$

$$\text{Từ đó suy ra } \begin{cases} a+b=2 \\ b-a=\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\frac{3}{4} \\ b=\frac{5}{4} \end{cases} \text{ Từ đó ta có}$$

$$2x^2 + xy + 2y^2 = \frac{3}{4}(x-y)^2 + \frac{5}{4}(x+y)^2 \geq \frac{5}{4}(x+y)^2 \Rightarrow \sqrt{2x^2 + xy + 2y^2} \geq \frac{\sqrt{5}}{2}(x+y)$$

Tương tự ta có hai bất đẳng thức và cộng lại ta được

$$\sqrt{2x^2 + xy + 2y^2} + \sqrt{2y^2 + yz + 2z^2} + \sqrt{2z^2 + zx + 2x^2} \geq \sqrt{5}(x+y+z) = \sqrt{5} \text{ . dấu đẳng thức xảy ra khi } x = y = z = \frac{1}{3}$$

Ta cũng có thể chứng minh trực tiếp

$$\begin{aligned} \sqrt{2x^2 + xy + 2y^2} \geq \frac{\sqrt{5}}{2}(x+y) &\Leftrightarrow 2x^2 + xy + 2y^2 \geq \frac{5}{4}(x+y)^2 \Leftrightarrow 2(x+y)^2 - 3xy \geq \frac{5}{4}(x+y)^2 \\ &\Leftrightarrow \frac{(x+y)^2}{4} \geq xy \end{aligned}$$

(Đúng theo AM – GM).

b, Áp dụng bất đẳng thức AM – GM cho ba số thực dương ta có

$$\begin{cases} a^4b^2 + \frac{1}{3}abc^2 + \frac{1}{9}ca \geq a^2bc \\ b^4c^2 + \frac{1}{3}a^2bc + \frac{1}{9}ab \geq b^2ca \Rightarrow \frac{2}{3}abc(a+b+c) \leq a^4b^2 + b^4c^2 + c^4a^2 + \frac{1}{9} \\ c^4a^2 + \frac{1}{3}ab^2c + \frac{1}{9}bc \geq c^2ab \end{cases} \quad (1)$$

Mặt khác ta cũng có : $abc(a+b+c) = ab.ac + ab.bc + ca.cb \leq \frac{1}{3}(ab+bc+ca)^2 = \frac{1}{3}$ Suy ra

$\frac{4}{3}abc(a+b+c) \leq \frac{4}{9} \quad (2)$. Cộng vế với vế của (1) và (2) ta có điều phải chứng minh.

d, Từ giả thuyết $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z+1} \geq 2$, ta suy ra:

d, Với giả thiết $x, y, z > 2$, ta nghĩ đến đặt ẩn phụ đưa bài toán về dạng đơn giản hơn và quen thuộc hơn. Đặt $x = a + 2, y = b + 2, z = c + 2$ với $a, b, c > 0$ Bài toán quay về chứng minh

$abc \leq 1$ Với $a, b, c > 0$ thỏa mãn: $\frac{1}{a+2} + \frac{1}{b+2} + \frac{1}{c+2} = 1 \Leftrightarrow \frac{a}{a+2} + \frac{b}{b+2} + \frac{c}{c+2} = 1$.

Ta có: $\frac{1}{c+2} = 1 - \frac{1}{a+2} - \frac{1}{b+2} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{a+2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{b+2}\right) = \frac{a}{2(a+2)} + \frac{b}{2(b+2)} \geq \sqrt{\frac{ab}{(a+2)(b+2)}}$

Tương tự: $\frac{1}{b+2} \geq \sqrt{\frac{ca}{(a+2)(c+2)}}; \frac{1}{a+2} \geq \sqrt{\frac{cb}{(b+2)(c+2)}}$

Nhân ba bất đẳng thức theo vế ta được: $\frac{1}{(a+2)(b+2)(c+2)} \geq \frac{abc}{(a+2)(b+2)(c+2)} \Rightarrow abc \leq 1$.

e, Ta có: $P = \frac{(2x+y+z) + (2y+x+z) + (2z+x+y)}{8(x+y)(y+z)(z+x)} \quad (1)$

Theo bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$2x + y + z = (x+y) + (x+z) \geq 2\sqrt{(x+y)(x+z)} \quad (2)$$

$$2y + x + z = (x+y) + (y+z) \geq 2\sqrt{(x+y)(y+z)} \quad (3)$$

$$2z + y + x = (z+y) + (x+z) \geq 2\sqrt{(z+y)(x+z)} \quad (4)$$

Nhân từng vế của (2)(3)(4) và từ (1) suy ra $P \geq 1$.

Dấu đẳng thức trong xảy ra khi đồng thời có dấu bằng trong (2)(3)(4)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y = x+z \\ y+x = y+z \\ x+z = y+z \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z \quad \text{Từ đó } \min P = 1$$

f, Ta có:

$$\begin{aligned} [2a + (b+c)]^2 &\geq 4.2a(b+c) \Rightarrow \frac{1}{(2a+b+c)^2} \leq \frac{1}{8a(b+c)} \leq \frac{1}{8} \left[\frac{1}{4a^2} + \frac{1}{(b+c)^2} \right] \\ &\leq \frac{1}{8} \left[\frac{1}{4a^2} + \frac{1}{4bc} \right] \leq \frac{1}{8} \left[\frac{1}{4a^2} + \frac{1}{8} \left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right) \right]. \end{aligned}$$

Tương tự ta cũng có hai BĐT nữa rồi cộng ba BĐT cùng chiều ta có:

$$P \leq \frac{1}{8} \left[\frac{1}{4a^2} + \frac{1}{8} \left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right) \right] + \frac{1}{4b^2} + \frac{1}{8} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{c^2} \right) + \frac{1}{4c^2} + \frac{1}{8} \left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{a^2} \right) = \frac{3}{16}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

3. Kỹ thuật AM-GM ngược dấu

Ví dụ:

a, Cho $a, b, c > 0$ và $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng: $\frac{a}{b^3 + ab} + \frac{a}{c^3 + bc} + \frac{a}{b^3 + ac} \geq \frac{3}{2}$.

b, Cho $a, b, c > 0$ và $a + b + c = 9$. Chứng minh rằng: $\frac{a^3 + b^3}{ab + 9} + \frac{b^3 + c^3}{bc + 9} + \frac{c^3 + a^3}{ca + 9} \geq 9$.

c, Cho $x, y, z > 0$ và $x + y + z = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{x}{1+y^2} + \frac{y}{1+z^2} + \frac{z}{1+x^2}.$$

d, Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn: $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{2a^2}{a+b^2} + \frac{2b^2}{b+c^2} + \frac{2c^2}{c+a^2} \geq a + b + c. \text{ (Tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán TP Hà Nội 2017)}$$

Lời giải

a, Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$\frac{a}{b^3 + ab} = \frac{1}{b} - \frac{b}{b^2 + a} \geq \frac{1}{b} - \frac{b}{2\sqrt{ab^2}} = \frac{1}{b} - \frac{1}{2\sqrt{a}} \geq \frac{1}{b} - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{a} + 1\right). \text{ Tương tự:}$$

$$\frac{b}{c^3 + bc} \geq \frac{1}{c} - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{b} + 1\right); \frac{c}{a^3 + ac} \geq \frac{1}{a} - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{c} + 1\right). \text{ Cộng ba bất đẳng thức này lại theo vế, ta được:}$$

$$\frac{a}{b^3 + ab} + \frac{b}{c^3 + bc} + \frac{c}{a^3 + ac} \geq \frac{3}{4}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) - \frac{3}{4}. \text{ Bài toán được quy về chứng minh:}$$

$$\frac{3}{4}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) - \frac{3}{4} \geq \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 3 \Leftrightarrow \left(a + \frac{1}{a}\right) + \left(b + \frac{1}{b}\right) + \left(c + \frac{1}{c}\right) \geq 3 + a + b + c = 6.$$

Bất đẳng thức cuối cùng hiển nhiên đúng vì theo bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$a + \frac{1}{a} \geq 2; b + \frac{1}{b} \geq 2; c + \frac{1}{c} \geq 2; \text{ Bài toán được chứng minh xong. Dấu bằng xảy ra khi}$$

$$a = b = c = 1.$$

b, Ta chứng minh được:

$$a^3 + b^3 \geq \frac{1}{4}(a+b)^3, ab \leq \frac{1}{4}(a+b)^2 \Rightarrow \frac{a^3 + b^3}{ab + 9} \geq \frac{(a+b)^3}{(a+b)^2 + 36} = a + b - \frac{36(a+b)}{(a+b)^2 + 36}. \text{ Mặt khác ta}$$

có:

$$(a+b)^2 + 36 \geq 12(a+b) \Rightarrow \frac{a^3 + b^3}{ab + 9} \geq a + b - 3. \text{ Cộng ba bất đẳng thức cùng chiều suy ra đpcm.}$$

$$c, \text{ Ta có: } \frac{x}{1+y^2} = x - \frac{xy^2}{1+y^2}. \text{ Theo bất đẳng thức AM-GM thì } 1+y^2 \geq 2y \Rightarrow \frac{x}{1+y^2} \geq x - \frac{xy}{2}.$$

$$\text{Tương tự: } \frac{y}{1+z^2} \geq y - \frac{yz}{2}; \frac{z}{1+x^2} \geq z - \frac{zx}{2}. \text{ Cộng từng vế của 3 bất đẳng thức trên ta có:}$$

$$P \geq (x+y+z) - \frac{1}{2}(xy + yz + zx). \text{ Mặt khác theo bất đẳng thức AM-GM, ta có:}$$

$$3(xy + yz + zx) \leq (x+y+z)^2 \text{ Vì } x+y+z=3 \Rightarrow xy + yz + zx \leq 3.$$

$$\text{Như vậy } \min P = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x = y = z = 1.$$

d, Bất đẳng thức đã cho có thể viết lại thành:

$$2\left(a - \frac{ab^2}{a+b^2}\right) + 2\left(b - \frac{bc^2}{b+c^2}\right) + 2\left(c - \frac{ca^2}{c+a^2}\right) \geq a+b+c \Leftrightarrow \frac{2ab^2}{a+b^2} + \frac{2bc^2}{b+c^2} + \frac{2ca^2}{c+a^2} \leq a+b+c.$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có: $a+b^2 \geq 2b\sqrt{a} \Rightarrow \frac{2ab^2}{a+b^2} \leq \frac{2ab^2}{2b\sqrt{a}} = \sqrt{ab^2} \leq \frac{ab+b}{2}.$

Từ đó suy ra: $\frac{2ab^2}{a+b^2} + \frac{2bc^2}{b+c^2} + \frac{2ca^2}{c+a^2} \leq \frac{a+b+c+ab+bc+ca}{2}.$ Ta cần chứng minh:

$ab+bc+ca \leq a+b+c.$ Ta có: $3(ab+bc+ca) \leq (a+b+c)^2.$ Suy ra:

$(ab+bc+ca)^2 \leq (a+b+c)^2 \Leftrightarrow ab+bc+ca \leq a+b+c$ (đpcm)

4. Phương pháp đặt ẩn phụ

Kỹ thuật đặt ẩn phụ là một kỹ thuật rất đặc biệt trong chứng minh bất đẳng thức. Việc chọn ẩn phụ thích hợp sẽ giúp bài toán trở nên đơn giản hơn.

Một số kỹ thuật hay gặp như sau:

1, Khi có giả thiết: $a+b+c=abc$ ta có thể biến đổi thành: $\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} = 1.$

Đặt: $\frac{1}{a} = x; \frac{1}{b} = y; \frac{1}{c} = z \Rightarrow xy + yz + zx = 1.$

2, Khi gặp giả thiết $a+b+c=1$ ta có thể biến đổi thành: $\sqrt{\frac{ab}{c} \cdot \frac{ac}{b}} + \sqrt{\frac{bc}{a} \cdot \frac{ba}{c}} + \sqrt{\frac{ac}{b} \cdot \frac{cb}{a}} = 1.$

Đặt: $\sqrt{\frac{ab}{c}} = x; \sqrt{\frac{bc}{a}} = y; \sqrt{\frac{ca}{b}} = z \Rightarrow xy + yz + zx = 1.$

3, Khi có giả thiết: $ab+bc+ca+abc=4$ ta có thể biến đổi thành: $\frac{1}{a+2} + \frac{1}{b+2} + \frac{1}{c+2} = 1.$

Đặt: $x = \frac{1}{a+2}; y = \frac{1}{b+2}; z = \frac{1}{c+2} \Rightarrow x+y+z=1.$

4, Từ điều hiển nhiên: $\frac{x}{x+y+z} + \frac{y}{x+y+z} + \frac{z}{x+y+z} = 1 \Rightarrow \frac{1}{1+\frac{y+z}{x}} + \frac{1}{1+\frac{x+z}{y}} + \frac{1}{1+\frac{y+x}{z}} = 1$

Đặt: $a = \frac{y+z}{x}; b = \frac{x+z}{y}; c = \frac{y+x}{z} \Rightarrow \frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1} = 1 \Leftrightarrow abc = a+b+c+2.$

Từ đó suy ra khi gặp giả thiết: $abc = a+b+c+2$ ta có thể đặt: $a = \frac{y+z}{x}; b = \frac{x+z}{y}; c = \frac{y+x}{z}$

Nếu đổi $(a, b, c) \rightarrow (\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c})$ ta có: $abc = a+b+c+2 \Leftrightarrow ab+bc+ca+2abc=1.$

Từ đó suy ra khi gặp giả thiết: $ab+bc+ca+2abc=1$ ta có thể đặt:

$a = \frac{y+z}{x}; b = \frac{x+z}{y}; c = \frac{y+x}{z}$

Một cách tổng quát: Khi gặp giả thiết: $\frac{1}{k+a} + \frac{1}{k+b} + \frac{1}{k+c} = 1,$ Khi khai triển thu gọn ta có:

$k^3 - 3k^2 + (k^2 - 2k)(a+b+c) + (k-1)(ab+bc+ca) + abc = 0.$ suy ra tồn tại các số x, y, z sao cho

$\frac{1}{k+a} = \frac{x}{x+y+z}; \frac{1}{k+b} = \frac{y}{x+y+z}; \frac{1}{k+c} = \frac{z}{x+y+z};$ Như vậy, với các số thực dương a, b, c

thỏa mãn: $\frac{1}{k+a} + \frac{1}{k+b} + \frac{1}{k+c} = 1.$ Thì tồn tại các số $m, n, p > 0$ sao cho:

$$a = \frac{m+n+p}{m} - k; b = \frac{m+n+p}{n} - k; c = \frac{m+n+p}{p} - k$$

+ Nếu $a, b, c > 0$ và $ab + bc + ca + abc = 4$ thì ta có thể đặt $a = \frac{2m}{n+p}; b = \frac{2n}{p+m}; c = \frac{2p}{m+n};$

+ Nếu $a, b, c > 0$ và $a + b + c + 1 = 4abc$ thì ta có thể đặt $a = \frac{n+p}{2m}; b = \frac{p+m}{2n}; c = \frac{m+n}{2p};$

5, Khi gặp giả thiết: $xyz = 1$. ta có thể chọn các phép đặt: $\frac{a^2}{b} = x; \frac{b^2}{c} = y; \frac{c^2}{a} = z; \Rightarrow abc = 1.$

$$\frac{a^2}{bc} = x; \frac{b^2}{ac} = y; \frac{c^2}{ab} = z; \text{ Hoặc } \frac{x}{y} = a; \frac{y}{z} = b; \frac{z}{x} = c;$$

6, Đặt : $x = a + b - c; y = b + c - a; z = c + a - b$ hoặc đặt $x = a + b; y = b + c; z = c + a.$

Ví dụ 1.

a, Cho x, y, z là các số thực dương và thỏa mãn điều kiện $x + y + z = xyz$ Tìm giá trị lớn nhất

của biểu thức : $P = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+z^2}}.$

b, Cho $x, y, z > 0$ và $x + y + z = 3xyz$. Chứng minh rằng:

$$\frac{yz}{x^3(z+2y)} + \frac{zx}{y^3(x+2z)} + \frac{xy}{z^3(y+2x)} \geq 1.$$

c, Cho a, b, c là ba cạnh một tam giác

:Chứng minh rằng: $(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) \leq abc.$

d, Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn $ab + bc + ca + abc = 4$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca} \leq 3.$$

e, Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $ab + bc + ca + abc = 2$. Tìm giá trị lớn nhất của

biểu thức: $Q = \frac{a+1}{a^2+2a+2} + \frac{b+1}{b^2+2b+2} + \frac{c+1}{c^2+2c+2}$ (TS lớp 10 chuyên toán THPT chuyên

KHTN-ĐHQG Hà Nội 2017)

Lời giải

a, Từ giả thiết $x + y + z = xyz$, ta có $\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} = 1$ Đặt $a = \frac{1}{x}; b = \frac{1}{y}; c = \frac{1}{z} \Rightarrow a, b, c > 0.$

Giả thiết trở thành: $ab + bc + ca = 1.$ $P = \frac{a}{\sqrt{1+a^2}} + \frac{b}{\sqrt{1+b^2}} + \frac{c}{\sqrt{1+c^2}}.$

Đề ý rằng: $a^2 + 1 = (a+b)(a+c); b^2 + 1 = (a+b)(b+c); c^2 + 1 = (c+b)(a+c);$

Lúc này P có dạng: $P = \frac{a}{\sqrt{(a+b)(a+c)}} + \frac{b}{\sqrt{(a+b)(b+c)}} + \frac{c}{\sqrt{(c+b)(a+c)}}$

$P = \sqrt{\frac{a}{a+b}} \cdot \sqrt{\frac{a}{a+c}} + \sqrt{\frac{b}{a+b}} \cdot \sqrt{\frac{b}{b+c}} + \sqrt{\frac{c}{c+b}} \cdot \sqrt{\frac{c}{a+c}}$ Theo bất đẳng thức AM-GM ta có:

$P \leq \frac{1}{2} \left(\frac{a}{a+b} + \frac{a}{a+c} + \frac{b}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+b} + \frac{c}{a+c} \right) = \frac{3}{2}$ Hay $P \leq \frac{3}{2}$. Dấu bằng xảy ra khi

$a = b = c = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow x = y = z = \sqrt{3}.$

b, Đặt $P = \frac{yz}{x^3(z+2y)} + \frac{zx}{y^3(x+2z)} + \frac{xy}{z^3(y+2x)}$. Đặt $a = \frac{1}{x}; b = \frac{1}{y}; c = \frac{1}{z}$. Từ giả thiết ta có

$a, b, c > 0; ab + bc + ca = 3$. Lúc này dễ thấy : $P = \frac{a^3}{b+2c} + \frac{b^3}{c+2a} + \frac{c^3}{a+2b}$. Theo bất đẳng thức

AM-GM ta có: $\frac{9a^3}{b+2c} + (b+2c)a \geq 6a^2; \frac{9b^3}{c+2a} + (c+2a)b \geq 6b^2; \frac{9c^3}{a+2b} + (a+2b)c \geq 6c^2;$

Cộng từng vế ba bất đẳng thức trên ta có: $9P + 3(ab + bc + ca) \geq 6(a^2 + b^2 + c^2)$.

Mặt khác ta có kết quả quen thuộc $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$ Kết hợp với

$ab + bc + ca = 3 \Rightarrow P \geq 1$

Vậy $\min P = 1$ Giá trị nhỏ nhất khi $x = y = z = 1$.

c, Đặt $x = a + b - c; y = b + c - a; z = c + a - b \Rightarrow a + b + c = \frac{x + y + z}{2}$

Từ đó suy ra : $a = \frac{x+z}{2}; b = \frac{x+y}{2}; c = \frac{y+z}{2}$. Bất đẳng thức cần chứng minh có dạng:

$(x+y)(y+z)(z+x) \geq 8xyz$. Đây là bất đẳng thức quen thuộc (Xem ở 1).

d) Với giả thiết $x, y, z > 2$, ta nghĩ đến việc đặt ẩn phụ để đưa bài toán về dạng đơn giản và quen thuộc hơn.

Đặt $x = a + 2; y = b + 2; z = c + 2$ với $a; b; c > 0$. Bài toán quay về chứng minh $abc \leq 1$.

Với $a; b; c > 0$ thỏa mãn:

$\frac{1}{a+2} + \frac{1}{b+2} + \frac{1}{c+2} = 1 \Leftrightarrow \frac{a}{a+2} + \frac{b}{b+2} + \frac{c}{c+2} = 1$. Đến đây ta đặt tiếp:

$m = \frac{a}{a+2}; n = \frac{b}{b+2}; p = \frac{c}{c+2} \Rightarrow m + n + p = 1$. Ta có:

$\frac{1}{m} = \frac{a+2}{a} = 1 + \frac{2}{a} \Rightarrow \frac{2}{a} = \frac{1}{m} - 1 = \frac{n+p}{m} \Rightarrow a = \frac{2m}{n+p}$. Tương tự: $b = \frac{2n}{p+m}; c = \frac{2p}{m+n}$

Do đó bất đẳng thức trở thành: $\frac{2m}{n+p} \cdot \frac{2n}{p+m} \cdot \frac{2p}{m+n} \leq 1 \Leftrightarrow (m+n)(n+p)(p+m) \geq 8mnp$.

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có: $(m+n)(n+p)(p+m) \geq 2\sqrt{mn} \cdot 2\sqrt{np} \cdot 2\sqrt{pm} = 8mnp$.

Bài toán được giải quyết xong. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow m = n = p \Leftrightarrow a = b = c = 1 \Leftrightarrow x = y = z = 3$.

e) Ta có:

$ab + bc + ca + abc = 4 \Leftrightarrow abc + 2(ab + bc + ca) + 4(a + b + c) + 8 = 12 + ab + bc + ca + 4(a + b + c)$

$\Leftrightarrow (a+2)(b+2)(c+2) = (a+2)(b+2)(c+2) + (c+2)(a+2) \Leftrightarrow 1 = \frac{1}{a+2} + \frac{1}{b+2} + \frac{1}{c+2}$. Suy ra,

tồn tại các số dương m, n, p sao cho: $a = \frac{2m}{n+p}, b = \frac{2n}{p+m}, c = \frac{2p}{m+n}$.

Thay vào bất đẳng thức cần chứng minh ta được:

$$\sqrt{\frac{2m}{n+p} \cdot \frac{2n}{p+m}} + \sqrt{\frac{2n}{p+m} \cdot \frac{2p}{m+n}} + \sqrt{\frac{2p}{m+n} \cdot \frac{2m}{n+p}} \leq 3$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{\frac{m}{m+p} \cdot \frac{n}{n+p}} + 2\sqrt{\frac{n}{n+m} \cdot \frac{p}{m+p}} + 2\sqrt{\frac{p}{n+p} \cdot \frac{m}{m+n}} \leq 3. \text{ Sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có:}$$

$$2\sqrt{\frac{m}{m+p} \cdot \frac{n}{n+p}} \leq \frac{m}{m+p} + \frac{n}{n+p} \cdot 2\sqrt{\frac{n}{m+n} \cdot \frac{p}{m+p}} \leq \frac{n}{m+n} + \frac{p}{m+p},$$

$$2\sqrt{\frac{p}{n+p} \cdot \frac{m}{m+n}} \leq \frac{p}{n+p} + \frac{m}{m+n}. \text{ Cộng ba bất đẳng thức này lại theo vế, ta được:}$$

$$2\sqrt{\frac{m}{m+p} \cdot \frac{n}{n+p}} + 2\sqrt{\frac{n}{m+n} \cdot \frac{p}{m+p}} + 2\sqrt{\frac{p}{n+p} \cdot \frac{m}{m+n}} \leq \frac{m+n}{m+n} + \frac{n+p}{n+p} + \frac{m+p}{m+p} = 3.$$

f) Đặt $x = a+1; y = b+1; z = c+1$ thì giả thiết bài toán trở thành: $x+y+z = xyz$, biểu thức Q trở

thành: $Q = \frac{x}{x^2+1} + \frac{y}{y^2+1} + \frac{z}{z^2+1}$. Ta tiếp tục biến đổi giả thiết thành $\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} = 1$

Đặt: $m = \frac{1}{x}; n = \frac{1}{y}; p = \frac{1}{z}$ thì giả thiết trở thành: $mn+np+pm=1$ và $Q = \frac{m}{m^2+1} + \frac{n}{n^2+1} + \frac{p}{p^2+1}$.

Đề ý rằng: $m^2+1 = m^2+mn+np+pm = (m+n)(m+p)$, suy ra:

$$Q = \frac{m}{(m+n)(m+p)} + \frac{n}{(n+p)(n+m)} + \frac{p}{(p+n)(p+m)} = \frac{2(mn+np+pm)}{(m+n)(n+p)(p+m)}$$

Ta lại có: $(m+n)(n+p)(p+m) = (m+n+p)(mn+np+pm) - mnp$ và

$(m+n+p)(mn+np+pm) \geq 9mnp$ suy ra:

$$(m+n+p)(mn+np+pm) - mnp \geq \frac{8}{9}(m+n+p)(mn+np+pm) \text{ dẫn đến } Q \leq \frac{9}{4(m+n+p)} \text{ mà}$$

$$(m+n+p)^2 \geq 3(mn+np+pm) = 3 \Rightarrow m+n+p \geq \sqrt{3} \text{ dẫn đến } P \leq \frac{9}{4\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\sqrt{3}-1$.

Ví dụ 2

a) Cho x, y, z là ba số thực dương thỏa mãn $x+y+z=1$. Chứng minh:

$$\frac{1-x^2}{x+yz} + \frac{1-y^2}{y+zx} + \frac{1-z^2}{z+xy} \geq 6. \text{ (Tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán TP Hà Nội, 2016).}$$

b) Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $abc=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = \frac{1}{a+2b+3} + \frac{1}{b+2c+3} + \frac{1}{c+2a+3}.$$

c) Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn: $xy + yz + zx = 2xyz$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{\frac{x}{2y^2z^2 + xyz}} + \sqrt{\frac{y}{2z^2x^2 + xyz}} + \sqrt{\frac{z}{2x^2y^2 + xyz}} \leq 1.$$

d) Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn: $xyz = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{x^2}{(1+x)^2} + \frac{y^2}{(1+y)^2} + \frac{z^2}{(1+z)^2} \geq \frac{3}{4}.$$

Lời giải

a) Áp dụng giả thiết ta được: $\frac{1-x^2}{x+yz} = \frac{(1-x)(1+x)}{(x+y)(z+x)} = \frac{(x+y)(y+z) + (z+x)(y+z)}{(x+y)(z+x)}$

Hoàn toàn tương tự, ta có:

$$\frac{1-y^2}{y+zx} = \frac{(x+z)(x+y) + (x+z)(y+z)}{(x+y)(y+z)}; \frac{1-z^2}{z+xy} = \frac{(x+y)(y+z) + (x+y)(x+z)}{(y+z)(z+x)}$$

Đặt: $a = (x+y)(y+z); b = (y+z)(z+x); c = (x+y)(z+x)$, khi đó ta viết lại được bất đẳng thức

thành: $\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} \geq 6.$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta được: $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2; \frac{b}{c} + \frac{c}{b} \geq 2; \frac{c}{a} + \frac{a}{c} \geq 2.$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được: $\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} \geq 6$, dấu đẳng thức xảy ra khi

và chỉ khi $a = b = c \Leftrightarrow x = y = z.$

b) Đặt $a = x^2; b = y^2; c = z^2$ khi đó ta được: $xyz = 1$ và biểu thức P được viết thành

$$P = \frac{1}{x^2 + 2y^2 + 3} + \frac{1}{y^2 + 2z^2 + 3} + \frac{1}{z^2 + 2x^2 + 3}. \text{ Theo bất đẳng thức AM-GM ta có:}$$

$$x^2 + y^2 \geq 2xy; y^2 + 1 \geq 2y \Rightarrow x^2 + 2y^2 + 3 \geq 2(xy + y + 1).$$

Do đó ta được: $\frac{1}{x^2 + 2y^2 + 3} \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{xy + y + 1}.$

Chứng minh tương tự, ta có: $\frac{1}{y^2 + 2z^2 + 3} \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{yz + z + 1}; \frac{1}{z^2 + 2x^2 + 3} \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{zx + x + 1}.$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được: $P \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{xy + y + 1} + \frac{1}{yz + z + 1} + \frac{1}{zx + x + 1} \right) = \frac{1}{2}.$

c) Giả thiết của bài toán được viết thành: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2$. Đặt $x = \frac{1}{a}; y = \frac{1}{b}; z = \frac{1}{c}$ thì ta được

$a + b + c = 2$. Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh được viết lại thành:

$\frac{bc}{\sqrt{2a+bc}} + \frac{ca}{\sqrt{2b+ca}} + \frac{ab}{\sqrt{2c+ab}} \leq 1$. Chú ý đến giả thiết $a+b+c=2$, ta có:

$$\frac{bc}{\sqrt{2a+bc}} = \frac{bc}{\sqrt{a(a+b+c)+bc}} = \frac{bc}{\sqrt{(a+b)(a+c)}} \leq \frac{bc}{2} \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{c+a} \right).$$

Hoàn toàn tương tự, ta được: $\frac{ca}{\sqrt{2b+ca}} \leq \frac{ca}{2} \left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+b} \right)$; $\frac{ab}{\sqrt{2c+ab}} \leq \frac{ab}{2} \left(\frac{1}{c+a} + \frac{1}{b+c} \right)$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được:

$$\frac{bc}{\sqrt{2a+bc}} + \frac{ca}{\sqrt{2b+ca}} + \frac{ab}{\sqrt{2c+ab}} \leq \frac{bc}{2} \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{c+a} \right) + \frac{ca}{2} \left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+b} \right) + \frac{ab}{2} \left(\frac{1}{c+a} + \frac{1}{b+c} \right) = \frac{a+b+c}{2} = 1.$$

Như vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=\frac{3}{2}$.

d) Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với $\frac{1}{(yz+1)^2} + \frac{1}{(zx+1)^2} + \frac{1}{(xy+1)^2} \geq \frac{3}{4}$.

Đặt: $m=xy; n=yz; p=zx \Rightarrow mnp=1$; bất đẳng thức trở thành: $\frac{1}{(m+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(p+1)^2} \geq \frac{3}{4}$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz dạng $(ax+by)^2 \leq (a^2+b^2)(x^2+y^2)$.

Ta có:
$$\frac{1}{(m+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^2} \geq \frac{1}{(mn+1)\left(\frac{m}{n}+1\right)} + \frac{1}{(mn+1)\left(\frac{n}{m}+1\right)} = \frac{1}{mn+1}.$$

Mặt khác, ta lại có:
$$\frac{1}{mn+1} + \frac{1}{(p+1)^2} = \frac{p}{p+1} + \frac{1}{(p+1)^2} = \frac{(p-1)^2}{4(p+1)^2} + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}.$$

Do đó: $\frac{1}{(m+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(p+1)^2} \geq \frac{3}{4}$ là bất đẳng thức đúng suy ra bất đẳng thức ban đầu

được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra tại $a=b=c=1$.

IV. BẤT ĐẲNG THỨC CAUCHY-SCHWARZ

Trong phần này ta tập trung vào phương pháp vận dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz

dạng $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} \geq \frac{(x+y+z)^2}{a+b+c}$ để giải quyết các bài toán.

Phần chứng minh bất đẳng thức này đã được nêu ở đầu chương bất đẳng thức.

Ví dụ 1

a) Cho các số thực dương a, b, c sao cho $a+b+c=3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{a+2bc} + \frac{b}{b+2ac} + \frac{c}{c+2ab} \geq 1.$$

b) Cho các số thực dương a, b, c . Chứng minh rằng: $\frac{a^3}{a+2b} + \frac{b^3}{b+2c} + \frac{c^3}{c+2a} \geq \frac{a^2+b^2+c^2}{3}$.

c) Cho các số thực dương a, b, c . Chứng minh rằng: $(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2) \geq 3(a+b+c)^2$.

d) Cho các số thực dương a, b, c . Chứng minh:

$$\frac{a^3}{(2a^2+b^2)(2a^2+c^2)} + \frac{b^3}{(2b^2+c^2)(2b^2+a^2)} + \frac{c^3}{(2c^2+a^2)(2c^2+b^2)} \leq \frac{1}{a+b+c}.$$

Lời giải

a) $\frac{a}{a+2bc} = \frac{a^2}{a^2+2abc} \Rightarrow \frac{a}{a+2bc} + \frac{b}{b+2ac} + \frac{c}{c+2ab}.$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có:

$$\frac{a^2}{a^2+2abc} + \frac{b^2}{b^2+2abc} + \frac{c^2}{c^2+2abc} \geq \frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2+6abc}.$$

Ta cần chứng minh: $\frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2+6abc} \geq 1 \Leftrightarrow ab+bc+ca \geq 3abc \Leftrightarrow (a+b+c)(ab+bc+ca) \geq 9abc.$

Theo bất đẳng thức AM-GM ta có: $a+b+c \geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}$, nhân 2 vế các bất đẳng thức dương cùng chiều ta có đpcm.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

b) Ta có: $\frac{a^3}{a+2b} = \frac{a^4}{a^2+2ab} \Rightarrow VT = \frac{a^4}{a^2+2ab} + \frac{b^4}{b^2+2bc} + \frac{c^4}{c^2+2ca} \geq \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{(a+b+c)^2}.$

Ta cần chứng minh: $\frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{(a+b+c)^2} \geq \frac{a^2+b^2+c^2}{3} \Leftrightarrow a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$. Điều này là hiển nhiên.

c) Ta có: $(a+b+c)^2 = \left[a + \sqrt{2} \left(\frac{b+c}{\sqrt{2}} \right) \right]^2 \leq (a^2+2) \left[1 + \frac{(b+c)^2}{2} \right].$

Suy ra: $3(a+b+c)^2 \leq 3(a^2+2) \left[1 + \frac{(b+c)^2}{2} \right]$. Ta cần chứng minh:

$$3(a^2+2) \left[1 + \frac{(b+c)^2}{2} \right] \leq (a^2+2)(b^2+2)(c^2+2) \text{ hay } 3 \left[1 + \frac{(b+c)^2}{2} \right] \leq (b^2+2)(c^2+2).$$

Sau khi khai triển và thu gọn, ta được: $\frac{b^2+c^2}{2} + b^2c^2 - 3bc + 1 \geq 0$.

Đề ý rằng: $\frac{b^2+c^2}{2} \geq bc$ nên đẳng thức trở thành: $b^2c^2 - 2bc + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (bc-1)^2 \geq 0$.

d) Ta mong muốn xuất hiện lượng: $a+b+c$

Ta có: $(2a^2+b^2)(2a^2+c^2) = (a^2+b^2+a^2)(a^2+a^2+c^2) \geq (a^2+ab+ac)^2 = a^2(a+b+c)^2$

Từ đó suy ra: $\frac{a^3}{(2a^2+b^2)(2a^2+c^2)} \leq \frac{a}{(a+b+c)^2}$. Tương tự ta có 2 bất đẳng thức nữa và cộng lại

thì suy ra điều phải chứng minh.

Ví dụ 2

a) Cho các số thực dương a, b, c sao cho $ab+bc+ca+abc \leq 4$. Chứng minh:

$a^2+b^2+c^2+a+b+c \geq 2(ab+bc+ca)$. (Trích đề tuyển sinh vào lớp 10 – Trường chuyên KHTN – ĐHQG Hà Nội, 2015).

b) Cho các số thực dương a, b . Tìm GTLN của biểu thức: $P = (a+b) \left(\frac{1}{a^3+b} + \frac{1}{b^3+a} \right) - \frac{1}{ab}$

(Đề tuyển sinh lớp 10 trường THPT chuyên KHTN – ĐHQG Hà Nội, 2017).

c) Cho các số thực dương a, b, c sao cho $ab+bc+ca=1$. Chứng minh rằng:

$2abc(a+b+c) \leq \frac{5}{9} + a^4b^2 + b^4c^2 + c^4a^2$. (Trích Đề tuyển sinh vào lớp 10 – Trường Chuyên

KHTN – ĐHQG Hà Nội, 2014).

d) Cho các số thực dương a, b thỏa mãn: $\sqrt{a+2b} = 2 + \sqrt{\frac{b}{3}}$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = \frac{a}{\sqrt{a+2b}} + \frac{b}{\sqrt{b+2a}}.$$

(Đề tuyển sinh lớp 10 trường THPT chuyên KHTN – ĐHQG Hà Nội, 2018).

Lời giải

a. Ta viết lại giả thiết bài toán thành:

$$12 + (ab+bc+ca) + 4(a+b+c) \geq 8 + 4(a+b+c) + 2(ab+bc+ca) + abc \text{ hay}$$

$$(a+2)(b+2) + (b+2)(c+2) + (c+2)(a+2) \geq (a+2)(b+2)(c+2)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{a+2} + \frac{1}{b+2} + \frac{1}{c+2} \geq 1 \text{ Ta có: } \frac{1}{a+2} = \frac{a+b^2+c^2}{(a+1+1)(a+b^2+c^2)} \leq \frac{a+b^2+c^2}{(a+b+c)^2}.$$

$$\text{Tương tự ta có: } \frac{1}{b+2} \leq \frac{b+c^2+a^2}{(a+b+c)^2}; \frac{1}{c+2} \leq \frac{c+a^2+b^2}{(a+b+c)^2}. \text{ Suy ra}$$

$$1 \leq \frac{1}{a+2} + \frac{1}{b+2} + \frac{1}{c+2} \leq \frac{a+b+c+(a^2+b^2+c^2)}{(a+b+c)^2} \Leftrightarrow a+b+c+2(a^2+b^2+c^2) \geq (a+b+c)^2$$

Hay $a^2+b^2+c^2+a+b+c \geq 2(ab+bc+ca)$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

b. Áp dụng đẳng thức: $(ax+by)^2 \leq (a^2+b^2)(x^2+y^2)$ ta có:

$(a+b)^2 = \left(\frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{a}} + \sqrt{b} \cdot \sqrt{b} \right)^2 \leq (a^3+b) \left(\frac{1}{a} + b \right) = \frac{(a^3+b)(ab+1)}{a}$. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=1$.

Tương tự ta cũng có: $(a+b)^2 \leq \frac{(b^3+a)(ab+1)}{b}$.

Từ đó, suy ra $P \leq (a+b) \left[\frac{ab+1}{a(a+b)^3} + \frac{ab+1}{b(a+b)^2} \right] - \frac{1}{ab} = 1$. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$a=b=1$.

Vậy GTLN của P bằng 1.

c. Sử dụng bất đẳng thức $x^2+y^2+z^2 \geq xy+yz+zx$. Ta có:

$$a^4b^2+b^4c^2+c^4a^2 \geq a^2 \cdot b \cdot b^2 \cdot c + b^2 \cdot c \cdot c^2 \cdot a + c^2 \cdot a \cdot a^2 \cdot b = abc(ab^2+bc^2+ca^2).$$

Tiếp tục sử dụng bất đẳng thức: Cauchy-Schwarz và giả thiết $ab+bc+ca=1$ ta có:

$$ab^2+bc^2+ca^2 = \frac{b^2}{\frac{1}{a}} + \frac{c^2}{\frac{1}{b}} + \frac{a^2}{\frac{1}{c}} \geq \frac{(a+b+c)^2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}} = abc(a+b+c)^2.$$

Từ đó suy ra $a^4b^2+b^4c^2+c^4a^2 \geq [abc(a+b+c)]^2$. Bây giờ ta sẽ chứng minh:

$$[abc(a+b+c)]^2 - 2abc(a+b+c) + \frac{5}{9} \geq 0 \Leftrightarrow t^2 - 6t + 5 \geq 0 \Leftrightarrow (t-1)(t-5) \geq 0 \text{ với } t = abc(a+b+c).$$

Mặt khác ta có: $abc(a+b+c) = ab \cdot ac + bc \cdot ba + ca \cdot cb \leq \frac{1}{3}(ab+bc+ca)^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow 0 \leq t \leq 1$. Suy ra

đpcm. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

d. Chú ý rằng: $\sqrt{\frac{b}{3}} = \frac{b}{\sqrt{b+2b}}$.

Ta có $P + \frac{b}{\sqrt{b+2b}} = \frac{a}{\sqrt{a+2b}} + \frac{b}{\sqrt{b+2a}} + \frac{b}{\sqrt{b+2b}} = \frac{a^2}{a\sqrt{a+2b}} + \frac{b^2}{b\sqrt{b+2a}} + \frac{b^2}{b\sqrt{b+2b}}$. Áp dụng bất

đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có: $P + \frac{b}{\sqrt{b+2b}} \geq \frac{(a+2b)^2}{a\sqrt{a+2b} + b\sqrt{b+2a} + b\sqrt{b+2b}}$.

Lại có: $(a\sqrt{a+2b} + b\sqrt{b+2a} + b\sqrt{b+2b})^2 = (\sqrt{a}\sqrt{a^2+2ab} + \sqrt{b}\sqrt{b^2+2ab} + \sqrt{b}\sqrt{3b^2})^2$
 $\leq (a+b+b)(a^2+4ab+4b^2) = (a+2b)^3 \Rightarrow a\sqrt{a+2b} + b\sqrt{b+2a} + b\sqrt{b+2b} \leq (a+2b)\sqrt{a+2b}$.

Từ đó ta có: $P + \sqrt{\frac{b}{3}} \geq \sqrt{a+2b} \Rightarrow P \geq \sqrt{a+2b} - \sqrt{\frac{b}{3}} = 2$. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=3$.

Ví dụ 3. Cho các số thực dương a, b, c . Chứng minh:

$$\begin{aligned}
 &\text{a, } \frac{1}{a^2+ab+bc} + \frac{1}{b^2+bc+ca} + \frac{1}{c^2+ca+ab} \leq \left(\frac{a+b+c}{ab+bc+ca} \right)^2. \\
 &\text{b, } \frac{ab}{a^2+bc+ca} + \frac{bc}{b^2+ca+bc} + \frac{ca}{c^2+ab+bc} \leq \frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}. \\
 &\text{c, } \frac{a}{a^3+b^2+c} + \frac{b}{b^3+c^2+a} + \frac{c}{c^3+a^2+b} \leq 1. \\
 &\text{d, } \frac{1}{1+a+b^2} + \frac{1}{1+b+c^2} + \frac{1}{1+c+a^2} \leq 1 \text{ với } abc=1. \\
 &\text{e, } \frac{1}{a^3+b^3+abc} + \frac{1}{b^3+c^3+abc} + \frac{1}{c^3+a^3+abc} \leq \frac{1}{abc}. \\
 &\text{f, } \frac{a}{b^2+bc+c^2} + \frac{b}{c^2+ca+a^2} + \frac{c}{a^2+ab+b^2} \geq \frac{a+b+c}{ab+bc+ca}
 \end{aligned}$$

Lời giải

a. Ta làm xuất hiện: $ab+bc+ca$

Ta có: $\frac{1}{a^2+ab+bc} = \frac{c^2+ab+bc}{(a^2+ab+bc)(c^2+ab+bc)} \leq \frac{c^2+ab+bc}{(ac+ab+bc)^2}$. Tương tự với hai số hạng còn

lại ta có: $\sum \frac{1}{a^2+ab+bc} \leq \sum \frac{c^2+ab+bc}{(ac+ab+bc)^2} = \frac{(a+b+c)^2}{(ac+ab+bc)^2}$.

b. Ta muốn làm xuất hiện: $ab+bc+ca$

$$\frac{ab}{a^2+bc+ca} = \frac{ab(b^2+bc+ca)}{(a^2+bc+ca)(b^2+bc+ca)} \leq \frac{ab(b^2+bc+ca)}{(ab+bc+ca)^2}$$

Từ đó suy ra: $VT \leq \frac{ab(b^2+bc+ca)}{(ab+bc+ca)^2} + \frac{bc(c^2+ca+ab)}{(ab+bc+ca)^2} + \frac{ca(a^2+ab+bc)}{(ab+bc+ca)^2}$. Ta chỉ cần chứng minh:

$$ab(b^2+bc+ca) + bc(c^2+ca+ab) + ca(a^2+ab+bc) \leq (a^2+b^2+c^2)(ab+bc+ca)$$

$$\Leftrightarrow a^3b + b^3c + c^3a \geq abc(a+b+c) \Leftrightarrow \frac{a^2}{c} + \frac{b^2}{a} + \frac{c^2}{b} \geq a+b+c. \text{ Nhưng bất đẳng thức này là hiển}$$

nhiên đúng theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz.

c. Ta muốn làm xuất hiện $a+b+c$.

$$\frac{a}{a^3+b^2+c} = \frac{a\left(\frac{1}{a}+a+c\right)}{(a^3+b^2+c)\left(\frac{1}{a}+1+c\right)} \leq \frac{a\left(\frac{1}{a}+1+c\right)}{(a+b+c)^2} = \frac{1+a+ca}{9}. \text{ Từ đó suy ra:}$$

$$\frac{a}{a^3+b^2+c} + \frac{b}{b^3+c^2+a} + \frac{c}{c^3+a^2+b} \leq \frac{1+a+ca}{9} + \frac{1+b+ab}{9} + \frac{1+c+bc}{9}$$

Ta cần chứng minh: $\frac{1+a+ca}{9} + \frac{1+b+ab}{9} + \frac{1+c+bc}{9} \leq 1 \Leftrightarrow ab+bc+ca \leq 3$. Nhưng điều này là

hiển nhiên đúng do: $ab+bc+ca \leq \frac{(a+b+c)^2}{3} = 3$.

d. Ta đặt $a=x^3, b=y^3, c=z^3, xyz=1$. Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành:

$$\frac{1}{1+x^3+y^6} + \frac{1}{1+y^3+z^6} + \frac{1}{1+z^3+x^6} \leq 1. \text{ Ta có:}$$

$$\frac{1}{1+x^3+y^6} = \frac{\left(z^4+x+\frac{1}{y^2}\right)}{(1+x^3+y^6)\left(z^4+x+\frac{1}{y^2}\right)} \leq \frac{z^4+x+\frac{1}{y^2}}{(x^2+y^2+z^2)^2} = \frac{z^4+x^2yz+z^2x^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}$$

$$\text{Ta cần chứng minh: } \sum (z^4+x^2yz+z^2x^2) \leq (x^2+y^2+z^2)^2 \Leftrightarrow x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2 \geq xyz(x+y+z)$$

Điều này là hiển nhiên đúng theo bất đẳng thức $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$.

e. Do bất đẳng thức thuận nhất nên ta chuẩn hóa: $abc=1$. Bất đẳng thức cần chứng minh trở

$$\text{thành: } \frac{1}{a^3+b^3+1} + \frac{1}{b^3+c^3+1} + \frac{1}{c^3+a^3+1} \leq 1.$$

$$\text{Ta có } \frac{1}{a^3+b^3+1} = \frac{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+c^2\right)}{(a^3+b^3+1)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+c^2\right)} \leq \frac{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+c^2\right)}{(a+b+c)^2} = \frac{bc+ca+c^2}{(a+b+c)^2} = \frac{c}{a+b+c}$$

Tương tự với 2 số hạng còn lại và cộng ba bất đẳng thức cùng chiều suy ra đpcm.

$$\text{f. Ta có: } \frac{a}{b^2+bc+c^2} = \frac{a^2}{ab^2+abc+ac^2}$$

$$\text{Suy ra } \sum \frac{a^2}{ab^2+abc+ac^2} \geq \frac{(a+b+c)^2}{ab^2+ac^2+bc^2+ba^2+3abc} \geq \frac{a+b+c}{ab+bc+ca}$$

$$(ab+bc+ca)(a+b+c) \geq ab^2+ac^2+bc^2+ba^2+3abc \text{ (nhưng đây là hằng đẳng thức).}$$

Ví dụ 4.

a. Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x+y+z=1$, tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$Q = \frac{x}{x+\sqrt{x+yz}} + \frac{y}{y+\sqrt{y+zx}} + \frac{z}{z+\sqrt{z+yx}}. \text{ (Trích Đề tuyển sinh vào lớp 10 chuyên Toán TP}$$

Hà Nội, 2014)

b. Cho các số thực không âm a, b, c sao cho $a > 0, b+c > 0$ và $a^2+b^2+c^2=1$. Chứng minh:

$$\frac{a^3}{b^2-bc+c^2} + \frac{b^3+c^3}{a^2} \geq \sqrt{2}.$$

c. Cho các số thực x, y sao cho $x^2y^2+2y+1=0$. Tìm GTNN, GTLN của $P = \frac{xy}{3y+1}$ (Trích Đề

tuyển sinh vào lớp 10 chuyên Trường chuyên – KHTN – ĐHQG Hà Nội, 2015).

d. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn: $a^2+b^2+c^2=3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{2a^2}{a+b^2} + \frac{2b^2}{b+c^2} + \frac{2c^2}{c+a^2} \geq a+b+c \text{ (Tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán TP Hà Nội, 2017)}$$

Lời giải

$$\text{a. Ta có: } \sqrt{x+yz} = \sqrt{x(x+y+z)+yz} = \sqrt{(x+y)(x+z)}.$$

Chú ý rằng: Theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz thì:

$$(x+y)(x+z) \geq (\sqrt{x} \cdot \sqrt{y} + \sqrt{z} \cdot \sqrt{x})^2 \Rightarrow \sqrt{(x+y)(x+z)} \geq \sqrt{x} \cdot \sqrt{y} + \sqrt{z} \cdot \sqrt{x}.$$

Từ đó suy ra: $\frac{x}{x+\sqrt{x+yz}} \leq \frac{x}{x+\sqrt{x}(\sqrt{y}+\sqrt{z})} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}}$. Tương tự ta có:

$\frac{y}{y+\sqrt{y+zx}} \leq \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}}$; $\frac{z}{z+\sqrt{z+xy}} \leq \frac{\sqrt{z}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}}$. Cộng ba bất đẳng thức cùng chiều ta suy ra $Q \leq 1$. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = \frac{1}{3}$.

b. Ta có $\frac{a^4}{a(b^2-bc+c^2)} + \frac{b^4}{a^2b} + \frac{c^4}{a^2c} \geq \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{a(b^2-bc+c^2)+a^2b+a^2c} = \frac{1}{a[b^2-bc+c^2+a(b+c)]}$

Theo bất đẳng thức AM-GM ta có: $a(b+c) \leq \frac{a^2+(b+c)^2}{2} \Rightarrow$

$$\frac{1}{a[b^2-bc+c^2+a(b+c)]} \geq \frac{1}{a\left[b^2-bc+c^2+\frac{a^2+(b+c)^2}{2}\right]} = \frac{2}{a(a^2+3b^2+3c^2)} = \frac{2}{a(3-2a^2)}$$

Bây giờ ta chứng minh: $\frac{2}{a(3-2a^2)} \geq \sqrt{2} \Leftrightarrow a(3-2a^2) \leq \sqrt{2} \Leftrightarrow 2a^3 + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \geq 3a$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = \frac{\sqrt{2}}{2}, c = 0$. Ta cũng có thể chứng minh:

$$a(3-2a^2) \leq \sqrt{2} \Leftrightarrow 2a^3 - 3a + \sqrt{2} \geq 0 \Leftrightarrow (2a - \sqrt{2})^2 \left(a + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \geq 0. \text{ Bất đẳng thức này luôn đúng}$$

c. Từ giả thiết ta suy ra $y \neq 0$,

$$x^2y^2 + 2y + 1 = 0 \Rightarrow x^2 + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{y} = 1 \Leftrightarrow x^2 + \left(\frac{1}{y} + 1\right)^2 = 1$$

Đặt $a = \frac{1}{y} + 1$. Ta được $x^2 + a^2 = 1$. Ta có: $P = \frac{x}{3 + \frac{1}{y}} = \frac{x}{a+2} \Rightarrow 2P = x - Pa \Rightarrow 4P^2 = (x - Pa)^2$.

Theo bất đẳng thức Bunhi-côpxki ta có: $(x - Pa)^2 \leq (1 + P^2)(x^2 + a^2) = 1 + a^2$.

Suy ra $4P^2 \leq 1 + P^2 \Leftrightarrow 3P^2 \leq 1 \Leftrightarrow -\frac{\sqrt{3}}{3} \leq P \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$. Với $x = \frac{\sqrt{3}}{2}; y = \frac{2}{3} \Rightarrow P = \frac{\sqrt{3}}{3}$,

$x = -\frac{\sqrt{3}}{2}; y = -\frac{2}{3} \Rightarrow P = -\frac{\sqrt{3}}{3}$. Vậy GTLN của P là $\frac{\sqrt{3}}{3}$, GTNN của P là $-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

d. Do $a^2 + 1 \geq 2a$ nên: $\frac{2a^2}{a+b^2} \geq \frac{2a^2}{\frac{a^2+1}{2}+b^2} = \frac{4a^2}{a^2+2b^2+1} = \frac{4a^4}{a^4+2a^2b^2+a^2}$. Tương tự ta cũng có hai

đánh giá nữa và cộng ba bất đẳng thức cùng chiều ta suy ra

$VT \geq \frac{4a^2}{a^4+2a^2b^2+a^2} + \frac{4b^2}{b^4+2b^2c^2+b^2} + \frac{4c^2}{c^4+2c^2a^2+c^2}$, áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwaz ta

có: $\frac{4a^2}{a^4+2a^2b^2+a^2} + \frac{4b^2}{b^4+2b^2c^2+b^2} + \frac{4c^2}{c^4+2c^2a^2+c^2} \geq \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{(a^2+b^2+c^2)^2+a^2+b^2+c^2} = 3$.

Mà $(a+b+c)^2 \leq 3(a^2+b^2+c^2) = 9 \Rightarrow a+b+c \leq 3$. Từ đó ta suy ra điều phải chứng minh.

1. Kỹ thuật tách ghép

Để giải quyết những bài toán dạng này người giải cần linh hoạt trong việc tách các nhóm số hạng sao cho đảm bảo dấu bằng và tạo ra các bất đẳng thức phụ quen thuộc.

Ta cần chú ý các bất đẳng thức quen thuộc sau: $\frac{1}{a+b} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$ và $\frac{1}{a+b+c} \leq \frac{1}{9} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$.

Ví dụ 1.

a. Cho các số thực dương a, b, c . Chứng minh: $\frac{bc}{2a+b+c} + \frac{ca}{2b+c+a} + \frac{ab}{2c+a+b} \leq \frac{a+b+c}{4}$.

b. Cho các số thực dương a, b, c . Chứng minh:

$$\frac{(b+c)^2}{b^2+c^2+a(b+c)} + \frac{(c+a)^2}{c^2+a^2+b(c+a)} + \frac{(a+b)^2}{a^2+b^2+c(a+b)} \leq 3.$$

c. Cho các số thực dương a, b, c sao cho $a+b+c=3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{4a^2+b^2+c^2} + \frac{1}{4b^2+c^2+a^2} + \frac{1}{4c^2+a^2+b^2} \leq \frac{1}{2}.$$

d. Cho các số thực dương a, b, c sao cho $a^2+b^2+c^2=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{bc}{a^2+1} + \frac{ca}{b^2+1} + \frac{ab}{c^2+1} \leq \frac{3}{4}$$

Lời giải

a, Ta có: $\frac{1}{2a+b+c} = \frac{1}{4} \frac{4}{(a+b)+(a+c)} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+c} \right) \Rightarrow \frac{bc}{2a+b+c} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{bc}{a+b} + \frac{bc}{a+c} \right)$

tương tự ta cũng có hai bất đẳng thức nữa và cộng lại ta thu được:

$$VT \leq \frac{1}{4} \left(\frac{bc}{a+b} + \frac{bc}{a+c} + \frac{ca}{b+c} + \frac{ca}{b+a} + \frac{ab}{c+a} + \frac{ab}{c+b} \right) = \frac{1}{4} \left[\left(\frac{bc}{a+b} + \frac{ca}{b+a} \right) + \left(\frac{bc}{a+c} + \frac{ab}{c+a} \right) + \left(\frac{ca}{b+c} + \frac{ab}{c+b} \right) \right]$$

hay $VT \leq \frac{1}{4}(a+b+c)$, dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

b, Ta có: $\frac{(b+c)^2}{b^2+c^2+a(b+c)} = \frac{(b+c)^2}{b(b+a)+c(c+a)} \leq \frac{b^2}{b(b+a)} + \frac{c^2}{c(c+a)} = \frac{b}{b+a} + \frac{c}{c+a}$.

Từ đó suy ra:

$$\frac{(b+c)^2}{b^2+c^2+a(b+c)} + \frac{(c+a)^2}{c^2+a^2+b(c+a)} + \frac{(a+b)^2}{a^2+b^2+c(a+b)} \leq \frac{b}{b+a} + \frac{c}{c+a} + \frac{c}{c+b} + \frac{a}{a+b} + \frac{a}{a+c} + \frac{b}{b+c}$$

Ta có: $\frac{b}{b+a} + \frac{c}{c+a} + \frac{c}{c+b} + \frac{a}{a+b} + \frac{a}{a+c} + \frac{b}{b+c} = 3$ suy ra đpcm. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

c, Ta có: $\frac{9}{4a^2+b^2+c^2} = \frac{(a+b+c)^2}{2a^2+(a^2+b^2)+(a^2+c^2)} \leq \frac{a^2}{2a^2} + \frac{b^2}{(a^2+b^2)} + \frac{c^2}{(a^2+c^2)}$ tương tự ta cũng có

hai bất đẳng thức nữa. Suy ra

$$\frac{9}{4a^2+b^2+c^2} + \frac{9}{4b^2+c^2+a^2} + \frac{9}{4c^2+a^2+b^2} \leq \frac{a^2}{2a^2} + \frac{b^2}{a^2+b^2} + \frac{c^2}{a^2+c^2} + \frac{b^2}{2b^2} + \frac{c^2}{b^2+c^2} + \frac{a^2}{b^2+a^2} + \frac{c^2}{2c^2} + \frac{a^2}{c^2+a^2} + \frac{b^2}{c^2+b^2} = \frac{9}{2} \text{ hay}$$

$$\frac{1}{4a^2+b^2+c^2} + \frac{1}{4b^2+c^2+a^2} + \frac{1}{4c^2+a^2+b^2} \leq \frac{1}{2}. \text{ Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi } a=b=c.$$

d, Ta có: $\frac{bc}{a^2+1} + \frac{ca}{b^2+1} + \frac{ab}{c^2+1} \leq \frac{1}{4} \left[\frac{(b+c)^2}{a^2+1} + \frac{(c+a)^2}{b^2+1} + \frac{(a+b)^2}{c^2+1} \right]$

Mặt khác ta có: $\frac{(b+c)^2}{a^2+a^2+b^2+c^2} = \frac{(b+c)^2}{(a^2+b^2)+(a^2+c^2)} \leq \frac{b^2}{a^2+b^2} + \frac{c^2}{a^2+c^2}$

Tương tự ta cũng có hai bất đẳng thức nữa và cộng lại thì thu được:

$$4\left(\frac{bc}{a^2+1} + \frac{ca}{b^2+1} + \frac{ab}{c^2+1}\right) \leq \frac{b^2}{a^2+b^2} + \frac{c^2}{a^2+c^2} + \frac{a^2}{a^2+b^2} + \frac{c^2}{b^2+c^2} + \frac{a^2}{c^2+a^2} + \frac{b^2}{c^2+b^2} = 3 \text{ suy ra đpcm.}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Ví dụ 2. Cho các số thực dương a, b, c . Chứng minh rằng:

a) $\frac{b+c}{a^2+bc} + \frac{c+a}{b^2+ca} + \frac{a+b}{c^2+ab} \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$.

b) $\frac{a^2}{a^2+2bc} + \frac{b^2}{b^2+2ca} + \frac{c^2}{c^2+2ab} \geq 1$.

c) $\frac{a^2}{(2a+b)(2a+c)} + \frac{b^2}{(2b+c)(2b+a)} + \frac{c^2}{(2c+a)(2c+b)} \leq \frac{1}{3}$.

d) $\frac{1}{a^2+1} + \frac{1}{b^2+1} + \frac{1}{c^2+1} \geq \frac{3}{2}$ biết $ab+bc+ca=3$

Lời giải

a, Ta có: $\frac{b+c}{a^2+bc} = \frac{(b+c)^2}{(a^2+bc)(b+c)} = \frac{(b+c)^2}{c(a^2+b^2)+b(a^2+c^2)} \leq \frac{b^2}{c(a^2+b^2)} + \frac{c^2}{b(a^2+c^2)}$

Từ đó suy ra: $\sum \frac{b+c}{a^2+bc} \leq \sum \left[\frac{b^2}{c(a^2+b^2)} + \frac{c^2}{b(a^2+c^2)} \right] = \sum \left[\frac{b^2}{c(a^2+b^2)} + \frac{a^2}{c(a^2+b^2)} \right] = \sum \frac{1}{c}$

Chú ý: Nếu ta thay $(a, b, c) \rightarrow \left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}\right)$ thì thu được bất đẳng thức mới là:

$$\frac{a^2(b+c)}{a^2+bc} + \frac{b^2(c+a)}{b^2+ca} + \frac{c^2(a+b)}{c^2+ab} \leq a+b+c$$

Nếu phân tích $\frac{a^2(b+c)}{a^2+bc} = b+c - \frac{bc(b+c)}{a^2+bc}$ thì ta thu được bất đẳng thức mới:

$$\frac{bc(b+c)}{a^2+bc} + \frac{ca(c+a)}{b^2+ca} + \frac{ab(a+b)}{c^2+ab} \geq a+b+c. \text{ Đây là các bất đẳng thức đẹp và khó.}$$

b, Ta có: $\frac{a^2}{a^2+2bc} + \frac{b^2}{b^2+2ca} + \frac{c^2}{c^2+2ab} \geq \frac{(a+b+c)^2}{a^2+2bc+b^2+2ca+c^2+2ab} = 1$

Thay $(a, b, c) \rightarrow \left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}\right)$ ta thu được kết quả $\frac{bc}{bc+2a^2} + \frac{ca}{ca+2b^2} + \frac{ab}{ab+2c^2} \geq 1$

Mặt khác ta có: $\frac{bc}{bc+2a^2} = 1 - \frac{2a^2}{2a^2+bc}$ nên bất đẳng thức trên được viết lại thành:

$$\frac{a^2}{2a^2+bc} + \frac{b^2}{2b^2+ca} + \frac{c^2}{2c^2+ab} \leq 1. \text{ Thay } (a, b, c) \rightarrow \left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}\right) \text{ ta lại thu được:}$$

$$\frac{bc}{a^2+2bc} + \frac{ca}{b^2+2ca} + \frac{ab}{c^2+2ab} \leq 1.$$

Những bất đẳng thức này có ứng dụng rất quan trọng.

c, Ta có:

$$\frac{a^2}{(2a+b)(2a+c)} = \frac{a^2}{2a(a+b+c)+2a^2+bc} = \frac{1}{9} \frac{(2a+a)^2}{2a(a+b+c)+2a^2+bc} \leq \frac{1}{9} \left[\frac{4a^2}{2a(a+b+c)} + \frac{a^2}{2a^2+bc} \right]$$

Từ đó suy ra: $\sum \frac{a^2}{(2a+b)(2a+c)} \leq \frac{1}{9} \sum \left(\frac{4a^2}{2a(a+b+c)} + \frac{a^2}{2a^2+bc} \right) = \frac{1}{9} \sum \left[\frac{2a}{a+b+c} + \frac{a^2}{2a^2+bc} \right]$

Áp dụng kết quả của câu b, ta suy ra điều phải chứng minh.

d, Ta có: $\frac{1}{a^2+1} = 1 - \frac{a^2}{a^2+1}$ nên bất đẳng thức tương đương với $\frac{a^2}{a^2+1} + \frac{b^2}{b^2+1} + \frac{c^2}{c^2+1} \leq \frac{3}{2}$

$\Leftrightarrow \frac{a^2}{3a^2+3} + \frac{b^2}{3b^2+3} + \frac{c^2}{3c^2+3} \leq \frac{1}{2}$. Ta có:

$$\frac{4a^2}{3a^2+3} = \frac{4a^2}{3a^2+ab+bc+ca} = \frac{(a+a)^2}{a(a+b+c)+2a^2+bc} \leq \frac{a^2}{a(a+b+c)} + \frac{a^2}{2a^2+bc} = \frac{a}{(a+b+c)} + \frac{a^2}{2a^2+bc}$$

Tương tự với hai số hạng còn lại ta có: $\sum \frac{a^2}{3a^2+3} \leq \frac{1}{4} \sum \left(\frac{a}{a+b+c} + \frac{a^2}{2a^2+bc} \right) \leq \frac{1}{2}$. Ở đây ta đã

sử dụng kết quả $\sum \frac{a^2}{2a^2+bc} \leq 1$.

Ví dụ 3. Cho các số thực dương a, b, c . Chứng minh rằng:

a, $\frac{a^2}{5a^2+(b+c)^2} + \frac{b^2}{5b^2+(c+a)^2} + \frac{c^2}{5c^2+(a+b)^2} \leq \frac{1}{3}$.

b, $\frac{ab}{3ab+2b+c} + \frac{bc}{3bc+2c+a} + \frac{ca}{3ca+2a+b} \leq \frac{1}{4}$ biết a, b, c thỏa mãn $a+b+c=1$.

c, $\frac{ab^2}{a^2+2b^2+c^2} + \frac{bc^2}{b^2+2c^2+a^2} + \frac{ca^2}{c^2+2a^2+b^2} \leq \frac{a+b+c}{4}$.

d, $\frac{ab}{a+3b+2c} + \frac{bc}{b+3c+2a} + \frac{ca}{c+3a+2b} \leq \frac{1}{6}(a+b+c)$.

Lời giải

a, Ta có: $\frac{9a^2}{5a^2+(b+c)^2} = \frac{9a^2}{(a^2+b^2+c^2)+2(2a^2+bc)} = \frac{(a+2a)^2}{(a^2+b^2+c^2)+2(2a^2+bc)}$

$\leq \frac{a^2}{(a^2+b^2+c^2)} + \frac{4a^2}{2(2a^2+bc)} = \frac{a^2}{(a^2+b^2+c^2)} + \frac{2a^2}{2a^2+bc}$. Từ đó suy ra:

$$\sum \frac{a^2}{5a^2+(b+c)^2} \leq \frac{1}{9} \sum \left[\frac{a^2}{a^2+b^2+c^2} + \frac{2a^2}{2a^2+bc} \right] \leq \frac{1}{3}$$

b, Ta có: $3ab+2b+c = 3ab+2b+c(a+b+c) = (ab+bc+ca) + (c^2+2ab) + 2b$

Từ đó ta có: $\frac{(1+1+2)^2}{(ab+bc+ca)+(c^2+2ab)+2b} \leq \frac{1}{ab+bc+ca} + \frac{1}{c^2+2ab} + \frac{1}{2b}$.

Như vậy: $\frac{ab}{3ab+2b+c} \leq \frac{1}{16} \left[\frac{ab}{ab+bc+ca} + \frac{ab}{c^2+2ab} + \frac{ab}{2b} \right] = \frac{1}{16} \left[\frac{ab}{ab+bc+ca} + \frac{ab}{c^2+2ab} + \frac{a}{2} \right]$

Từ đó suy ra: $\sum \frac{ab}{3ab+2b+c} \leq \frac{1}{16} \left[\frac{ab}{ab+bc+ca} + \frac{ab}{c^2+2ab} + \frac{a}{2} \right] \leq \frac{1}{4}$

c, Ta có: $\frac{ab^2}{a^2+2b^2+c^2} \leq \frac{b}{4} \left[\frac{(a+b)^2}{a^2+b^2+b^2+c^2} \right] \leq \frac{b}{4} \left[\frac{a^2}{a^2+b^2} + \frac{b^2}{b^2+c^2} \right]$

$$\text{Suy ra } VT \leq \frac{b}{4} \left(\frac{a^2}{a^2+b^2} + \frac{b^2}{b^2+c^2} \right) + \frac{c}{4} \left(\frac{b^2}{b^2+c^2} + \frac{c^2}{c^2+a^2} \right) + \frac{a}{4} \left(\frac{a^2}{a^2+b^2} + \frac{c^2}{c^2+a^2} \right) = \frac{a+b+c}{4}.$$

d, Ta có:

$$\frac{1}{a+3b+2c} = \frac{1}{(a+c)+(b+c)+2b} \leq \frac{1}{9} \left(\frac{1}{a+c} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{2b} \right) \Rightarrow \frac{ab}{a+3b+2c} \leq \frac{1}{9} \left(\frac{ab}{a+c} + \frac{ab}{b+c} + \frac{1}{2}a \right)$$

Tương tự ta có hai bất đẳng thức nữa và cộng lại thì thu được:

$$\frac{ab}{a+3b+2c} + \frac{bc}{b+3c+2a} + \frac{ca}{c+3a+2b} \leq \frac{1}{9} \left(\frac{ab}{a+c} + \frac{ab}{b+c} + \frac{1}{2}a + \frac{bc}{b+a} + \frac{bc}{c+a} + \frac{1}{2}b + \frac{ca}{c+b} + \frac{ca}{a+b} + \frac{1}{2}c \right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{ab}{a+3b+2c} + \frac{bc}{b+3c+2a} + \frac{ca}{c+3a+2b} \leq \frac{1}{6}(a+b+c)$$

2. Kỹ thuật thêm bớt

Ví dụ 1

a, Cho các số thực dương a, b, c sao cho $a^2+b^2+c^2=3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{2-a} + \frac{1}{2-b} + \frac{1}{2-c} \geq 3$$

b, Cho các số thực dương a, b, c sao cho $ab+bc+ca=3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^2+2} + \frac{1}{b^2+2} + \frac{1}{c^2+2} \leq 1.$$

c, Cho a, b, c là độ dài ba cạnh một tam giác. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{3a-b+c} + \frac{b}{3b-c+a} + \frac{c}{3c-a+b} \geq 1.$$

d, Cho các số thực dương a, b, c sao cho $abc=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^2-a+1} + \frac{1}{b^2-b+1} + \frac{1}{c^2-c+1} \leq 3.$$

Lời giải:

a, Phân tích: Nếu ta áp dụng trực tiếp bất đẳng thức: $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} \geq \frac{(x+y+z)^2}{a+b+c}$ thì phần sau sẽ bị ngược dấu. Để khắc phục ta thêm bớt như sau:

Xét $\frac{1}{2-a} - m = \frac{1-2m+ma}{2-a}$ ta chọn m sao cho $1-2m+ma > 0$ và $1-2m+ma$ chỉ còn đơn giản một số hạng. Điều này làm ta nghĩ đến $m = \frac{1}{2}$

Từ đó ta có cách chứng minh như sau:

$$\frac{1}{2-a} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2-b} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2-c} - \frac{1}{2} \geq \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{a}{2-a} + \frac{b}{2-b} + \frac{c}{2-c} \geq 3 \Leftrightarrow \frac{a^2}{2a-a^2} + \frac{b^2}{2b-b^2} + \frac{c^2}{2c-c^2} \geq 3$$

$$\text{Áp dụng bất đẳng thức: } \frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \frac{z^2}{C} \geq \frac{(x+y+z)^2}{A+B+C} \text{ ta có } VT \geq \frac{(a+b+c)^2}{2(a+b+c)-(a^2+b^2+c^2)}$$

$$\text{Ta cần chứng minh: } \frac{(a+b+c)^2}{2(a+b+c)-(a^2+b^2+c^2)} \geq 3 \Leftrightarrow \frac{(a+b+c)^2}{2(a+b+c)-3} \geq 3$$

$$\Leftrightarrow (a+b+c)^2 - 6(a+b+c) + 9 \geq 0 \Leftrightarrow (a+b+c-3)^2 \geq 0.$$

b, Phân tích:

Xét: $\frac{1}{a^2+2} - m = \frac{1-2m-ma^2}{a^2+2}$ ta nghĩ đến chọn $m = \frac{1}{2}$. Khi đó ta có:

$$\frac{1}{a^2+2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{b^2+2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{c^2+2} - \frac{1}{2} \leq -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{a^2}{a^2+2} + \frac{b^2}{b^2+2} + \frac{c^2}{c^2+2} \geq 1$$

Áp dụng bất đẳng thức: $\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \frac{z^2}{C} \geq \frac{(x+y+z)^2}{A+B+C}$ ta có:

$$\frac{a^2}{a^2+2} + \frac{b^2}{b^2+2} + \frac{c^2}{c^2+2} \geq \frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2+6}. \text{ Ta cần chứng minh:}$$

$$\frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2+6} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)} \geq 1. \text{ Nhưng đây là một đẳng thức.}$$

Suy ra điều phải chứng minh

Ngoài ra ta có thể giải bằng cách khác như sau:

$$\frac{1}{a^2+2} = \frac{1 + \frac{(b+c)^2}{2}}{(a^2+2) \left[1 + \frac{(b+c)^2}{2} \right]} \leq \frac{1 + \frac{(b+c)^2}{2}}{(a+b+c)^2}. \text{ Từ đó cộng các bất đẳng thức cùng chiều ta suy ra}$$

điều phải chứng minh.

Chú ý: Với các giả thiết a, b, c là ba cạnh của một tam giác ta cần chú ý biến đổi để sử dụng điều kiện $a+b-c > 0, b+c-a > 0, c+a-b > 0$.

c, Phân tích:

Ta viết lại: $\frac{a}{3a-b+c} - m = \frac{a-m(3a-b+c)}{3a-b+c}$, ta chọn $m = \frac{1}{4}$. Khi đó:

$$\frac{a}{3a-b+c} - \frac{1}{4} = \frac{a+b-c}{4(3a-b+c)}. \text{ Từ đó ta có bất đẳng thức cần chứng minh được viết lại thành:}$$

$$\frac{a}{3a-b+c} - \frac{1}{4} + \frac{b}{3b-c+a} - \frac{1}{4} + \frac{c}{3c-a+b} - \frac{1}{4} \geq \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a+b-c}{3a-b+c} + \frac{b+c-a}{3b-c+a} + \frac{c+a-b}{3c-a+b} \geq 1$$

$$\text{Ta có VT} \geq \frac{(a+b-c+b-c-a+a+c-b)^2}{\sum (a+b-c)(3a-b+c)} = \frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)} = 1.$$

Đối với bất đẳng thức dạng $f(a) + f(b) + f(c) \leq M$. Ta thường thêm bớt vào một số m để tử số có dạng bình phương.

d) Phân tích

Ta lấy $\frac{1}{a^2-a+1} - m = \frac{1-m-ma^2+ma}{a^2-a+1}$ để $1-m-ma^2+ma$ phân tích được thành $(xa+y)^2$ thì

$$1-m-ma^2+ma=0 \text{ có nghiệm kép. Hay } \Delta = m^2 + 4m(1-m) = 0 \Leftrightarrow m(4-3m) = 0 \Leftrightarrow m = \frac{4}{3}$$

Ta viết lại bất đẳng thức thành $\frac{1}{a^2-a+1} - \frac{4}{3} + \frac{1}{b^2-b+1} - \frac{4}{3} + \frac{1}{c^2-c+1} - \frac{4}{3} \leq -1$ hay

$$\frac{(2a-1)^2}{a^2-a+1} + \frac{(2b-1)^2}{b^2-b+1} + \frac{(2c-1)^2}{c^2-c+1} \geq 3. \text{ Áp dụng bất đẳng thức } \frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \frac{z^2}{C} \geq \frac{(x+y+z)^2}{A+B+C} \text{ ta thu được}$$

$$VT \geq \frac{[2(a+b+c)-3]^2}{(a^2+b^2+c^2)-(a+b+c)+3}.$$

Ta cần chứng minh $[2(a+b+c)-3]^2 \geq 3[(a^2+b^2+c^2)-(a+b+c)+3]$ hay
 $(a+b+c)^2 + 6(ab+bc+ca) \geq 9(a+b+c).$

Ta có

$$\begin{aligned}(ab+bc+ca)^2 &= a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 2abc(a+b+c) \\ &\geq a^2bc + b^2ac + c^2ba + 2abc(a+b+c) = 3abc(a+b+c) = 3(a+b+c)\end{aligned}$$

Ta quy bài toán về chứng minh $(a+b+c)^2 + 6\sqrt{3(a+b+c)} \geq 9(a+b+c)$. Đặt
 $t = \sqrt{3(a+b+c)} \Rightarrow t \geq 3$, ta có bất đẳng thức trở thành

$$\frac{t^4}{9} + 6t \geq 3t^2 \Leftrightarrow t^4 - 27t + 54t \geq 0 \Leftrightarrow t(t^3 - 27t + 54) = t(t-3)^2(t+6) \geq 0$$

Điều này là hiển nhiên. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Một số cách thêm bớt không mẫu mực

Ví dụ 2.

a) Cho các số thực dương a, b, c sao cho $a+b+c=1$. Chứng minh:

$$\frac{a^2}{3a+1} + \frac{b^2}{3b+1} + \frac{c^2}{3c+1} \leq \frac{1}{18(ab+bc+ca)}.$$

b) Cho các số thực dương a, b, c sao cho $a+b+c=1$. Chứng minh:

$$2\left(\frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c}\right) \geq \frac{1+a}{1-a} + \frac{1+b}{1-b} + \frac{1+c}{1-c}.$$

c) Cho các số thực dương a, b, c sao cho $ab+bc+ca=1$. Chứng minh:

$$a+b+c + \frac{ab}{b+c} + \frac{bc}{c+a} + \frac{ca}{a+b} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

d) Chứng minh $\frac{3a+b}{2a+c} + \frac{3b+c}{2b+a} + \frac{3c+a}{2c+b} \geq 4$, với a, b, c là độ dài 3 cạnh tam giác.

Lời giải

a) Ta có $\frac{a^2}{3a+1} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3a^2}{3a+1} = \frac{1}{3} \left(a - \frac{a}{3a+1} \right)$. Vì vậy ta quy bài toán về chứng minh

$$\frac{a}{3a+1} + \frac{b}{3b+1} + \frac{c}{3c+1} + \frac{1}{6(ab+bc+ca)} \geq 1.$$

$$\text{Ta có } \sum \frac{a}{a+1} \geq \frac{(a+b+c)^2}{a(3a+1)+b(3b+1)+c(3c+1)} = \frac{1}{3(a^2+b^2+c^2)+1}$$

$$\text{Suy ra } VT \geq \frac{1}{3(a^2+b^2+c^2)+1} + \frac{1}{6(ab+bc+ca)} \geq \frac{4}{3(a^2+b^2+c^2)+1} = 1$$

b) Do $\frac{1+a}{1-a} = \frac{2a}{b+c} + 1$ nên ta viết lại bất đẳng thức thành

$$\frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} \geq \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} + \frac{3}{2}.$$

$$\text{Lại có } \frac{a}{c} - \frac{a}{b+c} = \frac{ab}{c(b+c)} \text{ nên ta sẽ chứng minh } \sum \frac{ab}{c(b+c)} \geq \frac{3}{2}.$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM Shwarz, ta có

$$\sum \frac{ab}{c(b+c)} = \sum \frac{a^2b^2}{abc(b+c)} \geq \frac{(ab+bc+ca)^2}{2abc(a+b+c)}.$$

Ta cần chứng minh $\frac{(ab+bc+ca)^2}{2abc(a+b+c)} \geq \frac{3}{2}$, đây là bài toán quen thuộc.

c) Nhân 2 vế với $a+b+c$ và chú ý $\frac{ab}{b+c}(a+b+c) = ab + \frac{a^2b}{b+c}$. Ta viết BĐT cần chứng minh thành

$$(a+b+c)^2 + 1 + \frac{a^2b}{b+c} + \frac{b^2c}{c+a} + \frac{c^2a}{a+b} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}(a+b+c)$$

$$\text{Ta có } \frac{a^2b}{b+c} + \frac{b^2c}{c+a} + \frac{c^2a}{a+b} \geq \frac{(ab+bc+ca)^2}{b(b+c)+c(c+a)+a(a+b)} = \frac{1}{(a+b+c)^2 - 1}.$$

$$\text{Cuối cùng ta chứng minh } (a+b+c)^2 + 1 + \frac{1}{(a+b+c)^2 - 1} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}(a+b+c).$$

Nhưng $\frac{3\sqrt{3}}{2}(a+b+c) \leq \frac{3}{4}[(a+b+c)^2 + 3]$ nên ta quy về

$$(a+b+c)^2 + 1 + \frac{1}{(a+b+c)^2 - 1} \geq \frac{3}{4}[(a+b+c)^2 + 3]$$

Phần còn lại dành cho bạn đọc.

d) Ta xét $\frac{3a+b}{2a+c} - m = \frac{a(3-2m)+b-mc}{2a+c}.$

Chọn $m=1$ để xuất hiện $\frac{3a+b}{2a+c} - 1 = \frac{a+b-c}{2a+c}.$

Khi đó BĐT cần chứng minh có dạng $\frac{a+b-c}{2a+c} + \frac{b+c-a}{2b+a} + \frac{c+a-b}{2c+b} \geq 1.$

$$\text{Suy ra VT} \geq \frac{(a+b-c+b+c-a+c+a-b)^2}{\sum (a+b-c)(2a+c)} = \frac{(a+b+c)^2}{(a+b+c)^2} = 1.$$

3. Phương pháp đặt ẩn phụ.

Tùy theo bài toán ta có thể chọn một số cách đặt ẩn phụ sau:

1. $(a,b,c) \rightarrow \left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}\right)$

2. $(a,b,c) \rightarrow \left(\frac{ka}{b}, \frac{kb}{c}, \frac{kc}{a}\right)$

3. $(a,b,c) \rightarrow \left(\frac{kb}{a}, \frac{kc}{b}, \frac{ka}{c}\right)$

4. $(a,b,c) \rightarrow \left(\frac{ka^2}{b^2}, \frac{kb^2}{c^2}, \frac{kc^2}{a^2}\right)$

5. $(a,b,c) \rightarrow \left(\frac{kbc}{a^2}, \frac{kca}{b^2}, \frac{kab}{c^2}\right)$

Ví dụ

a) Cho các số thực dương x, y, z sao cho $xyz = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{x^2+x+1} + \frac{1}{y^2+y+1} + \frac{1}{z^2+z+1} \geq 1.$$

b) Cho các số thực dương x, y, z sao cho $xyz = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{(y+1)(y+2)} + \frac{1}{(z+1)(z+2)} \geq \frac{1}{2}.$$

c) Cho các số thực dương x, y, z . Chứng minh rằng $\sqrt{\frac{2x}{x+y}} + \sqrt{\frac{2y}{y+z}} + \sqrt{\frac{2z}{z+x}} \leq 3$.

Lời giải

a) Phân tích: nếu áp dụng trực tiếp BĐT $\frac{X^2}{A} + \frac{Y^2}{B} + \frac{Z^2}{C} \geq \frac{(X+Y+Z)^2}{A+B+C}$ thì BĐT tiếp theo bị ngược dấu.

Để không bị ngược dấu ta thay $(x, y, z) \rightarrow \left(\frac{bc}{a^2}, \frac{ca}{b^2}, \frac{ab}{c^2}\right)$ thì BĐT cần chứng minh trở

$$\text{thành } \frac{a^4}{a^4 + a^2bc + b^2c^2} + \frac{b^4}{b^4 + b^2ac + a^2c^2} + \frac{c^4}{c^4 + c^2ab + a^2b^2} \geq 1. \quad (*)$$

Bây giờ ta áp dụng bất đẳng thức $\frac{X^2}{A} + \frac{Y^2}{B} + \frac{Z^2}{C} \geq \frac{(X+Y+Z)^2}{A+B+C}$ ta có

$$VT \geq \frac{(a^2 + b^2 + c^2)^2}{a^4 + a^2bc + b^2c^2 + b^4 + b^2ac + a^2c^2 + c^4 + c^2ab + a^2b^2} \geq 1$$

$$\Leftrightarrow b^2c^2 + a^2c^2 + a^2b^2 \geq abc(a+b+c)$$

Đây là kết quả quen thuộc.

b) Phân tích.

Đặt $x = \frac{bc}{a^2}, y = \frac{ac}{b^2}, z = \frac{ab}{c^2}$, BĐT cần chứng minh trở thành $\sum \frac{a^4}{(2a^2+bc)(a^2+bc)} \geq \frac{1}{2}$,

Áp dụng BĐT $\frac{X^2}{A} + \frac{Y^2}{B} + \frac{Z^2}{C} \geq \frac{(X+Y+Z)^2}{A+B+C}$ ta có

$$VT \geq \frac{\sum (a^2 + b^2 + c^2)^2}{\sum (2a^2 + bc)(a^2 + bc)}.$$

Ta cần chứng minh

$$2\sum (a^2 + b^2 + c^2)^2 \geq \sum (2a^2 + bc)(a^2 + bc) \Leftrightarrow b^2c^2 + a^2c^2 + a^2b^2 \geq abc(a+b+c)$$

Đây là kết quả quen thuộc.

c) Đặt $x = \frac{a}{b}, y = \frac{b}{c}, z = \frac{c}{a}$. BĐT cần chứng minh trở thành

$$\sqrt{\frac{a^2}{a^2+bc}} + \sqrt{\frac{b^2}{b^2+ac}} + \sqrt{\frac{c^2}{c^2+ab}} \leq \frac{3}{\sqrt{2}}.$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopski ta có

$$\sum \left(\sqrt{\frac{a^2}{a^2+bc}} + \sqrt{\frac{b^2}{b^2+ac}} + \sqrt{\frac{c^2}{c^2+ab}} \right)^2 \leq \left(\sum \frac{a}{(a+b)(a+c)} \right) \left(\sum \frac{a(a+b)(a+c)}{a^2+bc} \right)$$

Mặt khác, ta có $8(a+b+c)(ab+bc+ca) \leq 9(a+b)(b+c)(c+a)$ và

$$\sum \frac{a}{(a+b)(a+c)} = \frac{2(ab+bc+ca)}{(a+b)(b+c)(c+a)} \leq \frac{9}{4(a+b+c)}.$$

Ta quy bài toán về chứng minh $\sum \frac{a(a+b)(a+c)}{a^2+bc} \leq 2(a+b+c).$

Mặt khác ta có $\frac{a(a+b)(a+c)}{a^2+bc} = a + \frac{a^2(b+c)}{a^2+bc}.$ Ta quy bài toán về chứng minh

$$\sum \frac{a^2(b+c)}{a^2+bc} \leq a+b+c.$$

V. KỸ THUẬT ĐỐI XỨNG HÓA

Ví dụ

a) Cho các số thực dương a, b, c , chứng minh rằng $\sqrt{\frac{2a}{a+b}} + \sqrt{\frac{2b}{b+c}} + \sqrt{\frac{2c}{c+a}} \leq 3.$

b) Cho các số thực dương a, b, c , chứng minh rằng:

$$\sqrt{\frac{a}{a+b+2c}} + \sqrt{\frac{b}{b+c+2a}} + \sqrt{\frac{c}{c+a+2b}} \leq \frac{3}{2}.$$

c) Cho các số thực dương a, b, c , sao cho $a+b+c=1$, chứng minh rằng:

$$\frac{ab}{\sqrt{ab+bc}} + \frac{bc}{\sqrt{bc+ca}} + \frac{ca}{\sqrt{ca+ab}} \leq \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Lời giải

a) Ta có

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{2a}{a+b}} &= \frac{\sqrt{2a(a+c)}}{\sqrt{(a+b)(a+c)}} \Rightarrow \left(\sum \frac{\sqrt{2a(a+c)}}{\sqrt{(a+b)(a+c)}} \right) \\ &\leq 2(a+b+c) \left[2 \cdot \frac{a}{(a+b)(a+c)} + \frac{b}{(b+c)(b+a)} + \frac{c}{(c+a)(c+b)} \right] \\ &= \frac{8(a+b+c)(ab+bc+ca)}{(a+b)(b+c)(c+a)} \end{aligned}$$

Bây giờ, ta cần chứng minh

$$\frac{8(a+b+c)(ab+bc+ca)}{(a+b)(b+c)(c+a)} \leq 9$$

$$\Leftrightarrow 8(a+b+c)(ab+bc+ca) \leq 9(a+b)(b+c)(c+a).$$

Đây là kết quả quen thuộc.

b) Ta có

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{a}{a+b+2c}} &= \frac{\sqrt{a(a+2b+c)}}{\sqrt{(a+b+2c)(a+2b+c)}} \Rightarrow \left(\sum \frac{\sqrt{a(a+2b+c)}}{\sqrt{(a+b+2c)(a+2b+c)}} \right)^2 \leq \\ &= \left[\sum a(a+2b+c) \right] \left[\sum \frac{1}{\sqrt{(a+b+2c)(a+2b+c)}} \right] = \frac{4(\sum a^2 + 3\sum ab)(\sum a)}{(a+b+2c)(a+2b+c)(b+2a+c)} \end{aligned}$$

$$\text{Ta cần chứng minh } \frac{4(\sum a^2 + 3\sum ab)(\sum a)}{(a+b+2c)(a+2b+c)(b+2a+c)} \leq \frac{4}{9}.$$

Sau khi khai triển và thu gọn, ta được

$$2(a^3 + b^3 + c^3) \geq ab(a+b)bc(b+c) + ca(c+a).$$

Đây là bài toán quen thuộc.

c) Ta có $\frac{ab}{\sqrt{ab+bc}} = \sqrt{\frac{a^2b}{a+c}} = \sqrt{\frac{a^2b(a+b)}{(a+c)(a+b)}}$ suy ra

$$\left(\sum \sqrt{\frac{a^2b(a+b)}{(a+c)(a+b)}} \right) \leq \left[\sum (a+b) \right] \left[\sum \frac{a^2b}{(a+c)(a+b)} \right] = \frac{2(\sum a)(\sum a^2b^2 + abc \sum a)}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

Ta cần chứng minh $\frac{2(\sum a)(\sum a^2b^2 + abc \sum a)}{(a+b)(b+c)(c+a)} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow 4(\sum a)(\sum a^2b^2 + abc \sum a)$

$\leq (a+b+c)(a+b)(b+c)(c+a)$ Khai triển và thu gọn ta qui về

$ab(a^2+b^2) + bc(b^2+c^2) + ca(c^2+a^2) \geq 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)$ Nhưng bất đẳng thức này là hiển nhiên đúng theo bất đẳng thức AM- GM

CHƯƠNG 2

VI MỘT SỐ KỸ THUẬT XỬ LÝ BẤT ĐẲNG THỨC VỚI CÁC BIẾN BỊ CHẶN TRÊN TỪNG KHOẢNG

KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Khi các biến bị chặn trên một đoạn, khoảng ta cần chú ý các các đánh giá để chặn biến như sau:

$+m \leq a, b, c \leq n$ thì

Nếu cần đánh giá a^2, b^2, c^2 theo a, b, c ta dùng $(a-m)(a-n) \leq 0 \Leftrightarrow a^2 \leq (m+n)a - mn$

Nếu cần đánh giá để tạo ra ab ta dùng $\begin{cases} (a-n)(b-n) \geq 0 \\ (a-m)(b-m) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ab \geq n(a+b) - n^2 \\ ab \geq m(a+b) - m^2 \end{cases}$

Nếu cần đánh giá đồng thời cả ba biến ta dùng

$$\begin{cases} (a-m)(b-m)(c-m) \leq 0 \\ (a-n)(b-n)(c-n) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} abc + m^2(ab+bc+ca) - m^2(a+b+c) - m^3 \leq 0 \\ -abc - n^2(ab+bc+ca) - n^3(a+b+c) - n^3 \leq 0 \end{cases}$$

Ngoài ra cần chú ý. Nếu giả thiết a, b, c là các số thực không âm thì $\begin{cases} a^2 + b^2 \leq (a+b)^2 \\ a^3 + b^3 \leq (a+b)^3 \end{cases}$

Nếu biết $a+b+c=3p$ Trong 3 số a, b, c giả sử a là số lớn nhất thì ta suy ra

$$a+b+c=3p \leq 3a \Leftrightarrow a \geq p$$

Sau khi chứng minh nếu phát sinh điều kiện của một biến thì ta có thể quay lại để chặn biến nhằm tạo ra điều kiện

Ví dụ 1

Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $0 \leq a, b, c \leq 2$ và $a+b+c=3$

a) Tìm giá trị lớn nhất giá trị nhỏ nhất của $P = a^2 + b^2 + c^2$

b) Tìm giá trị lớn nhất giá trị nhỏ nhất của $P = a^3 + b^3 + c^3$

c) Tìm giá trị lớn nhất giá trị nhỏ nhất của $P = a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca$

d) Biết a, b, c thỏa mãn $0 \leq a, b, c \leq 3$ và $a+b+c=6$ Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của $P = a^3 + b^3 + c^3$

Lời giải

a) Ta viết lại $P = (a+b+c)^2 - 2(ab+ac+bc) = 9 - 2(ab+ac+bc)$ ta cần đánh giá $ab+ac+bc$

Thật vậy từ giả thiết $0 \leq a, b, c \leq 2$ ta suy ra

$$\begin{cases} (a-2)(b-2)(c-2) \leq 0 \\ abc \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} abc + 4(a+b+c) - 2(ab+bc+ca) - 8 \leq 0 \\ -abc \leq 0 \end{cases}$$

Cộng hai bất đẳng thức cùng chiều theo từng vế với chú ý $a+b+c=3$ ta có

$$4 - 2(ab+bc+ca) \leq 0 \Leftrightarrow ab+bc+ca \geq 2$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi trong ba số a, b, c có một số bằng 2, một số bằng 0, một số bằng 1

Ta cũng có $(a+b+c)^2 - 3(ab+ac+bc) = \frac{1}{2}[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2] \geq 0$ với mọi a, b, c

Suy ra $ab+bc+ca \leq \frac{(a+b+c)^2}{3} = 3$, Như vậy $2 \leq ab+bc+ca \leq 3$

Từ đó suy ra $9-6 \leq P \leq 9-4 \Leftrightarrow 3 \leq P \leq 5$ khi $a=b=c=1$ thì $P=3$ khi (a, b, c) là hoán vị của bộ số $(0, 1, 2)$ thì $P=5$

b) Ta có bất đẳng thức sau $a^3 - 3a + 2 = (a-1)^2(a+2) \geq 0$ với mọi $a \geq 0$ tương tự ta cũng có hai bất đẳng thức với b, c suy ra $a^3 + b^3 + c^3 \geq 3(a+b+c) - 6 = 3$, dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$

Giả sử c là số lớn nhất trong 3 số a, b, c suy ra $a+b+c \leq 3c \Leftrightarrow c \geq 1$ kết hợp với điều kiện đề bài ta suy ra $1 \leq c \leq 2$

Ta có $a^3 + b^3 \leq (a+b)^3 = (3-c)^3 \Rightarrow P \leq (3-c)^3 + c^3 = 27 - 27c + 9c^2 = 9(c-1)(c-2) + 9$ Do $1 \leq c \leq 2$

nên $9(c-1)(c-2) \leq 0$ suy ra $P \leq 9$ dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi (a, b, c) là hoán vị của bộ số $(0, 1, 2)$

c) Ta có $P = 9 - 3(ab+ac+bc) \geq 0$ dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Ta cũng có $P \leq 9 - 6 = 3$, dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi (a, b, c) là hoán vị của bộ số $(0, 1, 2)$

d) Từ giả thiết ta có

$$\begin{cases} (a-1)(b-1)(c-1) \geq 0 \\ (3-a)(3-b)(3-c) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} abc - (ab+ac+bc) + (a+b+c) - 1 \geq 0 \\ -abc + 3(ab+bc+ca) - 9(a+b+c) + 27 \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} abc - (ab+ac+bc) + 5 \geq 0 \\ -abc + 3(ab+bc+ca) - 27 \geq 0 \end{cases}$$

cộng hai bất đẳng thức cùng chiều ta suy ra $ab+bc+ca \geq 11$

lại có $ab+bc+ca \leq \frac{(a+b+c)^2}{3} = 12 \Leftrightarrow 11 \leq a+b+c \leq 12$

Ta có các biến đổi quen thuộc sau $(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a+b)(b+c)(c+a)$

$$(a+b)(b+c)(c+a) = (a+b+c)(ab+bc+ca) - abc$$

Từ đó ta có

$$P = 216 - 3(a+b)(b+c)(c+a) = 216 - 18(ab+bc+ca) + 3[3(ab+bc+ca) - 27]$$

$$\text{Hay } P \leq 135 - 9(ab+bc+ca) \leq 135 - 9 \cdot 11 = 36$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi (a, b, c) là hoán vị của bộ số $(1; 2; 3)$

Vậy GTLN của P là 36

Ví dụ 2

Cho các số thực không âm a, b, c thỏa mãn $a+b+c=3$

a) Tìm GTLN của $P = ab^2 + bc^2 + ca^2$

b) Tìm GTLN của $P = a\sqrt{b^3+1} + b\sqrt{c^3+1} + c\sqrt{a^3+1}$

Lời giải

Giả sử b là số nằm giữa a, c thì

$$(b-a)(b-c) \leq 0 \Leftrightarrow b^2 + ac \leq bc + ba \Leftrightarrow ab^2 + a^2c \leq abc + a^2b \Leftrightarrow ab^2 + a^2c + bc^2 \leq abc + a^2b + bc^2$$

$$\text{Suy ra } ab^2 + bc^2 + ca^2 \leq bc^2 + 2abc + ba^2 = b(c+a)^2 = b(3-b)^2$$

Ta chứng minh $b(3-b)^2 \leq 4 \Leftrightarrow b^3 - 6b^2 + 9b - 4 \leq 0 \Leftrightarrow (b-1)^2(b-4) \leq 0$ luôn đúng

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi (a, b, c) là hoán vị của bộ số $(0, 1, 2)$

$$\text{b) Ta có } \sqrt{a^3+1} = \sqrt{(a+1)(a^2-a+1)} \leq \frac{a^2+2}{2}$$

Từ đó suy ra

$$P \leq a \cdot \frac{b^2+2}{2} + b \cdot \frac{c^2+2}{2} + c \cdot \frac{a^2+2}{2} = a+b+c + \frac{ab^2+bc^2+ca^2}{2}$$

$$\Rightarrow P \leq 3 + \frac{1}{2}(ab^2+bc^2+ca^2) \leq 5$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi (a, b, c) là hoán vị của bộ số $(0, 1, 2)$

Ví dụ 3

Cho các số thực không âm a, b, c sao cho $a+b+c=1$.

a) Tìm GTLN, GTNN của $P = \sqrt{5a+4} + \sqrt{5b+4} + \sqrt{5c+4}$

b) Tìm GTLN của $P = \sqrt{2a^2+a+1} + \sqrt{2b^2+b+1} + \sqrt{2c^2+c+1}$

c) Cho các số thực không âm a, b, c thỏa mãn $a+b+c=1$ Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất

$$\text{của } P = \frac{a}{a+1} + \frac{b}{b+1} + \frac{c}{c+1}$$

d) Cho $a, b, c \geq 0$ và $a+b+c=3$ Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của

$$P = \sqrt{3a+1} + \sqrt{3b+1} + \sqrt{3c+1}$$

Lời giải

$$\text{a) Do } a, b, c \geq 0 \text{ và } a+b+c=1 \text{ nên } \begin{cases} a(a-1) \leq 0 \\ b(b-1) \leq 0 \\ c(c-1) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 \leq a \\ b^2 \leq b \\ c^2 \leq c \end{cases} \text{ nên ta có}$$

$$P \geq \sqrt{a^2+4a+4} + \sqrt{b^2+4b+4} + \sqrt{c^2+4c+4}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi (a, b, c) là hoán vị của bộ số $(1, 0, 0)$

$$\text{Ta có } 3(x^2+y^2+z^2) - (x+y+z)^2 = (x-y)^2 + (y-z)^2 + (x-z)^2 \geq 0 \Rightarrow 3(x^2+y^2+z^2) \geq (x+y+z)^2$$

$$\text{Suy ra } P^2 \leq 3(5a+4+5b+4+5c+4) = 3 \cdot 17 = 51 \Leftrightarrow P \leq \sqrt{51}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{3}$

b) Làm tương tự câu a ta có

$$P = \sqrt{2a^2+a+1} + \sqrt{2b^2+b+1} + \sqrt{2c^2+c+1} \leq \sqrt{a^2+2a+1} + \sqrt{b^2+2b+1} + \sqrt{c^2+2c+1} \\ = (a+b+c+3) = 4$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi (a, b, c) là hoán vị của bộ số $(1, 0, 0)$

c)

+ Tìm giá trị nhỏ nhất

Từ giả thiết ta suy ra $0 \leq a, b, c \leq 1$ dẫn đến $1 \leq a+1 \leq 2 \Rightarrow \frac{a}{a+1} \geq \frac{a}{2}$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = 0$ hoặc $a = 1$

Tương tự ta cũng có 2 bất đẳng thức với b và c , Cộng lại ta suy ra $P \geq \frac{1}{2}(a+b+c) = \frac{1}{2}$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi có 1 số bằng 1, hai số còn lại bằng 0

+Tìm giá trị lớn nhất

Cách 1: Ta chứng minh $\frac{a}{a+1} \leq \frac{9a+1}{16}$. Thấy vậy bất đẳng thức cần chứng minh tương đương

$$\text{với } \frac{a}{a+1} \leq \frac{9a+1}{16} \Leftrightarrow (a+1)(9a+1) \geq 16a \Leftrightarrow 9a^2 - 6a + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (3a-1)^2 \geq 0$$

Dấu đẳng thức xảy

ra khi và chỉ khi $a = \frac{1}{3}$, tương tự ta cũng có 2 bất đẳng thức nữa và cộng lại suy ra

$$P \leq \frac{1}{16}(9a+1+9b+1+9c+1) = \frac{3}{4} \text{ Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi } a=b=c=\frac{1}{3}$$

Cách 2: Ta viết lại $P = 3 - \left(\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1} \right)$. Ta có

$$\left(\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1} \right) ((a+1) + (b+1) + (c+1)) = 3 + \left(\frac{a+1}{b+1} + \frac{b+1}{a+1} \right) + \left(\frac{b+1}{c+1} + \frac{c+1}{b+1} \right) + \left(\frac{c+1}{a+1} + \frac{a+1}{c+1} \right)$$

Theo bất đẳng thức Cô si ta có $\frac{a+1}{b+1} + \frac{b+1}{a+1} \geq 2$ và $a+b+c=1$ suy ra

$$\left(\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1} \right) (a+b+c+3) \geq 9 \Leftrightarrow \frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1} \geq \frac{9}{4} \text{ do đó } P \leq 3 - \frac{9}{4} = \frac{3}{4}$$

d)+Tìm max.

$$\text{Ta có } \sqrt{4(3a+1)} \leq \frac{4+3a+1}{2} = \frac{3a+5}{2} \Rightarrow \sqrt{3a+1} \leq \frac{3a+5}{4},$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=1$

Tương tự ta có hai đánh giá với $\sqrt{3b+1}, \sqrt{3c+1}$ suy ra

$$P \leq \frac{3a+5}{4} + \frac{3b+5}{4} + \frac{3c+5}{4} = \frac{3(a+b+c)+15}{4} = 6$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$

+Tìm min

Từ giả thiết ta suy ra $0 \leq a, b, c \leq 3$

Đặt $x = 3a+1, y = 3b+1, z = 3c+1$ suy ra $x+y+z=12$ và $1 \leq x, y, z \leq 10$

Khi đó ta có $P = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}$

$$1 \leq x, y, z \leq 10 \Rightarrow (\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-\sqrt{10}) \leq 0 \Leftrightarrow x - (\sqrt{10}+1)\sqrt{x} + \sqrt{10} \leq 0$$

$$\text{Từ điều kiện } \Rightarrow \sqrt{x} \geq \frac{x+\sqrt{10}}{\sqrt{10}+1} = \frac{(\sqrt{10}-1)(x+\sqrt{10})}{9}$$

Tương tự ta cũng có 2 bất đẳng thức nữa và cộng lại suy ra

$$P \geq \frac{(\sqrt{10}-1)}{9}(x+\sqrt{10}+y+\sqrt{10}+z+\sqrt{10}) = \frac{(\sqrt{10}-1)}{9} \cdot (12+3\sqrt{10}) = \frac{9\sqrt{10}+18}{9} = \sqrt{10}+2$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi 2 trong 3 số $x, y, z = 1$ bằng 1, số còn lại bằng $\sqrt{10}$ hay 2 trong 2 số a, b, c bằng 0, số còn lại bằng $\frac{\sqrt{10}-1}{3}$

Cách làm khác

Ta cần tìm 2 số m, n để $\sqrt{3a+1} \geq ma+n$ sao cho dấu đẳng thức xảy ra tại $a=3$ hoặc $a=0$ hay $\sqrt{3a+1} = ma+n$ tại $a=3$ hoặc $a=0$

Cho $a=0 \Rightarrow n=1$, cho $a=3 \Rightarrow \sqrt{10} = 3m+1 \Rightarrow m = \frac{\sqrt{10}-1}{3}$

Ta chứng minh $\sqrt{3a+1} \geq \left(\frac{\sqrt{10}-1}{3}\right)a+1$. Bình phương 2 vế ta thu được

$$3a+1 \geq \left(\frac{11-2\sqrt{10}}{9}\right)a^2 + \left(\frac{2\sqrt{10}-2}{3}\right)a+1 \Leftrightarrow \left(\frac{11-2\sqrt{10}}{9}\right)a^2 + \frac{2\sqrt{10}-11}{3}a \leq 0$$

Hay $\frac{11-2\sqrt{10}}{9}a(a-3) \leq 0$, bất đẳng thức cuối cùng đúng do $0 \leq a \leq 3$.

Suy ra $P \geq \left(\frac{\sqrt{10}-1}{3}\right)a+1 + \left(\frac{\sqrt{10}-1}{3}\right)a+1 + \left(\frac{\sqrt{10}-1}{3}\right)a+1 = \sqrt{10}+2$. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi 2 trong 3 số x, y, z bằng 1, số còn lại bằng $\sqrt{10}$ hay 2 trong 3 số a, b, c bằng 0, số còn lại bằng 3.

Ví dụ 4

Cho các số thực không âm a, b, c sao cho $a^2+b^2+c^2=1$. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của

$$P = \sqrt{\frac{a+b}{2}} + \sqrt{\frac{b+c}{2}} + \sqrt{\frac{c+a}{2}}.$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức $(Ax+By+Cz)^2 \leq (A^2+B^2+C^2)(x^2+y^2+z^2)$ với mọi x, y, z ta có

$$P^2 = \left(\sqrt{\frac{a+b}{2}} + \sqrt{\frac{b+c}{2}} + \sqrt{\frac{c+a}{2}}\right)^2 \leq 3\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b+c}{2} + \frac{c+a}{2}\right) = 3(a+b+c).$$

Lại có $(a+b+c)^2 \leq (1+1+1)(a^2+b^2+c^2) = 3 \Rightarrow a+b+c \leq \sqrt{3}$ vậy $P^2 \leq 3\sqrt{3} \Leftrightarrow P \leq \sqrt[4]{27}$ dấu đẳng thức xảy ra tại $a=b=c=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Ta có $P^2 = a+b+c + \sqrt{(a+b)(b+c)} + \sqrt{(b+c)(c+a)} + \sqrt{(c+a)(a+b)}$.

Lại có $(a+\sqrt{bc})^2 = (\sqrt{a}\cdot\sqrt{a} + \sqrt{b}\cdot\sqrt{c})^2 \leq (a+b)(a+c) \Rightarrow \sqrt{(a+b)(a+c)} \geq a+\sqrt{bc}$ suy ra

$$P^2 \geq 2(a+b+c) + \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca} \geq 2(a+b+c).$$

Mặt khác $a, b, c \geq 0, a^2+b^2+c^2=1 \Rightarrow 0 \leq a, b, c \leq 1$, dẫn tới $a(1-a) \geq 0; b(1-b) \geq 0; c(1-c) \geq 0$
 $\Rightarrow a+b+c \geq a^2+b^2+c^2=1$

Vậy $P^2 \geq 2 \Rightarrow P \geq \sqrt{2}$, dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi a, b, c là hoán vị của bộ số $(1; 0; 0)$.

Ví dụ 5. Một số đánh giá quen thuộc

Cho các số thực không âm a, b, c sao cho $a^2+b^2+c^2=k \geq 3$.

a. $k+2bc \geq 2a(b+c)$.

$$b. (a+b+c)^2 \leq 2k(1+bc)^2.$$

$$c. a+b+c - \frac{2}{k}abc \leq 2\sqrt{k}.$$

Lời giải

$$a. \text{Ta có } k+2bc = a^2 + b^2 + c^2 + 2bc = a^2 + (b+c)^2 \geq 2a(b+c)$$

$$\text{Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi } a=c=\sqrt{\frac{k}{2}}; b=0 \text{ hoặc } a=b=\sqrt{\frac{k}{2}}; c=0.$$

$$b. \text{Ta có } (a+b+c)^2 = k+2a(b+c)+2bc. \text{ Lại có } k+2bc = a^2 + (b+c)^2 \geq 2a(b+c)$$

$$\text{Suy ra } (a+b+c)^2 \leq 2k+4bc. \text{ Ta chứng minh } 2k+4bc \leq 2k(1+bc)^2 \Leftrightarrow k+2bc \leq k(1+bc)^2 \\ \Leftrightarrow kb^2c^2 + 2kbc - 2bc \geq 0 \Leftrightarrow bc(kbc + 2k - 2) \geq 0 \text{ luôn đúng.}$$

$$c. \text{Ta có } a+b+c - \frac{2}{k}abc = a\left(1 - \frac{2}{k}bc\right) + b+c$$

$$\leq \sqrt{\left[a^2 + (b+c)^2\right] \left[\left(1 - \frac{2}{k}bc\right)^2 + 1\right]} = \sqrt{(k+2bc) \left(\frac{4}{k^2}b^2c^2 - \frac{4}{k}bc + 2\right)}$$

$$\text{Ta chỉ cần chứng minh } (k+2bc) \left(\frac{4}{k^2}b^2c^2 - \frac{4}{k}bc + 2\right) \leq 2k \Leftrightarrow 4b^2c^2(2bc-k) \leq 0 \text{ luôn đúng.}$$

Vận dụng

$$1. \text{Tìm GTLN, GTNN của } P = \frac{a}{1+bc} + \frac{b}{1+ca} + \frac{c}{1+ab} \text{ biết } a, b, c \geq 0, a^2 + b^2 + c^2 = 1$$

Lời giải

Ta có

$$(1+bc)^2 = 1+2bc+b^2c^2 \geq 1+2bc = a^2 + b^2 + c^2 + 2bc = a^2 + (b+c)^2 \geq \frac{(a+b+c)^2}{2} \Rightarrow 1+bc \geq \frac{a+b+c}{\sqrt{2}}$$

$$\text{Đến đây } \frac{a}{1+bc} \leq \frac{\sqrt{2}a}{a+b+c} \Rightarrow P \leq \sqrt{2} \left(\frac{a}{a+b+c} + \frac{b}{a+b+c} + \frac{c}{a+b+c} \right) = \sqrt{2}. \text{ Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi } (a,b,c) \text{ là hoán vị của bộ số } \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}; 0 \right).$$

$$\text{Ta có } 1+bc \leq 1 + \frac{(b^2+c^2)}{2} = 1 + \frac{(1-a^2)}{2} = \frac{3-a^2}{2} \Rightarrow a(1+bc) \leq a \left(\frac{3-a^2}{2} \right) = \frac{3a-a^3}{2}$$

$$\text{Lại có } a^3 - 3a + 2 = (a-1)^2(a+2) \geq 0 \Rightarrow 3a - a^3 \leq 2 \text{ dẫn đến } a(1+bc) \leq 1 \Rightarrow \frac{a}{1+bc} \geq a^2 \text{ suy ra}$$

$$P \geq a^2 + b^2 + c^2, \text{ dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi } (a,b,c) \text{ là hoán vị của bộ số } (1;0;1) \text{ vậy GTLN của } P \text{ là } \sqrt{2}, \text{ giá trị nhỏ nhất của } P \text{ là } 1.$$

$$2. \text{Cho các số thực không âm } a, b, c \text{ sao cho } a^2 + b^2 + c^2 = 2. \text{ Tìm GTLN của}$$

$$P = \frac{a}{1+bc} + \frac{b}{1+ca} + \frac{c}{1+ab}.$$

Lời giải

Ta có

$$(a+b+c)^2 = 2+2bc+2a(b+c) \leq 2+2bc+a^2+(b+c)^2 = 4+4bc = 4(1+bc) \leq 4(1+bc+b^2c^2) = 4(bc+1)^2$$

Suy ra $bc+1 \geq \frac{a+b+c}{2} \Rightarrow \frac{a}{1+bc} \leq \frac{2a}{a+b+c}$, từ đó suy ra $P \leq 2$, dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi a, b, c là hoán vị của bộ số $(1; 1; 0)$.

Hoặc ta nhận xét $(1+bc)^2 \geq 1+bc = \frac{a^2+b^2+c^2}{2} + bc = \frac{a^2+(b+c)^2}{2} \geq \frac{(a+b+c)^2}{4}$ suy ra $\frac{a}{1+bc} \leq \frac{2a}{a+b+c}$.

3. Cho $a, b, c \geq 0$ và $a^2 + b^2 + c^2 = 2$. Tìm GTLN của $P = \frac{a^2}{a^2+bc+1} + \frac{b^2}{b^2+ca+1} + \frac{c^2}{c^2+ab+1}$.

Lời giải

Ta có $2+2bc = a^2 + b^2 + c^2 + 2bc = a^2 + (b+c)^2 \geq 2a(b+c) \Rightarrow 1+bc \geq a(b+c)$ suy ra

$a^2 + 1+bc \geq a(a+b+c) \Rightarrow \frac{a^2}{a^2+1+bc} \leq \frac{a}{a+b+c}$. Suy ra $P \leq 1$, dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $(a; b; c)$ là hoán vị của bộ số $(1; 1; 0)$.

Ví dụ 6.

a. Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $a \geq 4; b \geq 5; c \geq 6$ và $a^2 + b^2 + c^2 = 90$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = a + b + c$.

b. Cho các số thực $a \geq 2; b, c \geq 5$ sao cho $2a^2 + b^2 + c^2 = 69$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = 12a + 13b + 11c$ (đề thi thử Archimes, 2018).

c. Cho các số thực a, b sao cho $0 \leq a \leq b \leq 7$ biết $a + b \leq 10$. Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của $P = a^2 + b^2$.

d. Tìm các số thực a, b, c thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 26; a + b = 5; b + c \geq 7$.

Lời giải

a. Để đưa bài toán về bất đẳng thức đối xứng, ta đặt $a = x + 4; b = y + 5; c = z + 6$ với $x, y, z \geq 0$.

Giả thiết của bài toán trở thành $(x+4)^2 + (y+5)^2 + (z+6)^2 = 90$ hay

$x^2 + y^2 + z^2 + 8x + 10y + 12z = 13$. Nếu $x + y + z < 1$ thì $x^2 + y^2 + z^2 < x + y + z < 1$ nên

$13 = x^2 + y^2 + z^2 + 8(x + y + z) + 2(y + z) + 2z < 1 + 8 + 2 + 2 = 13$ vô lý, vậy $x + y + z \geq 1$, từ đó

$a + b + c = 4 + x + 5 + y + 6 + z = 15 + (x + y + z) \geq 16$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = 4; b = 5; c = 7$.

Cách khác: Từ giả thiết ta có $c^2 = 90 - a^2 - b^2 \leq 90 - 16 - 25 = 49 \Rightarrow c \leq 7$.

Cùng từ giả thiết ta suy ra $a < 9, b < 8$ suy ra

$$\begin{cases} (a-4)(9-a) \geq 0 \\ (b-5)(8-b) \geq 0 \Rightarrow 13(a+b+c) \geq a^2 + b^2 + c^2 + 36 + 40 + 42 \Leftrightarrow a+b+c \geq 16 \\ (c-7)(6-c) \geq 0 \end{cases}$$

b. Đặt $a = 2 + x, b = 5 + y, c = 5 + z$ suy ra $x, y, z \geq 0$ thay vào giả thiết ta có

$$2x^2 + y^2 + z^2 + 8x + 10y + 10z = 11 \quad (*)$$

Nếu trong hai số y, z tồn tại một số lớn hơn 1 thì vế trái (*) lớn hơn 11. Điều này vô lý dẫn đến $y, z \leq 1$ hay $0 \leq y, z \leq 1$. Để ý rằng $2a^2 = 69 - b^2 - c^2 \leq 69 - 50 = 19 \Rightarrow a^2 < 10 \Rightarrow a < 4$ dẫn đến $0 \leq x < 2$.

Suy ra $12a + 13b + 11c = 12x + 13y + 11z + 144 = 144 + 8x + 10y + 10z + 4x + 3y + z$

$= 144 + 11 - (2x^2 + y^2 + z^2) + 4x + 3y + z = 155 + 2x(2-x) + y(3-y) + z(1-z) \geq 155$. Dấu đẳng thức xảy

ra tại $x=0; y=0; z=1$ hay $a=2; b=5; c=6$.

c. Vì $a, b \geq 0$ nên $P = a^2 + b^2 \geq 0$, dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = 0$.

Từ giả thiết suy ra $2a \leq a+b \leq 10 \Rightarrow a \leq 5$.

Nếu $a \leq 3$ thì $P = a^2 + b^2 \leq 3^2 + 7^2 = 58$, dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=3, b=7$.

Nếu $3 \leq a \leq 5$ thì $P \leq a^2 + (10-a)^2 = 2a^2 - 20a + 100 = 2(a-3)(a-7) + 58$ do $3 \leq a \leq 5$ nên $(a-3)(a-7) \leq 0$ nên $P \leq 58$, dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=3, b=7$.

d. Đặt $s = b+c \geq 7$ thì $a = 5-b, c = s-b$ thay vào điều kiện $a^2 + b^2 + c^2 = 26$ ta thu được:

$$(5-b)^2 + b^2 + (s-b)^2 = 26 \Leftrightarrow 3b^2 - 2(s+5)b + s^2 - 1 = 0$$

Coi đây là phương trình bậc 2 của b thì điều kiện để phương trình có nghiệm là

$$\Delta' = (s+5)^2 - 3(s^2 - 1) \geq 0 \Leftrightarrow s^2 - 10s - 14 \leq 0 \Leftrightarrow (s-7)(s+2) \leq 0 \quad (*)$$

do $s+2 > s-7$ nên bất phương trình (*) tương đương với $\begin{cases} s-7 \leq 0 \\ s+2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -2 \leq s \leq 7$, theo giả thiết $s \geq 7$ suy ra

$$s = 7 \Rightarrow b = 4; a = 1; c = 3. \text{ Vậy } (a; b; c) = (1; 4; 3).$$

Ví dụ 7

a. Cho các số thực $1 \leq a, b \leq 2$. Tìm GTLN, GTNN của $P = (a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$.

b. Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $1 \leq a, b, c \leq 2$. Tìm GTLN, GTNN của

$$P = \frac{a^2 + b^2}{ab} + \frac{b^2 + c^2}{bc} + \frac{c^2 + a^2}{ca}$$

c. Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $0 \leq a, b, c \leq 1$. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của

$$P = (a+b+c+3)\left(\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1}\right)$$

d. Cho các số thực không âm a, b, c thỏa mãn $a+b+c=1$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{\frac{3a^2+1}{3b^2+1}} + \sqrt{\frac{3b^2+1}{3c^2+1}} + \sqrt{\frac{3c^2+1}{3a^2+1}} \leq \frac{7}{2}.$$

Lời giải

a. Ta có $a+b \geq 2\sqrt{ab}, \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq 2\sqrt{\frac{1}{ab}} \Rightarrow P \geq 4$, dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b$.

Ta cũng có $P = 2 + \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$, đặt $\frac{a}{b} = t \Rightarrow \frac{1}{2} \leq t \leq 2$.

Ta chứng minh $P \leq \frac{9}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{t} + t \leq \frac{5}{2} \Leftrightarrow 2t^2 - 5t + 2 \leq 0 \Leftrightarrow (t-2)(2t-1) \leq 0$ luôn đúng. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=2, b=1$ hoặc $a=1, b=2$.

Cũng có thể làm theo cách $(a-1)(a-2) \leq 0 \Leftrightarrow a^2 - 3a + 2 \leq 0 \Leftrightarrow a + \frac{2}{a} \leq 3$ suy ra .

$$a+b+\frac{2}{a}+\frac{2}{b} \leq 6 \Leftrightarrow 6 \geq (a+b)+2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) \geq 2\sqrt{2(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)} \Leftrightarrow (a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) \leq \frac{9}{2}.$$

b) Theo bất đẳng thức AM-GM ta có: $a^2 + b^2 \geq 2ab, b^2 + c^2 \geq 2bc, c^2 + a^2 \geq 2ca$ suy ra $P \geq 6$, dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Ta viết lại $P = \frac{a}{b} + \frac{b}{a} + \frac{b}{c} + \frac{c}{b} + \frac{c}{a} + \frac{a}{c}$, không mất tính tổng quát ta giả sử $1 \leq a \leq b \leq c \leq 2$ thế thì

$$\left(\frac{b}{c}-1\right)\left(\frac{a}{b}-1\right) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{a}{c}+1 \geq \frac{b}{c}+\frac{a}{b}, \text{ tương tự ta có } \left(\frac{b}{a}-1\right)\left(\frac{c}{b}-1\right) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{c}{a}+1 \geq \frac{b}{a}+\frac{c}{b}.$$

Từ đó suy ra $P \leq 2\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)+2$, để ý rằng $\frac{1}{2} \leq \frac{a}{c} \leq 1$ nên $P = 2\left(t+\frac{1}{t}\right)+2$, ta có:

$$2\left(t+\frac{1}{t}\right)-5 = \frac{2t^2-5t+2}{t} = \frac{(t-2)(2t-1)}{t} \leq 0, \text{ dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi}$$

$$t = \frac{1}{2} \Leftrightarrow c = 2a = 2b.$$

Vậy GTLN của P là 7 khi có 1 số bằng 2 hai số còn lại.

c) Đặt $x = c+1, y = b+1, z = a+1$ suy ra $1 \leq x, y, z \leq 2$. Khi đó ta có:

$$A = (x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) = 3 + \frac{x}{y} + \frac{y}{x} + \frac{y}{z} + \frac{z}{y} + \frac{z}{x} + \frac{x}{z}.$$

Vì $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$ nên $A \geq 9$, dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z$ hay $a = b = c$.

Phần còn lại làm như câu a). Ta có $A \leq 10$.

d) Đặt $x = \sqrt{3a^2+1}; y = \sqrt{3b^2+1}; z = \sqrt{3c^2+1} \Rightarrow 1 \leq x, y, z \leq 2$. Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành $\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} \leq \frac{7}{2}$, không mất tính tổng quát giả sử y là số nằm giữa x và z thế thì ta có

$$(y-x)(y-z) \leq 0 \Leftrightarrow y^2 + xz \leq y(x+z) \Rightarrow \frac{y^2+xz}{yz} \leq \frac{y(x+z)}{yz} \Leftrightarrow \frac{x}{y} + \frac{y}{z} \leq \frac{x}{z} + 1 \text{ hay}$$

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} \leq \frac{x}{z} + \frac{z}{x} + 1. \text{ Ta sẽ chứng minh } \frac{x}{z} + \frac{z}{x} + 1 \leq \frac{7}{2} \Leftrightarrow \frac{x}{z} + \frac{z}{x} - \frac{5}{2} \leq 0 \Leftrightarrow (2x-z)(x-2z) \leq 0 \text{ bất}$$

đẳng thức cuối cùng luôn đúng vì $2x \geq 2 \geq z$ và $2z \geq 2 \geq x$. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $(a; b; c)$ là hoán vị của bộ số $(1; 0; 0)$.

Ví dụ 8

a. Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $a, b \geq 0, c \geq 1$ và $a+b+c=2$. Chứng minh rằng:

$$(6-a^2-b^2-c^2)(2-abc) \leq 8.$$

b. Cho 2 số a, b thỏa mãn $\begin{cases} a+b \leq 2 \\ a^2+b^2+ab=3 \end{cases}$. Tìm GTLN, GTNN của $P = a^2+b^2-ab$

c. Cho các số thực a, b, c, d thay đổi thỏa mãn $0 \leq a, b, c, d \leq 1$. Tìm giá trị lớn nhất của

$$P = \frac{a}{bcd+1} + \frac{b}{acd+1} + \frac{c}{abd+1} + \frac{d}{abc+1}.$$

Lời giải

$$a, P = (6-a^2-b^2-c^2)(2-abc) = [6-(a+b+c)^2 + 2(ab+bc+ca)][2-abc]$$

$$= 2(1+ab+bc+ca)(2-abc)$$

Từ giả thiết suy ra $c = 2-(a+b) \geq 1 \Rightarrow a+b \leq 1 \Rightarrow 0 \leq a, b \leq 1$.

$$\text{Suy ra: } (a-1)(b-1)(c-1) \geq 0 \Leftrightarrow abc+a+b+c-(ab+bc+ca)-1 \geq 0 \Rightarrow ab+bc+ca \leq 1+abc$$

$$\text{Nên } P \leq 2(2+abc)(2-abc) = 2(4-a^2b^2c^2) \leq 8$$

Dấu đẳng thức khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} abc = 0 \\ (a-1)(b-1)(c-1) = 0 \\ a+b+c = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0, a = b = 1 \\ b = 0, a = c = 1 \end{cases}$$

b, Đặt $a+b=2-x$ với $x \geq 0$. Ta cần tìm x để hệ $\begin{cases} a+b=2-x \\ a^2+b^2+ab=3 \end{cases}$ có nghiệm.

Ta biến đổi thành $\begin{cases} a+b=2-x \\ (a+b)^2-3=ab \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=2-x \\ ab=(2-x)^2-3 \end{cases}$. Do $(a+b)^2 \geq 4ab$ nên ta có:

$$(2-x)^2 \geq 4[(2-x)^2-3] \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 4.$$

Vậy $1 \leq P = 9 - 2(2-x)^2 \leq 9$ khi $x = \sqrt{3}, y = -\sqrt{3}$ thì $P = 9$.

Khi $x = y = 1$ hoặc $x = y = -1$ thì $P = 1$.

c, Vì $0 \leq a, b, c, d \leq 1 \Rightarrow abc+1 \geq abcd+1 \Rightarrow P \leq \frac{a+b+c+d}{abcd+1}$.

$$\text{Do } \begin{cases} (1-a)(1-b) \geq 0 \\ (1-c)(1-d) \geq 0 \\ (1-ab)(1-cd) \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b \leq 1+ab \\ c+d \leq 1+cd \\ ab+cd \leq 1+abcd = 3+abcd \end{cases} \Rightarrow a+b+c+d \leq 2+ab+cd \leq 2+1+abcd$$

Vậy $P \leq \frac{3+abcd}{1+abcd} \leq \frac{3(1+abcd)}{1+abcd} = 3$ khi $a=0, b=c=d=1$ thì $P=3$

Vậy GTLN của P là 3.

Ví dụ 9

a. Cho các số thực $x, y, z \geq 0$ thỏa mãn $x+y+z+xyz=4$. Tìm giá trị lớn nhất của:

$$P = xy + yz + zx.$$

b. Cho các số thực không âm a, b, c thỏa mãn $a+b+c=3$. Tìm GTLN, GTNN của biểu thức

$$P = a^2 + b^2 + c^2 + abc.$$

c. Cho các số thực không âm a, b, c sao cho $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$P = a^2 + b^2 + c^2.$$

d. Cho các số thực $a, b, c \geq -1$ thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 9$. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của $P = a^3 + b^3 + c^3$.

Lời giải

a. **Cách 1:** Giả sử x là số lớn nhất khi đó ta có: $x+y+z \leq 3x, xyz \leq x^3$. Từ giả thiết ta có:

$$4 = x+y+z+xyz \leq 3x+x^3 \Leftrightarrow x^3+3x-4 \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2+x+4) \geq 0 \Rightarrow x \geq 1. \text{ Ta có:}$$

$$P = xy + yz + zx = x(x+y+z) + yz - x^2 = x(4-xyz) + yz - x^2 = -(x-2)^2 + 4 + yz(1-x^2) \leq 4.$$

Vậy GTLN của P là 4 đẳng thức xảy ra tại $x=2; y=2; z=0$ và các hoán vị.

Cách 2: Gọi x là số nhỏ nhất.

Nếu $yz < 1$ thì $xy + yz + zx \leq 3$.

Nếu $yz \geq 1$ thì $xyz \geq x$ khi đó ta có:

$$4 = x+y+z+xyz \geq x+y+z+x \geq 2\sqrt{(x+y)(x+z)} = 2\sqrt{x^2+xy+xz+yz} = 2\sqrt{x^2+P} \geq 2\sqrt{P}$$

Suy ra $P \leq 4$

b. Giả sử $c = \min\{a, b, c\} \Rightarrow 3 = a+b+c \geq 3c \Rightarrow c \leq 1$.

Từ giả thiết ta có $0 \leq ab \leq \frac{(3-c)^2}{4}$ và $c \in [0; 1]$. Ta có $P = (3-c)^2 + c^2 - ab(2-c)$.

$$\text{Với } \begin{cases} 0 \leq ab \leq \frac{(3-c)^2}{4} \\ 2-c > 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{4}(c^3 - 3c + 18) \leq P \leq 2c^2 - 6c + 9.$$

Ta có $\frac{1}{4}(c^3 - 3c + 18) = \frac{1}{4}[(c-1)^2(c+2) + 16] \geq \frac{16}{4} = 4$, dấu đẳng thức xảy ra tại $a = b = c = 1$.

Do $0 \leq c \leq 1 \Rightarrow c(c-1) \leq 0$ dẫn tới $2c^2 - 6c + 9 = 2c(c-1) - 4c + 9 \leq 9$. Dấu đẳng thức xảy ra tại $c = 0, ab = 0, a + b + c + abc = 3$ hay $c = 0, a = 3, b = 0$ hoặc $c = 0, a = 0, b = 3$

Kết luận: GTNN của P là 4, GTLN của P là 9.

Có thể tìm GTNN của P theo cách: Trong 3 số $a-1, b-1, c-1$ luôn tồn tại 2 số cùng dấu. Giả sử $a-1, b-1$ cùng dấu, suy ra $(a-1)(b-1) \geq 0 \Leftrightarrow ab \geq a+b-1 = 2-c$

$$\text{Suy ra } \Rightarrow 2P = 2(a^2 + b^2) + 2c^2 + 2c.ab \geq (a+b)^2 + 2c^2 + 2c(2-c) = (3-c)^2 + 2c^2 + 2c(2-c) \\ = c^2 - 2c + 9 = (c-1)^2 + 8 \geq 8 \Rightarrow P \geq 4.$$

c. Từ giả thiết ta được $(a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) = 1$ hay

$$a^2 + b^2 + c^2 = \frac{1}{a+b+c} + ab + bc + ca \Leftrightarrow 2(a^2 + b^2 + c^2) = \frac{2}{a+b+c} + 2(ab + bc + ca) \\ \Leftrightarrow 3(a^2 + b^2 + c^2) = \frac{2}{a+b+c} + (a+b+c)^2$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta được:

$$\frac{2}{a+b+c} + (a+b+c)^2 = \frac{1}{a+b+c} + \frac{1}{a+b+c} + (a+b+c)^2 \geq 3$$

Do đó ta được: $3(a^2 + b^2 + c^2) \geq 3 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq 1$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 1. Đẳng thức xảy ra khi:

$$\begin{cases} a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 1 \\ (a+b+c)^3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b = 0; c = 1 \\ a = c = 0; b = 1 \\ a = 1; b = c = 0 \end{cases}$$

d. Với mọi số thực $a \geq -1$ ta có $(a+1)(a-2)^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^3 - 3a^2 + 4 \geq 0 \Leftrightarrow a^3 \geq 3a^2 - 4$, dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = -1$ hoặc $a = 2$

Áp dụng vào bài toán ta có: dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi có hai số bằng 2, một số bằng -1. Từ giả thiết ta suy ra $-1 \leq a, b, c \leq 3$. Ta có $a^3 - 3a^2 = a^2(a-3) \leq 0$. Suy ra

$P \leq 3(a^2 + b^2 + c^2) = 27$, dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi có một số bằng 3, hai số bằng 0.

Ví dụ 10

a. Cho các số thực x, y, z thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Chứng minh: $-1 \leq x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz \leq 1$

b. Cho các số thực không âm a, b, c thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 + abc = 4$. Tìm GTLN, GTNN của biểu thức $P = ab + bc + ca - abc$.

c. Cho các số thực không âm a, b, c sao cho $a + b + c = 1$. Tìm GTLN, GTNN của

$$P = (1-4ab)^2 + (1-4bc)^2 + (1-4ca)^2.$$

d. Cho các số thực không âm a, b, c thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 + a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 = 6$. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của $P = a + b + c$.

Lời giải

a. Ta có: $(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)^2 = (x + y + z)^2 (x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)^2 = (1 + 2t)(1 - t)^2$ với $t = xy + yz + zx$ do $xy + yz + zx \leq x^2 + y^2 + z^2 = 1$ nên $t \leq 1$ và $-1 \leq x, y, z \leq 1$ nên

$$\begin{cases} (x+1)(y+1)(z+1) \geq 0 \\ -(x-1)(y-1)(z-1) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xyz + x + y + z + xy + yz + zx + 1 \geq 1 \\ -xyz - x - y - z + xy + yz + zx + 1 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow xy + yz + zx \geq -\frac{1}{2}.$$

Ta có $(1 + 2t)(1 - t)^2 \leq \frac{(1 + 2t + 1 - t + t - t)^3}{27} = 1$ suy ra $P^2 \leq 1$ đpcm.

Bài tập tương tự: Cho các số thực x, y, z thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 2$.

Chúng minh rằng: $|a^3 + b^3 + c^3 - 3abc| \leq 2\sqrt{2}$

b. Từ giả thiết suy ra ít nhất 1 số ≤ 1 , giả sử $0 \leq c \leq 1$. Ta có:

$P = a(b + c) + bc(1 - a) \geq 0$, dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $(a; b; c) = (2; 0; 0)$ hoặc các hoán vị. Từ giả thiết suy ra tồn tại 2 số b, c thỏa mãn $(b - 1)(c - 1) \geq 0$ hay $bc \geq b + c - 1$

Ta có $4 = a^2 + b^2 + c^2 + abc \geq a^2 + 2bc + abc$ hay $bc(2 + a) \leq 4 - a^2 \Rightarrow bc \leq 2 - a$

Từ đó ta có: $P \leq a(b + c) + 2 - c - abc = 2 - c - a(1 + bc - b - c) = 2 - a(1 - b)(1 - c) \leq 2$ đẳng thức xảy ra tại $a = b = c = 1$ hoặc $(a; b; c) = (0; \sqrt{2}; \sqrt{2})$ và các hoán vị.

c. Từ giả thiết ta có: $1 = a + b + c \geq a + b \geq 2\sqrt{ab} \Rightarrow 4ab \leq 1$ suy ra $0 \leq 1 - 4ab \leq 1$

Suy ra $(1 - 4ab)^2 + (1 - 4bc)^2 + (1 - 4ca)^2 \leq 3$, dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi có hai số bằng 0, một số bằng 1.

Ta có: $P = (1 - 4ab)^2 + (1 - 4bc)^2 + (1 - 4ca)^2 = 3 - 8(ab + bc + ca) + 16(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)$

Ta chứng minh: $P \geq \frac{25}{27} \Leftrightarrow Q = ab + bc + ca - 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) \leq \frac{7}{27}$

Để ý rằng: $ab - 2a^2b^2 \leq \frac{5}{9}ab + \frac{2}{81}$. Thật vậy bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$2a^2b^2 - \frac{4}{9}ab + \frac{2}{81} \geq 0 \Leftrightarrow \left(ab - \frac{1}{9}\right)^2 \geq 0$ luôn đúng với mọi ab . Từ đó suy ra:

$Q \leq \frac{5}{9}(ab + bc + ca) + \frac{6}{81}$, lại có $ab + bc + ca \leq \frac{(a + b + c)^2}{3} = \frac{1}{3}$ suy ra $Q \leq \frac{5}{27} + \frac{2}{27} = \frac{7}{27}$ suy ra

đpcm. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{1}{3}$.

d. Ta có: $a^2b^2 + 1 \geq 2ab, b^2c^2 + 1 \geq 2bc, c^2a^2 + 1 \geq 2ca$

$\Rightarrow 9 = a^2 + b^2 + c^2 + a^2b^2 + 1 + b^2c^2 + 1 + c^2a^2 + 1 \geq a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) = (a + b + c)^2$.

Vậy $P \leq 3$, dấu đẳng thức xảy ra tại $a = b = c = 1$.

Ta chứng minh $P \geq \sqrt{6}$ hay $P^2 = (a + b + c)^2 \geq 6 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) \geq 6$. Theo giả thiết ta có $a^2 + b^2 + c^2 = 6 - (a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)$ ta quy bài toán về chứng minh:

$6 - (a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) + 2(ab + bc + ca) \geq 6 \Leftrightarrow 2(ab + bc + ca) - (a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) \geq 0$

Theo giả thiết ta có:

$7 = a^2 + b^2 + c^2 + a^2b^2 + 1 + b^2c^2 + c^2a^2 \geq a^2 + b^2 + a^2b^2 + 1 \geq 2ab + 2ab = 4ab \Rightarrow ab < 2$ Dẫn tới $2ab - a^2b^2 = ab(2 - ab) \geq 0$ suy ra đpcm.

Ví dụ 11

- a. Tìm GTLN, GTNN của $P = \sqrt[4]{1-x} + \sqrt[4]{1+x} + \sqrt[4]{1-x^2}$.
- b. Cho các số thực x, y thỏa mãn $x - \sqrt{x+6} = \sqrt{y+6} - y$. Tìm GTLN, GTNN của $P = x + y$.
- c. Cho số thực x thỏa mãn $0 \leq x \leq 5$. Tìm GTLN, GTNN của $P = x\sqrt{8-x} + (5-x)\sqrt{x+3}$.
- d. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \sqrt{x} + \sqrt{9-x} - \sqrt{x(9-x)}$.

Lời giải

a. Đặt $\sqrt[4]{1-x} = a, \sqrt[4]{1+x} = b \Rightarrow a, b \geq 0, a^4 + b^4 = 2$. Khi đó ta có: $P = a + b + ab$

Ta có bất đẳng thức cơ bản sau $2(x^2 + y^2) \geq (x + y)^2$. Thật vậy, BĐT cần chứng minh có dạng:

$$2(x^2 + y^2) - (x + y)^2 \geq 0 \Leftrightarrow (x - y)^2 \geq 0 \text{ luôn đúng. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi } x = y.$$

Áp dụng vào bài toán ta có: $(a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2) \leq 2\sqrt{2 \cdot 2} = 4 \Rightarrow a + b \leq 2$. Mặt khác ta cũng có:

$$4ab \leq (a + b)^2 \leq 2^2 = 4 \Rightarrow ab \leq 1. \text{ Vậy } P \leq 3. \text{ Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi } a = b = 1 \Leftrightarrow x = 0.$$

Ta có $a^4 + b^4 \leq a^4 + b^4 + 2a^2b^2 = (a^2 + b^2)^2 \Rightarrow a^2 + b^2 \geq \sqrt{2}$. Do

$$a^2 + b^2 \leq a^2 + b^2 + 2ab \Rightarrow (a + b)^2 \geq \sqrt{2} \Rightarrow a + b \geq \sqrt[4]{2}. \text{ Như vậy } P \geq \sqrt[4]{2}, \text{ dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi } a = 0, b = \sqrt[4]{2} \text{ hoặc } a = \sqrt[4]{2}, b = 0.$$

b. Điều kiện $x, y \geq -6 \Rightarrow x + y \geq -12$

Từ giả thiết ta có:

$$(x + y)^2 = (\sqrt{x+6} + \sqrt{y+6})^2 = x + y + 12 + 2\sqrt{(x+6)(y+6)} \leq x + y + 12 + x + 6 + y + 6$$

$$\text{Hay } (x + y)^2 \leq 2(x + y) + 24 \Leftrightarrow (x + y + 4)(x + y - 6) \leq 0 \Leftrightarrow x + y - 6 \leq 0 \Leftrightarrow x + y \leq 6.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi: $x = y = 3$. Vậy GTLN của P bằng 6 khi và chỉ khi $x = y = 3$

$$\text{Đặt: } \sqrt{x+6} = a, \sqrt{y+6} = b \Rightarrow a, b \geq 0; a + b = a^2 + b^2 - 12 \text{ và } P = a^2 + b^2 - 12 = a + b.$$

Từ giả thiết ta có $a + b = (a + b)^2 - 2ab - 12 \Rightarrow a + b \leq (a + b)^2 - 12$ (do $a, b \geq 0$). .

Hay $(a + b)^2 - (a + b) - 12 \geq 0 \Leftrightarrow (a + b + 3)(a + b - 4) \geq 0 \Leftrightarrow a + b \geq 4 \Rightarrow P \geq 4$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = 4, b = 0$ hoặc $a = 0, b = 4$ tức là $x = 10, y = -6$ hoặc $y = 10, x = -6$.

c. Đặt $\sqrt{8-x} = a, \sqrt{x+3} = b$ do $0 \leq x \leq 5$ suy ra $\begin{cases} \sqrt{3} \leq a, b \leq \sqrt{8} \\ a^2 + b^2 = 11 \end{cases}$

Biểu thức P có dạng $P = (a^2 - 3)b + (b^2 - 3)a = ab(a + b) - 3(a + b)$

$$\text{Đặt } a + b = t \text{ từ giả thiết ta có: } (a + b)^2 - 2ab = 11 \Leftrightarrow 4ab = 2t^2 - 22 \leq (a + b)^2 = t^2 \Rightarrow t \leq \sqrt{22}$$

Mặt khác ta cũng có:

$$\begin{cases} (a - \sqrt{3})(a - \sqrt{8}) \leq 0 \\ (b - \sqrt{3})(b - \sqrt{8}) \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 - (\sqrt{3} + \sqrt{8})a + \sqrt{24} \leq 0 \\ b^2 - (\sqrt{3} + \sqrt{8})b + \sqrt{24} \leq 0 \end{cases} \Rightarrow 11 + 2\sqrt{24} \leq (\sqrt{3} + \sqrt{8})(a + b)$$

Hay $a + b \geq 2\sqrt{2} + \sqrt{3}$, vậy $2\sqrt{2} + \sqrt{3} \leq t \leq \sqrt{22}$

Ta có: $P = 2ab(a + b) - 6(a + b) = (t^2 - 11)t - 6t = t(t^2 - 17)$. Từ đó ta có:

$2P \geq (2\sqrt{2} + \sqrt{3}) \left[(2\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 - 17 \right] = (2\sqrt{2} + \sqrt{3})(4\sqrt{6} - 6) = 10\sqrt{3} \Leftrightarrow P \geq 5\sqrt{3}$, dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = \sqrt{3}, b = \sqrt{8}$ hoặc $a = \sqrt{8}, b = \sqrt{3} \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 5$.

Ta có $2P \leq 5\sqrt{22} \Rightarrow P \leq \frac{5\sqrt{22}}{2}$ dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = \sqrt{\frac{11}{2}} \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$.

Cách khác:

Ta có: $0 \leq x \leq 5$ thì $P = x\sqrt{8-x} + (5-x)\sqrt{x+3} \geq x\sqrt{3} + (5-x)\sqrt{3} = 5\sqrt{3}$. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = 0$ hoặc $x = 5$.

Ta cũng có:

$$P^2 = [x\sqrt{8-x} + (5-x)\sqrt{x+3}]^2 = x^2(8-x) + (5-x)^2(x+3) + 2x(5-x)\sqrt{(8-x)(x+3)}$$

Hay $P^2 = 75 + (5x - x^2)(2\sqrt{(8-x)(x+3)} - 1)$. Theo bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$5x - x^2 = x(5-x) \leq \frac{(x+5-x)^2}{4} = \frac{25}{4}, 2\sqrt{(8-x)(x+3)} \leq 8-x+x+3=11 \text{ nên}$$

$$P^2 \leq 75 + \frac{25}{4} \cdot 10 = \frac{275}{2} \Rightarrow P \leq \frac{5\sqrt{22}}{2}, \text{ dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi } 8-x = x+3 \text{ và}$$

$$x = 5-x \text{ hay } x = \frac{5}{2}. \text{ Vậy GTNN của } P \text{ là } 5\sqrt{3}, \text{ GTLN của } P \text{ là } \frac{5\sqrt{22}}{2}.$$

d. Điều kiện $0 \leq x \leq 9$. Ta có $(\sqrt{x} + \sqrt{9-x})^2 = 9 + 2\sqrt{x(9-x)}$ suy ra

$$(\sqrt{x} + \sqrt{9-x})^2 \geq 9 \Leftrightarrow \sqrt{x} + \sqrt{9-x} \geq 3 \text{ dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi } x = 9 \text{ hoặc } x = 0,$$

Theo bất đẳng thức AM-GM ta có: $2\sqrt{x(9-x)} \leq x+9-x=9 \Rightarrow (\sqrt{x} + \sqrt{9-x})^2 \leq 18$ hay

$$x=0, \sqrt{x} + \sqrt{9-x} \leq 3\sqrt{2} \text{ dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi } x = 9-x \Leftrightarrow x = \frac{9}{2} \text{ đặt } t = \sqrt{x} + \sqrt{9-x} \text{ thì}$$

$$3 \leq t \leq 3\sqrt{2} \text{ thì vậy } \sqrt{x(9-x)} = \frac{t^2-9}{2}. \text{ Ta có } P = t - \frac{t^2-9}{2} = \frac{-t^2+2t+9}{2} = \frac{10-(t-1)^2}{2}, \text{ do}$$

$$3 \leq t \leq 3\sqrt{2} \text{ suy ra } 2 \leq t-1 \leq 3\sqrt{2}-1 \Rightarrow 4 \leq (t-1)^2 \leq (3\sqrt{2}-1)^2 \Leftrightarrow 4 \leq (x-1)^2 \leq 19-6\sqrt{2} \text{ nên}$$

$$\frac{10-(19-6\sqrt{2})}{2} \leq P \leq \frac{10-4}{2} \Leftrightarrow \frac{6\sqrt{2}-9}{2} \leq P \leq 3.$$

Vậy GTLN của P là 3 tại $x = 0$ hoặc $x = 9$, GTNN của P là $\frac{6\sqrt{2}-9}{2}$ tại $x = \frac{9}{2}$.

Một số bài toán khác

1. Cho các số thực không âm a, b thỏa mãn: $a + b = 2$. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của $P = a\sqrt{b+1} + b\sqrt{a+1}$.

Lời giải

$$\text{Tìm GTLN: Ta có: } \sqrt{(b+1) \cdot 2} \leq \frac{b+1+2}{2} = \frac{b+3}{2} \Rightarrow \sqrt{b+1} \leq \frac{b+3}{2\sqrt{2}}.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $b = 1$.

Tương tự ta cũng có: $\sqrt{a+1} \leq \frac{a+3}{2\sqrt{2}}$;

Suy ra: $P \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}[a(b+3)+b(a+3)] = \frac{1}{2\sqrt{2}}(2ab+3a+3b)$.

Lại có: $4ab \leq (a+b)^2 = 4 \Rightarrow ab \leq 1$.

Từ đó suy ra: $P \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}(2+6) = 2\sqrt{2}$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b=1$.

Tìm GTNN: Ta có:

$$P^2 = a^2(b+1) + b^2(a+1) + 2ab\sqrt{(a+1)(b+1)} = ab(a+b) + a^2 + b^2 + 2ab\sqrt{(a+1)(b+1)}.$$

Do $a, b \geq 0 \Rightarrow 2ab\sqrt{(a+1)(b+1)} \geq 0$, kết hợp với $a+b=2$ ta suy ra:

$$P^2 \geq 2ab + a^2 + b^2 = (a+b)^2 = 4 \Rightarrow P \geq 2. \text{ Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi } a=0, b=2 \text{ hoặc } a=2, b=0.$$

Kết luận: GTLN của P là $2\sqrt{2}$, GTNN của P là 2.

2. Cho các số thực $a, b, c \geq 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{2a-1} + \frac{1}{2b-1} + \frac{1}{2c-1} + \frac{4ab}{1+ab} + \frac{4ac}{1+bc} + \frac{4ca}{1+ca} \geq 9.$$

Lời giải:

$$\text{Đặt } P = \frac{1}{2a-1} + \frac{1}{2b-1} + \frac{1}{2c-1} + \frac{4ab}{1+ab} + \frac{4ac}{1+bc} + \frac{4ca}{1+ca}.$$

Vì $a, b \geq 1 \Rightarrow (a-1)(b-1) \geq 0 \Rightarrow ab+1 \geq a+b$. Ta có: $(a-1)^2 \geq 0 \Rightarrow a^2 \geq 2a-1$ suy ra:

$$\frac{1}{2a-1} \geq \frac{1}{a^2}.$$

$$\text{Lại có: } \frac{4ab}{1+ab} \geq \frac{4(ab+1)-4}{1+ab} = 4 - \frac{4}{1+ab} \geq 4 - \frac{4}{a+b}.$$

Tương tự ta cũng có đánh giá với các biểu thức còn lại trong vế trái và suy ra:

$$P \geq \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + 12 - 4\left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}\right).$$

Từ $(a+b)^2 \geq 4ab$ và bất đẳng thức Cauchy ta có: $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \geq \frac{2}{ab} \geq \frac{8}{(a+b)^2}$. Suy ra:

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + 12 - 4\left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}\right) \geq \frac{4}{(a+b)^2} + \frac{4}{(b+c)^2} + \frac{4}{(c+a)^2} - 4\left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}\right) + 12$$

Ta cũng có:

$$\frac{4}{(a+b)^2} + \frac{4}{(b+c)^2} + \frac{4}{(c+a)^2} - 4\left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}\right) + 12 = \left(\frac{2}{a+b} - 1\right)^2 + \left(\frac{2}{b+c} - 1\right)^2 + \left(\frac{2}{c+a} - 1\right)^2 + 9$$

Nên suy ra: $P \geq 9$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

3. Cho các số thực $a, b \geq 0$ thỏa mãn $a+b=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của

$$P = \frac{a}{b+1} + \frac{b}{a+1}.$$

Lời giải

Từ giả thiết $a, b \geq 0 \Rightarrow ab \geq 0$, lại có $4ab \leq (a+b)^2 = 1 \Rightarrow ab \leq \frac{1}{4}$. Vậy $0 \leq ab \leq \frac{1}{4}$.

Ta viết lại: $P = \frac{a^2 + b^2 + a + b}{a + b + ab + 1} = \frac{(a+b)^2 - 2ab + a + b}{a + b + ab + 1} = \frac{2 - 2ab}{2 + ab} = \frac{6 - 2(2 + ab)}{2 + ab} = \frac{6}{2 + ab} - 2$

Vì $0 \leq ab \leq \frac{1}{4}$ suy ra $2 \leq 2 + ab \leq \frac{9}{4} \Rightarrow \frac{6}{9} \leq \frac{6}{2 + ab} \leq \frac{6}{2} \Leftrightarrow \frac{8}{3} \leq \frac{4}{2 + ab} \leq 3$, từ đó suy ra:

$$\frac{2}{3} \leq P \leq 1.$$

Khi $a = b = \frac{1}{2}$ thì $P = \frac{2}{3}$; khi $a = 1, b = 0$ hoặc $a = 0, b = 1$ thì $P = 1$. Vậy GTLN của P là 1, GTNN của P là $\frac{2}{3}$.

- 4.** Cho các số thực dương a, b thỏa mãn $a + b = 4ab$ và $a, b \leq 1$. Tìm giá trị lớn nhất của $P = a^2 + b^2$.

Lời giải

Ta có: $P = a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab = 16a^2b^2 - 2ab$.

Với mọi số thực a, b ta có: $(a+b)^2 \geq 4ab \Rightarrow 16a^2b^2 - 4ab \geq 0 \Leftrightarrow 4ab(ab-1) \geq 0$.

Do $a, b > 0 \Rightarrow 4ab \geq 1 \Rightarrow ab \geq \frac{1}{4}$.

Từ giả thiết: $a, b \leq 1 \Rightarrow (a-1)(b-1) \geq 0 \Leftrightarrow ab - (a+b) + 1 \geq 0 \Leftrightarrow ab - 4ab + 1 \geq 0 \Leftrightarrow ab \leq \frac{1}{3}$.

Như vậy ta có: $\frac{1}{4} \leq ab \leq \frac{1}{3}$.

Ta biến đổi như sau: $P = (4ab-1)(3ab-1) + 4a^2b^2 + 5ab - 1 \leq 0 + \frac{4}{9} + \frac{5}{9} - 1 = \frac{10}{9}$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ ab = \frac{1}{3}, a + b = 4ab \end{cases}$ hay $a = 1, b = \frac{1}{3}$ hoặc $a = \frac{1}{3}, b = 1$.

Vậy GTLN của P là $\frac{10}{9}$.

- 5.** Cho các số thực không âm a, b thỏa mãn điều kiện $a + b + 2ab = 4$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức của biểu thức $P = a^3 + b^3$.

Lời giải

Ta có bất đẳng thức sau: Với mọi $x, y \geq 0$ thì $x^3 + y^3 \geq xy(x+y)$.

Chúng minh: $x^3 + y^3 \geq xy(x+y) \Leftrightarrow (x+y)(x-y)^2 \geq 0$ luôn đúng. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = y$.

Trở lại bài toán ta có: $a^3 + 1 \geq a(a+1) = a^2 + a, b^3 + 1 \geq b^2 + b \Rightarrow a^3 + b^3 \geq a^2 + b^2 + a + b - 2$.

Lại có: $a^2 + b^2 \geq 2ab$ suy ra: $a^3 + b^3 \geq a + b + 2ab - 2 = 2$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = 1$.

Từ giả thiết ta cũng suy ra: $a + b \leq 3$, ta cũng có:

$$P = a^3 + b^3 \leq a^3 + b^3 + 3ab(a+b) = (a+b)^3 \leq 3^3 = 27$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = 3, b = 0$ hoặc $a = 0, b = 3$.

6. Cho các số thực không âm a, b, c thỏa mãn điều kiện: $a^2 + b^2 + c^2 = 2(ab + bc + ca) > 0$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \sqrt{\frac{ab}{a^2 + b^2}} + \sqrt{\frac{bc}{b^2 + c^2}} + \sqrt{\frac{ca}{c^2 + a^2}}$.

Lời giải

Ta có: $\sqrt{\frac{ab}{a^2 + b^2}} = \frac{\sqrt{ab(a^2 + b^2)}}{a^2 + b^2} \geq \frac{\sqrt{ab} \cdot \sqrt{2ab}}{a^2 + b^2} = \sqrt{2} \cdot \frac{ab}{a^2 + b^2}$. Tương tự ta thu được hai bất đẳng thức nữa và suy ra:

$$P \geq \sqrt{2} \left(\frac{ab}{a^2 + b^2} + \frac{bc}{b^2 + c^2} + \frac{ca}{c^2 + a^2} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{2ab}{a^2 + b^2} + \frac{2bc}{b^2 + c^2} + \frac{2ca}{c^2 + a^2} \right).$$

Mặt khác ta cũng có:

$$\begin{aligned} Q &= \frac{2ab}{a^2 + b^2} + \frac{2bc}{b^2 + c^2} + \frac{2ca}{c^2 + a^2} = \frac{2ab}{a^2 + b^2} + 1 + \frac{2bc}{b^2 + c^2} + 1 + \frac{2ca}{c^2 + a^2} + 1 - 3 \\ &= \frac{(a+b)^2}{a^2 + b^2} + \frac{(b+c)^2}{b^2 + c^2} + \frac{(c+a)^2}{c^2 + a^2} - 3 \geq \frac{2(a+b+c)^2}{a^2 + b^2 + c^2} - 3 = 2 + \frac{4(ab+bc+ca)}{a^2 + b^2 + c^2} - 3 = 2 + 2 - 3 = 1 \end{aligned}$$

Suy ra: $P \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b, c = 0$ và các hoán vị.

Vậy GTNN của P là $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

7. Cho các số thực không âm x, y, z thỏa mãn $x + y + z = 3$. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của $P = \sqrt{5x^2 + 6xy + 5y^2} + \sqrt{5y^2 + 6yz + 5z^2} + \sqrt{5z^2 + 6zx + 5x^2}$.

Lời giải

Theo bất đẳng thức $AM - GM$ ta có: $x^2 + y^2 \geq 2xy$ suy ra:

$$5x^2 + 6xy + 5y^2 = 4x^2 + 6xy + 4y^2 + x^2 + y^2 \geq 4x^2 + 6xy + 4y^2 + 2xy = 4(x+y)^2.$$

Suy ra: $P \geq 2(x+y) + 2(y+z) + 2(z+x) = 4(x+y+z) = 12$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 1$.

Từ giả thiết:

$$x, y, z \geq 0 \Rightarrow 6xy \leq 10xy \Rightarrow \sqrt{5x^2 + 6xy + 5y^2} \leq \sqrt{5x^2 + 10xy + 5y^2} = \sqrt{5(x+y)^2} = \sqrt{5}(x+y).$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi một trong hai số x, y bằng 0.

Từ đó suy ra: $P \leq 2\sqrt{5}(x+y+z) = 6\sqrt{5}$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi có hai số bằng 0, một số bằng 3.

VII. MỘT SỐ CÁCH ĐÁNH GIÁ KHÁC

Với các số thực không âm a, b, c .

Giả sử $c = \min\{a, b, c\}$.

$$\square a^2 + c^2 \leq \left(a + \frac{c}{2}\right)^2, b^2 + c^2 \leq \left(b + \frac{c}{2}\right)^2, a^2 + b^2 \leq \left(a + \frac{c}{2}\right)^2 + \left(b + \frac{c}{2}\right)^2.$$

$$\square a^2 + b^2 + c^2 \leq \left(a + \frac{c}{2}\right)^2 + \left(b + \frac{c}{2}\right)^2.$$

$$\square ab + bc + ca \geq \left(a + \frac{c}{2}\right)\left(b + \frac{c}{2}\right).$$

$$\square a^2 - ac + c^2 = a^2 + c(c - a) \leq a^2 \leq \left(a + \frac{c}{2}\right)^2$$

$$\square b^2 - bc + c^2 = b^2 + c(c - b) \leq b^2 \leq \left(b + \frac{c}{2}\right)^2$$

$$\square a^2 - ab + b^2 \leq \left(a + \frac{c}{2}\right)^2 - \left(a + \frac{c}{2}\right)\left(b + \frac{c}{2}\right) + \left(b + \frac{c}{2}\right)^2$$

Ví dụ 1

a, Cho các số thực không âm a, b, c phân biệt thỏa mãn: $0 \leq a, b, c \leq 2$

Chứng minh: $\frac{1}{(a-b)^2} + \frac{1}{(b-c)^2} + \frac{1}{(c-a)^2} \geq \frac{9}{4}$

b, Cho các số thực không âm a, b, c thỏa mãn: $3(a^2 + b^2 + c^2) + ab + bc + ca = 12$. Chứng minh rằng: $22 \leq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{a + b + c} + ab + bc + ca \leq 32$

c, Cho các số thực không âm x, y, z sao cho $xy + yz + zx \neq 0$. Chứng minh rằng:

$$P = (xy + yz + zx) \left(\frac{1}{x^2 + y^2} + \frac{1}{y^2 + z^2} + \frac{1}{z^2 + x^2} \right) \geq \frac{5}{2}$$

d, Cho các số thực không âm a, b, c sao cho $ab + bc + ca \neq 0$ và $a + b + c = 1$. Tìm GTNN của biểu thức: $P = \frac{1}{a^2 + b^2} + \frac{1}{b^2 + c^2} + \frac{1}{c^2 + a^2}$

Lời giải

a, Không mất tính tổng quát ta giả sử $0 \leq a < b < c \leq 2$. Từ đó suy ra:

$$+0 < c - a \leq 2 \Rightarrow \frac{1}{(c-a)^2} \geq \frac{1}{c^2} \geq \frac{1}{4},$$

$$+0 < c - b \leq 2 - b \Rightarrow \frac{1}{(c-b)^2} \geq \frac{1}{(b-2)^2}$$

$$+0 < b - a \leq b \Rightarrow \frac{1}{(a-b)^2} \geq \frac{1}{b^2}. \text{ Cộng ba bất đẳng thức cùng chiều ta có: } VT \geq \frac{1}{b^2} + \frac{1}{(b-2)^2} + \frac{1}{4}$$

Cuối cùng ta chỉ cần chứng minh: $\frac{1}{b^2} + \frac{1}{(b-2)^2} + \frac{1}{4} \geq \frac{9}{4}$ với $b \in (0; 2)$ (dành cho học sinh tự

làm)

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $(a; b; c) = (0; 1; 2)$ và các hoán vị.

b, Đặt $P = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{a + b + c} + ab + bc + ca$

Biểu thức cần tìm GTLN, GTNN có dạng đối xứng nên ta có thể tận dụng các hằng đẳng thức để quy về một ẩn

Từ giả thiết ta có: $(a + b + c)^2 = 24 - 5(a^2 + b^2 + c^2) \Leftrightarrow a + b + c = \sqrt{24 - 5(a^2 + b^2 + c^2)}$

Như vậy $P = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{\sqrt{24 - 5(a^2 + b^2 + c^2)}} + 12 - 3(a^2 + b^2 + c^2)$. Ta cần đánh giá $a^2 + b^2 + c^2$. Từ giả

thiết ta có: $12 = 3(a^2 + b^2 + c^2) + ab + bc + ca \leq 3(a^2 + b^2 + c^2) + a^2 + b^2 + c^2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq 3$

Do a, b, c không âm nên ta có:

$$12 = 3(a^2 + b^2 + c^2) + ab + bc + ca \geq 3(a^2 + b^2 + c^2) \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 \leq 4$$

$$\text{Đặt } t = \sqrt{24 - 5(a^2 + b^2 + c^2)} \Rightarrow t \in [2; 3]. \text{ Khi đó ta có: } P = \frac{1}{5} \left(3t^2 - t + \frac{24}{t} \right) - \frac{12}{5}.$$

Phần việc còn lại là chứng minh BĐT ở các vế (Dành cho học sinh)

c, Phân tích: Giả sử $z = \min\{x; y; z\}$ ta dự đoán dấu bằng xảy ra khi $z = 0$, khi đó ta có

$$x + y \geq 2z \Leftrightarrow xy + yz + zx \geq \left(x + \frac{z}{2}\right) \left(y + \frac{z}{2}\right). \text{ Ta cũng có: } \frac{1}{x^2 + y^2} \geq \frac{1}{\left(x + \frac{z}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{z}{2}\right)^2};$$

$$\frac{1}{y^2 + z^2} \geq \frac{1}{y^2 + yz + \frac{z^2}{4}} = \frac{1}{\left(y + \frac{z}{2}\right)^2}; \frac{1}{z^2 + x^2} \geq \frac{1}{x^2 + xz + \frac{z^2}{4}} = \frac{1}{\left(x + \frac{z}{2}\right)^2}; \text{ Suy ra}$$

$$P \geq \left(x + \frac{z}{2}\right) \left(y + \frac{z}{2}\right) \left[\frac{1}{\left(x + \frac{z}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{z}{2}\right)^2} + \frac{1}{\left(x + \frac{z}{2}\right)^2} + \frac{1}{\left(y + \frac{z}{2}\right)^2} \right].$$

$$\text{Đặt } a = \left(x + \frac{z}{2}\right); b = \left(y + \frac{z}{2}\right) \text{ thì } a, b > 0$$

$$P \geq ab \left[\frac{1}{a^2 + b^2} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right] = \frac{\frac{a}{b}}{\left(\frac{a}{b}\right)^2 + 1} + \frac{a}{b} + \frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{t}{t^2 + 1} + t + \frac{1}{t} \text{ với } t = \frac{a}{b} > 0$$

Cuối cùng ta chứng minh: $\frac{t}{t^2 + 1} + t + \frac{1}{t} \geq \frac{5}{2}$ (Dành cho học sinh). Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi một số bằng 0 và hai số còn lại bằng nhau.

d, Phân tích: Giả sử c là số nhỏ nhất trong 3 số a, b, c .

$$P = \frac{1}{a^2 + b^2} + \frac{1}{b^2 + c^2} + \frac{1}{c^2 + a^2} \geq \frac{1}{\left(a + \frac{c}{2}\right)^2 + \left(b + \frac{c}{2}\right)^2} + \frac{1}{\left(b + \frac{c}{2}\right)^2} + \frac{1}{\left(a + \frac{c}{2}\right)^2}$$

Đặt $x = a + \frac{c}{2}, y = b + \frac{c}{2}$ thì $x, y > 0$ và $x + y = 1$. Bài toán trở thành tìm GTNN của biểu thức

$$Q = \frac{1}{x^2 + y^2} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{(x+y)^2}{x^2 + y^2} + \frac{(x+y)^2}{x^2} + \frac{(x+y)^2}{y^2} = \frac{\frac{x}{y} + \frac{y}{x} + 2}{\frac{x}{y} + \frac{y}{x}} + 2 \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right) + \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right)^2$$

Đặt $t = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$ thì $Q = t^2 + 2t + 1 + \frac{2}{t} \geq 10$ (Dành cho học sinh). Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi một số bằng 0 và hai số còn lại bằng nhau.

Ví dụ 2

a, Cho các số thực $a, b, c \geq 0$ sao cho $a + b + c = 3$. Tìm GTLN của biểu thức sau:

$$P = (a^2 - ab + b^2)(b^2 - bc + c^2)(c^2 - ca + a^2)$$

b, Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn điều kiện $a + b + c = 1$. Tìm GTNN của biểu

$$\text{thức } P = \frac{1}{\sqrt{a^2 + \frac{(b-c)^2}{4}}} + \frac{1}{\sqrt{b^2 + \frac{(c-a)^2}{4}}} + \frac{1}{\sqrt{c^2 + \frac{(a-b)^2}{4}}}.$$

c, Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn điều kiện $ab + bc + ca > 0$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} \geq 2$$

d, Cho các số không âm sao a, b, c cho $a^2 + b^2 + c^2 = 2$. Tìm GTLN của

$$T = \frac{a^2}{a^2 + bc + a + 1} + \frac{b+c}{a+b+c+1} + \frac{1}{abc+3}.$$

Lời giải

a, Không mất tính tổng quát ta giả sử $0 \leq a \leq b \leq c \leq 3$. Khi đó ta có:

$$\begin{cases} a(a-b) \leq 0 \\ a(a-c) \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq a^2 - ab + b^2 \leq b^2 \\ 0 \leq a^2 - ac + c^2 \leq c^2 \end{cases} \text{ suy ra } P \leq b^2 c^2 (b^2 - bc + c^2) = b^2 c^2 [(b+c)^2 - 3bc].$$

$$\text{Ta có: } b+c \leq a+b+c = 3 \Rightarrow P \leq b^2 c^2 (9-3bc). \text{ Đặt } t = bc \Rightarrow bc \leq \frac{(b+c)^2}{4} = \frac{9}{4} \Rightarrow 0 \leq t \leq \frac{9}{4}$$

Cuối cùng ta chứng minh: $-3t^3 + 9t^2 \leq 12$ với $0 \leq t \leq \frac{9}{4}$ dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi a, b, c là hoán vị của bộ số $(0; 1; 2)$.

b, Không mất tính tổng quát giả sử $c = \max\{a, b, c\}$. Ta có

$$\begin{aligned} \sqrt{a^2 + \frac{(b-c)^2}{4}} &\leq a + \frac{c}{2}, \sqrt{b^2 + \frac{(c-a)^2}{4}} \leq b + \frac{c}{2} \\ \sqrt{c^2 + \frac{(a-b)^2}{4}} &\leq \sqrt{c^2 + 2a^2 + 2b^2} \leq \sqrt{2\left(a + \frac{c}{2}\right)^2 + 2\left(b + \frac{c}{2}\right)^2} \end{aligned}$$

Đặt $x = a + \frac{c}{2}, y = b + \frac{c}{2}, (x, y > 0)$ và $x + y = 1$. Ta chứng minh được:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{\sqrt{2(x^2 + y^2)}} \geq \frac{5}{x+y} \text{ suy ra } P \geq 5, \text{ dấu đẳng thức xảy ra tại } a = b = 0, c = 1 \text{ hoặc các}$$

hoán vị

c, Sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta có $(a+b+c)^2 \geq 4a(b+c)$

$$\Rightarrow \frac{a}{b+c} \geq \frac{4a^2}{(a+b+c)^2} \Rightarrow \sqrt{\frac{a}{b+c}} \geq \frac{2a}{a+b+c}. \text{ Tương tự ta có } \sqrt{\frac{b}{c+a}} \geq \frac{2b}{a+b+c}; \sqrt{\frac{c}{a+b}} \geq \frac{2c}{a+b+c}.$$

Cộng theo ba vế bất đẳng thức trên ta được

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} \geq 2\left(\frac{a}{a+b+c} + \frac{b}{a+b+c} + \frac{c}{a+b+c}\right) = 2$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi có 1 số bằng 0 và hai số còn lại bằng nhau.

$$\text{d, Chứng minh được } bc + 1 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} + bc = \frac{a^2 + (b+c)^2}{2} \geq a(b+c).$$

suy ra $\frac{a^2}{a^2+bc+a+1} + \frac{b+c}{a+b+c} \leq \frac{a}{a+b+c+1} + \frac{b+c}{a+b+c+1} = \frac{a+b+c}{a+b+c+1}$.

Chúng minh được: $a+b+c-abc \leq 2$ (*) nên $a+b+c+1 \leq abc+3$. Suy ra

$$P \leq \frac{a+b+c}{a+b+c+1} + \frac{1}{a+b+c+1} = 1. \text{ Dấu đẳng thức xảy ra khi } a=b=1, c=0.$$

Có thể chứng minh(*) như sau:

$$[a+b+c-abc]^2 = [a(1-bc) + (b+c)]^2 \leq (a^2 + (b+c)^2)[(1-bc)^2 + 1] = (2+2bc)(2-2bc+b^2c^2) \leq 4$$

$$\text{hay } \Leftrightarrow (1+bc)(2-2bc+b^2c^2) \leq 2 \Leftrightarrow b^3c^3 - b^2c^2 \leq 0 \Leftrightarrow b^2c^2(bc-1) \leq 0$$

Nhưng điều này luôn đúng do $2 = a^2 + b^2 + c^2 \geq b^2 + c^2 \geq 2bc \Rightarrow bc \leq 1$. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi có 2 số bằng 1, một số bằng 0.

VIII. BẤT ĐẲNG THỨC SCHUR

Cho x, y, z là các số thực không âm và số thực dương t . Khi đó ta có:

$$x^t(x-y)(x-z) + y^t(y-z)(y-x) + z^t(z-y)(z-x) \geq 0 \quad (*)$$

Đây là bất đẳng thức có khá nhiều ứng dụng và tương đối chặt chẽ nhiều bài toán BĐT chỉ là hệ quả của BĐT này. Việc chứng minh (*) khá đơn giản:

Giả sử: $x \geq y \geq z \Rightarrow (*) \Leftrightarrow (x-y)[x^t(x-z) - y^t(y-x)] + z^t(z-y)(z-x) \geq 0$. Điều này là hiển nhiên. Dấu bằng xảy ra khi cả 3 số bằng nhau hoặc hai số bằng nhau, một số bằng 0.

Các bất đẳng thức suy ra từ BĐT SCHUR khi $t=1$ là:

$$1) \quad a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geq ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a).$$

$$2) \quad (a+b+c)^3 + 9abc \geq 4(a+b+c)(ab+bc+ca).$$

$$3) \quad abc \geq (a+b-c)(b+c-a)(c+a-b).$$

$$4) \quad a^2 + b^2 + c^2 + \frac{9abc}{a+b+c} \geq 2(ab+bc+ca).$$

$$5) \quad \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} + \frac{4abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \geq 2.$$

Các BĐT (4) (5) còn gọi là BĐT SCHUR dạng phân thức khi $t=1$.

Ngoài ra cần chú ý biến đổi: $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)[(a+b+c)^2 - 3(ab+bc+ca)]$. Hoặc:

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)[a^2 + b^2 + c^2 - (ab+bc+ca)]$$

Ta xét các ví dụ sau :

Ví dụ 1:

a, Cho a, b, c là 3 số thực không âm và $a+b+c=1$. Chứng minh rằng: $9abc \geq 4(ab+bc+ca)-1$

b, Cho các số thực dương a, b, c sao cho $ab+bc+ca+abc \leq 4$

Chúng minh: $a^2 + b^2 + c^2 + a + b + c \geq 2(ab+bc+ca)$. (trích Đề tuyển sinh vào lớp 10- trường Chuyên KHTN- ĐHQG Hà Nội, 2015)

c, Cho a, b, c là các số thực không âm sao cho $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng:

$$4(a^3 + b^3 + c^3) + 15abc \geq 1$$

d, Cho các số thực không âm a, b, c . Chứng minh rằng: $a^2 + b^2 + c^2 + 3\sqrt[3]{(abc)^2} \geq (ab + bc + ca)$
(Trích Đề tuyển sinh vào lớp 10 Trường chuyên Phan Bội Châu- Nghệ An, 2014)

Lời giải

a. Áp dụng bất đẳng thức Schur dạng: $(a + b + c)^3 + 9abc \geq 4(a + b + c)(ab + bc + ca)$. Thay $a + b + c = 1$ ta có: $1 + 9abc \geq 4(ab + bc + ca)$. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi có hai số bằng $\frac{1}{2}$ và 1 số bằng 0 hoặc $a = b = c = \frac{1}{3}$

b. Áp dụng BĐT Schur dạng phân số ta có: $a^2 + b^2 + c^2 + \frac{9abc}{a + b + c} \geq 2(ab + bc + ca)$. Để chứng minh bài toán ta chỉ cần chỉ ra: $a + b + c \geq \frac{9abc}{a + b + c} \Leftrightarrow (a + b + c)^2 \geq 9abc$. Theo bất đẳng thức Cô-si ta có: $a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc} \Rightarrow (a + b + c)^2 \geq 9(\sqrt[3]{abc})^2$. Ta chứng minh: $abc \leq 1$. Thật vậy từ giả thiết ta có: $ab + bc + ca + abc \leq 4$ mà $ab + bc + ca \geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}$. Đặt $t = \sqrt[3]{abc}$ ta suy ra: $t^3 + 3t^2 - 4 \leq 0 \Leftrightarrow (t - 1)(t + 2)^2 \leq 0 \Leftrightarrow t \leq 1$. Suy ra $abc \leq 1$ hay $(\sqrt[3]{abc})^2 \geq abc$ suy ra đpcm. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

c. Ta có: $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)[(a + b + c)^2 - 3(ab + bc + ca)] = 1 - 3(ab + bc + ca)$ Suy ra $4(a^3 + b^3 + c^3) + 15abc = 27abc + 4 - 12(ab + bc + ca) \geq 3[4(ab + bc + ca) - 1] + 4 - 12(ab + bc + ca) = 1$. Theo ví dụ 1 ta có: $9abc \geq 4(ab + bc + ca) - 1$. Từ đó suy ra: $27abc + 4 - 12(ab + bc + ca) \geq 3[4(ab + bc + ca) - 1] + 4 - 12(ab + bc + ca) = 1$ Hay $4(a^3 + b^3 + c^3) + 15abc \geq 1$. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi có hai số bằng $\frac{1}{2}$ và 1 số bằng 0 hoặc $a = b = c = \frac{1}{3}$

d. Đặt $\sqrt[3]{a^2} = x; \sqrt[3]{b^2} = y; \sqrt[3]{c^2} = z$

Suy ra: $a^2 = x^3; b^2 = y^3; c^2 = z^3 \Rightarrow a = \sqrt{x^3}; b = \sqrt{y^3}; c = \sqrt{z^3}$ và $x, y, z \geq 0$. Bất đẳng thức đã cho thành:

$$x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz \geq 2(\sqrt{x^3y^3} + \sqrt{y^3z^3} + \sqrt{z^3x^3}) \quad (1)$$

Áp dụng bất đẳng thức Schur ta suy ra: $x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz \geq xy(x + y) + yz(y + z) + zx(z + x)$

Mặt khác theo bất đẳng thức Cauchy ta có: $xy(x + y) \geq 2xy\sqrt{xy} = 2\sqrt{x^3y^3}$. Tương tự ta có:

$$yz(y + z) \geq 2\sqrt{y^3z^3}, \quad zx(z + x) \geq 2\sqrt{z^3x^3} \quad \text{Cộng vế theo vế các bất đẳng thức trên ta thu được:}$$

$$xy(x + y) + yz(y + z) + zx(z + x) \geq 2(\sqrt{x^3y^3} + \sqrt{y^3z^3} + \sqrt{z^3x^3}) \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có: $x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz \geq 2(\sqrt{x^3y^3} + \sqrt{y^3z^3} + \sqrt{z^3x^3})$

Hay $a^2 + b^2 + c^2 + 3\sqrt[3]{(abc)^2} \geq (ab + bc + ca)$. Đẳng thức xảy ra khi $x = y = z$ hay $a = b = c$.

Ví dụ 2

a) Cho a, b, c là các số thực dương có tổng bằng 1. Chứng minh rằng:

$$6(a^3 + b^3 + c^3) + 1 \geq 5(a^2 + b^2 + c^2)$$

b) Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng: $a^2 + b^2 + c^2 + 2abc + 1 \geq 2(ab + bc + ca)$.

c) Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn điều kiện $ab + bc + ca = 1$.

Chứng minh rằng: $a^3 + b^3 + c^3 + 6abc \geq a + b + c$

d) Cho các số thực dương a, b, c . Chứng minh rằng:

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2abc \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \right) \geq 2(ab + bc + ca).$$

Lời giải

a. Ta có: $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c) \left[(a+b+c)^2 - 3(ab+bc+ca) \right] = 1 - 3(ab+bc+ca)$ suy ra

$$6(a^3 + b^3 + c^3) + 1 = 6 \left[1 - 3(ab+bc+ca) \right] + 18abc + 1 = 1 + 18abc + 6(a+b+c)^2 - 18(ab+bc+ca) =$$

$$1 + 18abc + 5(a+b+c)^2 + (a+b+c)^2 - 18(ab+bc+ca)$$

$$= 1 + 5(a^2 + b^2 + c^2) + 18abc + (a+b+c)^2 - 8(ab+bc+ca)$$

$$= 5(a^2 + b^2 + c^2) + 2[9abc + 1 - 4(ab+bc+ca)]. \text{ Theo ví dụ 1 ta có:}$$

$$9abc \geq 4(ab+bc+ca) - 1 \Rightarrow 9abc + 1 - 4(ab+bc+ca) \geq 0. \text{ Suy ra } 6(a^3 + b^3 + c^3) + 1 \geq 5(a^2 + b^2 + c^2).$$

b. Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với:

$$(a+b+c)^2 + 2abc + 1 \geq 4(ab+bc+ca) \Leftrightarrow 2abc + 1 \geq 4(ab+bc+ca) - (a+b+c)^2, \text{ Áp dụng bất đẳng}$$

$$\text{thức Schur dạng phân số ta có: } a^2 + b^2 + c^2 + \frac{9abc}{a+b+c} \geq 2(ab+bc+ca)$$

$$\text{Hay: } \frac{9abc}{a+b+c} \geq 4(ab+bc+ca) - (a+b+c)^2. \text{ Do đó ta chỉ cần chứng minh } 2abc + 1 \geq \frac{9abc}{a+b+c} \text{ hay}$$

$$\left(\frac{9}{a+b+c} - 2 \right) abc \leq 1.$$

Nếu $S \geq \frac{9}{2}$ thì hiển nhiên bất đẳng thức đúng. Nếu $a+b+c \leq \frac{9}{2}$, áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta

$$\text{được: } \left(\frac{9}{a+b+c} - 2 \right) abc \leq \frac{9-2s}{s} \cdot \frac{s^3}{27} \leq \frac{1}{27} \left(\frac{s+s+(9-2s)}{3} \right)^3 = 1 \text{ với } s = a+b+c$$

c. Ta có: $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c) \left[a^2 + b^2 + c^2 - (ab+bc+ca) \right] = (a+b+c) \left[a^2 + b^2 + c^2 - 1 \right]$. Suy ra $a^3 + b^3 + c^3 + 6abc = 9abc + (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - 1)$. Áp dụng bất đẳng thức Schur dạng:

$$(a+b+c)^3 + 9abc \geq 4(a+b+c)(ab+bc+ca). \text{ Ta suy ra:}$$

$$9abc + (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - 1) \geq 4s - s^3 + (a^2 + b^2 + c^2)s - s = s(3 - s^2 + a^2 + b^2 + c^2) = s \text{ với}$$

$$s = a+b+c. \text{ Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi } a=b=c=\frac{1}{\sqrt{3}} \text{ hoặc có hai số bằng 1, một số bằng 0.}$$

d. Áp dụng BĐT hệ quả của BĐT AM – GM dạng : $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{9}{x+y+z}$ ta được :

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2abc \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \right) \geq a^2 + b^2 + c^2 + \frac{9abc}{a+b+c}$$

Ta cần chỉ ra được $a^2 + b^2 + c^2 + \frac{9abc}{a+b+c} \geq 2(ab+bc+ca)$ đây chính là BĐT Schur dạng phân thức.

Ví dụ 3

a) Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $ab+bc+ca=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{(1+ab)^2}{(1-ab)^2} + \frac{(1+bc)^2}{(1-bc)^2} + \frac{(1+ca)^2}{(1-ca)^2} \geq 12.$$

b) Cho các số thực dương a, b, c . Chứng minh rằng: $(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2) \geq 3(a+b+c)^2$

c) Cho các số thực dương a, b, c . Chứng minh rằng

$$\left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \right)^2 + \frac{14abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \geq 4$$

d) Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a+b+c=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{1+9bc+4(b-c)^2} + \frac{b}{1+9ca+4(c-a)^2} + \frac{c}{1+9ab+4(a-b)^2} \geq \frac{1}{2}.$$

Lời giải

a. Áp dụng BĐT Cauchy ta được :

$$\frac{(1+ab)^2}{(1-ab)^2} + \frac{(1+bc)^2}{(1-bc)^2} + \frac{(1+ca)^2}{(1-ca)^2} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{(1+ab)^2}{(1-ab)^2} \cdot \frac{(1+bc)^2}{(1-bc)^2} \cdot \frac{(1+ca)^2}{(1-ca)^2}}$$

Như vậy ta cần chứng minh $\frac{(1+ab)^2}{(1-ab)^2} \cdot \frac{(1+bc)^2}{(1-bc)^2} \cdot \frac{(1+ca)^2}{(1-ca)^2} \geq 64$

Hay ta cần chứng minh BĐT $(1+ab)(1+bc)(1+ca) \geq 8(1-ab)(1-bc)(1-ca)$

Đặt $x=ab; y=bc; z=ca$, khi đó $x, y, z > 0$ và $x+y+z=1$

BĐT cần chứng minh trở thành $(1+x)(1+y)(1+z) \geq 8(1-x)(1-y)(1-z)$ tương đương với BĐT sau $9xyz \geq 7(xy+yz+zx) - 2$.

Áp dụng BĐT Schur dạng phân thức ta có : $x^2 + y^2 + z^2 + \frac{9xyz}{x+y+z} \geq 2(xy+yz+zx)$ mà

$x+y+z=1$ nên ta suy ra được $9xyz \geq 4(xy+yz+zx) - 1$

Vì $x+y+z=1$ nên $3(xy+yz+zx) \leq 1$, do đó $4(xy+yz+zx) - 1 \geq 7(xy+yz+zx) - 2$

Điều này dẫn tới $9xyz \geq 7(xy+yz+zx) - 2$

Như vậy BĐT ban đầu được chứng minh.

b. BĐT cần chứng minh tương đương với

$$a^2b^2c^2 + 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) + 4(a^2 + b^2 + c^2) + 8 \geq 3(a^2 + b^2 + c^2) + 6(ab+bc+ca)$$

Hay $a^2b^2c^2 + 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) + (a^2 + b^2 + c^2) + 8 \geq 6(ab+bc+ca)$

Áp dụng BĐT Cauchy ta được :

$$\begin{aligned}
 & a^2b^2c^2 + 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) + (a^2 + b^2 + c^2) + 8 \\
 &= a^2b^2c^2 + 1 + 2[(a^2b^2 + 1) + (b^2c^2 + 1) + (c^2a^2 + 1)] + a^2 + b^2 + c^2 + 1 \\
 &\geq 2abc + 4(ab + bc + ca) + a^2 + b^2 + c^2 + 1
 \end{aligned}$$

Phép chứng minh hoàn tất nếu ta chỉ ra được :

$$2abc + 4(ab + bc + ca) + a^2 + b^2 + c^2 + 1 \geq 6(ab + bc + ca) \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 1 + 2abc \geq 2(ab + bc + ca)$$

Áp dụng BĐT Schur dạng phân thức ta có : $a^2 + b^2 + c^2 + \frac{9abc}{a+b+c} \geq 2(ab + bc + ca)$

Ta cần chỉ ra được $1 + 2abc \geq \frac{9abc}{a+b+c} \Leftrightarrow (1 + 2abc)(a+b+c) \geq 9abc$

Đánh giá cuối cùng luôn đúng vì theo BĐT Cauchy thì :

$$1 + 2abc = 1 + abc + abc \geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}; a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc}.$$

Vậy bài toán được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

c. Đặt $x = \frac{a}{b+c}; y = \frac{b}{c+a}; z = \frac{c}{a+b}$, khi đó ta được

$$\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z+1} = 2 \Leftrightarrow xy + yz + zx + 2xyz = 1$$

Dễ dàng chứng minh được $x + y + z \geq \frac{3}{2}$.

BĐT cần chứng minh trở thành : $(x + y + z)^2 + 14xyz \geq 4$

Theo BĐT Schur dạng phân thức ta có : $(x + y + z)^2 + \frac{9xyz}{x+y+z} \geq 4(xy + yz + zx)$

$$\Rightarrow (x + y + z)^2 + 14xyz \geq 14xyz + 4(xy + yz + zx) - \frac{9xyz}{x+y+z}$$

Từ $x + y + z \geq \frac{3}{2}$ suy ra $\frac{9xyz}{x+y+z} \leq 6xyz$, do đó ta được

$$14xyz + 4(xy + yz + zx) - \frac{9xyz}{x+y+z} \geq 4(xy + yz + zx) + 8xyz = 4$$

Do đó ta được $(x + y + z)^2 + 14xyz \geq 4$.

Vậy BĐT được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

d. Áp dụng BĐT Cauchy – Schwarz ta được :

$$\begin{aligned}
 & \frac{a}{1+9bc+4(b-c)^2} + \frac{b}{1+9ca+4(c-a)^2} + \frac{c}{1+9ab+4(a-b)^2} \\
 & \geq \frac{(a+b+c)^2}{(a+b+c)+27abc+4a(b-c)^2+4b(c-a)^2+4c(a-b)^2}
 \end{aligned}$$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$2(a+b+c)^2 \geq 1+27abc+4a(b-c)^2+4b(c-a)^2+4c(a-b)^2.$$

Hay $1 \geq 4ab(a+b)+4bc(b+c)+4ca(c+a)+3abc$

Để ý đến giả thiết ta viết lại BĐT trên thành

$$(a+b+c)^3 \geq 4ab(a+b)+4bc(b+c)+4ca(c+a)+3abc$$

Hay $a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geq ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a)$.

Biến đổi tương đương ta được $abc \geq (a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$

Đây chính là BĐT Schur

Vậy bài toán được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$ hoặc $a = b = \frac{1}{2}; c = 0$ và các hoán vị.

IX. BẤT ĐẲNG THỨC ABEL VÀ ỨNG DỤNG

CÔNG THỨC ABEL VÀ ỨNG DỤNG.

1. Công thức tổng Abel:

Giả sử $a_1, a_2, \dots, a_n$ và $b_1, b_2, \dots, b_n$ là hai dãy số thực. Khi đó ta có:

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n = (b_1 - b_2)S_1 + (b_2 - b_3)S_2 + \dots + b_nS_n \text{ trong đó } S_k = a_1 + a_2 + \dots + a_k.$$

Chứng minh: Thật vậy thay $a_k = S_k - S_{k-1}$ với $k = 2, 3, \dots, n$ ta có vế trái bằng:

$$b_1S_1 + b_2(S_2 - S_1) + b_3(S_3 - S_2) + \dots + b_n(S_n - S_{n-1}) = VP.$$

Trường hợp $n = 3$ ta có: $ax + by + cz = (x - y)a + (y - z)(a + b) + z(a + b + c)$ đây là đẳng thức quan trọng có nhiều ứng dụng trong giải toán.

2. Bất đẳng thức Abel:

Cho hai dãy số thực: $a_1, a_2, \dots, a_n$ và $b_1 \geq b_2 \geq b_3 \geq \dots \geq b_n$. Đặt $S_k = a_1 + a_2 + \dots + a_k$ với $k \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$ và $m = \min\{S_1, S_2, \dots, S_n\}$, $M = \max\{S_1, S_2, \dots, S_n\}$. Khi đó ta có:

$$mb_1 \leq A = a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n \leq Mb_1,$$

Chứng minh:

Ta có: $a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n = (b_1 - b_2)S_1 + (b_2 - b_3)S_2 + \dots + b_nS_n$ mà $b_k - b_{k+1} \geq 0$ nên

$$(b_1 - b_2)m + (b_2 - b_3)m + \dots + b_nm \leq A \leq (b_1 - b_2)M + (b_2 - b_3)M + \dots + b_nM \text{ hay } mb_1 \leq A \leq Mb_1.$$

3. Một số Ví dụ

Ví dụ 1. Cho $x \geq y \geq z \geq 0$ thỏa mãn: $x \geq 3, x + y \geq 5, x + y + z \geq 6$. Chứng minh: $x^2 + y^2 + z^2 \geq 14$

Lời giải

Từ giả thiết ta dự đoán dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = 3; y = 2; z = 1$.

Ta có phân tích: $x^2 + y^2 + z^2 - 14 = (x - 3)(x + 3) + (y - 2)(y + 1) + (z - 1)(z + 1)$.

Áp dụng công thức Abel ta có:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 14 = (x + 3 - y - 2)(x - 3) + (y + 2 - z - 1) + (z + 1)(x - 3 + y - 2 + z - 1)$$

$= (x-y+1)(x-3) + (y-z+1)(x+y-5) + (z+1)(x+y+z-6) \geq 0$. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi: $x=3; y=2; z=1$.

Ví dụ 2. Cho các số thực dương x, y, z sao cho $x \geq 3, xy \geq 6, xyz \geq 6$. Chứng minh: $x+y+z \geq 6$.

Lời giải

Dự đoán dấu đẳng thức xảy ra khi $x=3; y=2; z=1$.

Ta có:

$$\begin{aligned} x+y+z-6 &= 3\left(\frac{x}{3}-1\right) + 2\left(\frac{y}{2}-1\right) + 1\left(\frac{z}{1}-1\right) = (3-2)\left(\frac{x}{3}-1\right) + (2-1)\left(\frac{x}{3} + \frac{y}{2} - 2\right) + \\ &+ 1\left(\frac{x}{3} - 1 + \frac{y}{2} - 1 + \frac{z}{1} - 1\right) = \left(\frac{x}{3}-1\right) + \left(\frac{x}{3} + \frac{y}{2} - 2\right) + \left(\frac{x}{3} + \frac{y}{2} + \frac{z}{1} - 3\right). \text{ Áp dụng bất đẳng thức Cô si ta có:} \\ \frac{x}{3} + \frac{y}{2} &\geq 2\sqrt{\frac{xy}{6}} \geq 2; \quad \frac{x}{3} + \frac{y}{2} + \frac{z}{1} \geq 3\sqrt[3]{\frac{xyz}{3 \cdot 2 \cdot 1}} \geq 3. \text{ Suy ra đpcm. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi} \\ &x=3, y=2, z=1. \end{aligned}$$

Ví dụ 3. Cho $x, y, z > 0$ sao cho $x < 2y < 3z$ và $x \geq 1, x+y \geq 3, x+y+z \geq 6$. Chứng minh: $6(xy+yz+zx) \leq 11xyz$.

Lời giải

Ta cần chứng minh: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \leq \frac{11}{6}$. Ta có:

$$\begin{aligned} \frac{11}{6} - \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) &= 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{2} - \frac{1}{y} + \frac{1}{3} - \frac{1}{z} = \frac{x-1}{x} + \frac{y-2}{2y} + \frac{z-3}{3z} = \\ &\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2y}\right)(x-1) + \left(\frac{1}{2y} - \frac{1}{3z}\right)(x+y-3) + \frac{1}{3z}(x+y+z-6) \geq 0 \end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x=3, y=2, z=1$.

Ví dụ 4. Cho các số thực không âm x, y, z sao cho $x \leq 1, x+y \leq 5, x+y+z \leq 14$. Chứng minh: $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \leq 6$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } \frac{x}{1} + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right)x + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)(x+y) + \frac{1}{3}(x+y+z) \leq \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) \cdot 1 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) \cdot 5 + \frac{1}{3} \cdot 14 = 1 + 2 + 3.$$

$$\text{Ta suy ra } (\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z})^2 \leq (1+2+3)\left(\frac{x}{1} + \frac{y}{2} + \frac{z}{3}\right) \leq (1+2+3)^2 = 36.$$

Ví dụ 5. Cho các số thực dương $a \geq b \geq 1, a \leq 3, ab \leq 6, ab \leq 6c$. Chứng minh: $a+b-c \leq 4$

Lời giải

Ta cần chứng minh: $a+b+1 \leq 3+2+c$.

Ta có: $3+2+c = \left(\frac{3}{a} + \frac{2}{b} + \frac{c}{1}\right) + (b-1)\left(\frac{3}{a} + \frac{2}{b}\right) + (a-b)\frac{3}{a} \geq 3\sqrt{\frac{6c}{ab}} + (b-1)2\sqrt{\frac{6}{ab}} + (a-b)\frac{3}{a}$
 $\geq 3+2(b-1)+(a-b) = a+b+1$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=3, b=2, c=1$.

Ví dụ 6. Cho các số thực dương a, b, c sao cho $\begin{cases} 0 < a \leq b \leq c, c \geq 9 \\ a + \frac{b}{4} + \frac{9}{c} \leq 3 \\ \frac{b}{4} + \frac{9}{c} \leq 2 \end{cases}$.. Chứng minh: $\sqrt{a} + \sqrt{b} \leq \sqrt{c}$

Lời giải

Ta có: $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{9} = 1\left(\sqrt{a} + \sqrt{\frac{b}{4}} + \sqrt{\frac{9}{c}}\right) + \left(\sqrt{\frac{b}{4}} + \sqrt{\frac{9}{c}}\right) + (\sqrt{c} - 2)\sqrt{\frac{9}{c}}$
 $\leq 3\left(\sqrt{\frac{a + \frac{b}{4} + \frac{9}{c}}{3}}\right) + 2\sqrt{\frac{\frac{b}{4} + \frac{9}{c}}{2}} + (\sqrt{c} - 2)\sqrt{\frac{9}{2}} = 3 + 2 + \sqrt{c} - 2 = 3 + \sqrt{c}$.

Ví dụ 7. Cho các số thực a, b, c sao cho $\begin{cases} a \geq b \geq 1 \geq c > 0 \\ \frac{2}{b} + c \leq 2 \\ \frac{3}{a} + \frac{2}{b} + c \leq 3 \end{cases}$. Chứng minh: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{c} \leq -\frac{1}{6}$.

Lời giải

Ta cần chứng minh: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + 1 \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{c}$. Ta có:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{c} &= \frac{1}{a}\left(\frac{a}{3} + \frac{b}{2} + \frac{1}{c}\right) + \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right)\left(\frac{b}{2} + \frac{1}{c}\right) + \left(1 - \frac{1}{b}\right)\frac{1}{c} \\ &= \frac{1}{a}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{c}\right) + \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right)\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{c}\right) + \left(1 - \frac{1}{b}\right)\frac{1}{c} \end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy- Schwarz. Ta có: $\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{\frac{3}{a} + \frac{2}{b} + c} \geq 3, \frac{1}{2} + \frac{1}{c} \geq \frac{4}{\frac{2}{b} + c} \geq 2$, ta

có

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{c} \geq \frac{3}{a} + 2\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right) + \left(1 - \frac{1}{b}\right) = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + 1.$$

Ví dụ 8. Giả sử a, b, c là các số thực dương thỏa mãn
$$\begin{cases} a \leq b \leq 3 \leq c \\ c \geq b+1 \\ a+b \geq c \end{cases}$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của: $Q = \frac{2ab + a + b + c(ab-1)}{(a+1)(b+1)(c+1)}$.

(Trích Đề thi vào lớp 10 Trường chuyên KHTN-ĐHQG Hà Nội)

Lời giải

Ta có: $Q = \frac{(abc + ab + ac + a) + (abc + bc + ba + b) - (abc + ca + cb + c)}{(a+1)(b+1)(c+1)} = \frac{a}{a+1} + \frac{b}{b+1} - \frac{c}{c+1}$ Ta chứng

minh: $\frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b} - \frac{c}{1+c} \geq \frac{1}{1+1} + \frac{2}{1+2} - \frac{3}{1+3} = \frac{5}{12} \Leftrightarrow \frac{3-c}{3(1+c)} + \frac{b-2}{3(b+1)} + \frac{a-1}{2(1+a)} \geq 0$ Hay

$(3-c)\left(\frac{1}{4(c+1)} - \frac{1}{3(b+1)}\right) + (3+c+b-2)\left(\frac{1}{3(b+1)} - \frac{1}{2(a+1)}\right) + (3-c+b-2+a-1)\frac{1}{2(1+a)} \geq 0$. Rút

gọn ta thu được: $(3-c)\frac{(3b-4c-1)}{12(b+1)(c+1)} + (b+1-c)\frac{(2a-3b-1)}{6(b+1)(a+1)} + (a+b-c)\frac{1}{2(a+1)} \geq 0$.

Điều này là hiển nhiên đúng.

Chủ đề 7: MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP GIẢI PHƯƠNG TRÌNH NGHIỆM NGUYÊN

I. DỰA VÀO TÍNH CHIA HẾT ĐƯA VỀ BÀI TOÁN ƯỚC CỦA MỘT SỐ NGUYÊN.

Ví dụ 1. Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $3x + 17y = 159$.

Lời giải

Giả sử tồn tại các số nguyên x, y thỏa mãn điều kiện:

Để thấy: $3x \div 3; 159 \div 3 \Rightarrow 17y \div 3 \Rightarrow y \div 3 \Rightarrow y = 3k (k \in \mathbb{Z})$ thay vào ta tìm được $x = 53 - 17k$.

Suy ra nghiệm của phương trình là: $\begin{cases} x = 53 - 17k \\ y = 3k \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$.

Ví dụ 2. Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $xy - x - y = 2$

Lời giải

Biến đổi phương trình thành: $x(y-1) - y = 2 \Leftrightarrow (x-1)(y-1) = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 = \pm 3 \\ x-1 = \pm 1 \end{cases}$.

Từ đó dễ tìm được các nghiệm là: $(x; y) = (4; 2), (2; 4), (0; -2), (-2; 0) \dots$

Ví dụ 3. Tìm các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn điều kiện: $(x+2)^2(y-2) + xy^2 + 26 = 0 \dots$

Lời giải

Đặt $z = y - 2$, phương trình đã cho trở thành:

$(x+2)^2 z + (z+2)^2 x + 26 = 0 \Leftrightarrow (x+z+8)(xz+4) = 6$ từ đó suy ra $x+z+8 \in U(6)$. Giải các trường hợp ra thu được cặp số (x, y) thỏa mãn điều kiện là:
 $(x; y) = (1; -1), (-3; 3), (-10; 3), (1; -8)$.

Ví dụ 4: Tìm các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn điều kiện: $x(x+1)(x+7)(x+8) = y^2$.

Lời giải

Ta viết lại phương trình: $(x^2 + 8x)(x^2 + 8x + 7) = y^2$.

Đặt: $z = x^2 + 8x$ thì phương trình có dạng:

$$z(z+7) = y^2 \Leftrightarrow 4z^2 + 28z = 4y^2 \Leftrightarrow (2z+7)^2 - 4y^2 = 49 \Leftrightarrow (2z+2y+7)(2z-2y+7) = 49.$$

Nhận xét: y là một nghiệm thì $-y$ cũng là nghiệm nên ta chỉ cần xét $y \geq 0$ (*)

Khi đó ta thấy: $2z+2y+7 \geq 2z-2y+7$ nên suy ra: $2z+2y+7 \in \{-1; 7; 49\}$ tương ứng với 3 giá trị của $2z+2y+7$ ta có: $2z+2y+7 \in \{-49; 7; 1\}$.

Giải các trường hợp chú ý nhận xét (*) ta suy ra phương trình có nghiệm là:

$$(0; 0), (-1; 0), (1; 12), (1; -12), (-9; 12), (-9; -12), (-8; 0), (-7; 0), (-4; 12), (-4; -12).$$

Ví dụ 5: Tìm các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn điều kiện: $(x+y+1)(xy+x+y) = 5+2(x+y)$
(Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 trường THPT chuyên KHTN – ĐHQG Hà Nội, 2014)

Lời giải

Ta viết lại phương trình: $(x+y+1)(xy+x+y) = 2(x+y+1)+3 \Leftrightarrow (x+y+1)(xy+x+y-2) = 3$.

$\Rightarrow x+y+1$ là ước của 3

$$+ \text{Giải} \begin{cases} x+y+1=1 \\ xy+x+y-2=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ xy=5 \end{cases} \text{ (Vô nghiệm)}$$

$$+ \text{Giải} \begin{cases} x+y+1=-1 \\ xy+x+y-2=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=-2 \\ xy=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=-1 \end{cases}$$

$$+ \text{Giải} \begin{cases} x+y+1=1 \\ xy+x+y-2=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=2 \\ xy=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$$

$$+ \text{Giải} \begin{cases} x+y+1=-3 \\ xy+x+y-2=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=-4 \\ xy=5 \end{cases} \text{ (vô nghiệm)}$$

Vậy: $(x; y) = (1; -1), (1; 1)$

Ví dụ 6: Tìm các cặp số nguyên x, y thỏa mãn điều kiện: $4x^2 + 8xy + 3y^2 + 2x + y + 2 = 0$
(Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 chuyên toán tin Amsterdam, 2018)

Lời giải

Ta viết lại phương trình:

$$4x^2 + 2x(4y+1) + 3y^2 + y + 2 = 0 \Leftrightarrow 4x^2 + 2.2x \cdot \left(\frac{4y+1}{2}\right) + \left(\frac{4y+1}{2}\right)^2 + 3y^2 + y + 2 - \frac{16y^2 + 8y + 1}{4} = 0.$$

$$\text{Hay: } \left(2x + \frac{4y+1}{2}\right)^2 - \frac{4y^2 + 4y + 1}{4} = -2$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{4x+4y+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{2y+1}{2}\right)^2 = -2 \Leftrightarrow (2x+y)(2x+3y+1) = -2$$

Ta có các trường hợp xảy ra:

$$\text{TH1: } \begin{cases} 2x+y=1 \\ 2x+3y+1=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y=1 \\ 2x+3y=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-2 \\ x=\frac{3}{2} \end{cases} \text{ (loại)}$$

$$\text{TH2: } \begin{cases} 2x+y=-1 \\ 2x+3y+1=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y=-1 \\ 2x+3y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1 \\ x=-1 \end{cases} \text{ (thỏa mãn)}$$

$$\text{TH3: } \begin{cases} 2x+y=-2 \\ 2x+3y+1=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y=-2 \\ 2x+3y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{1}{2} \\ x=-\frac{3}{4} \end{cases} \text{ (loại)}$$

$$\text{TH4: } \begin{cases} 2x+y=2 \\ 2x+3y+1=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y=2 \\ 2x+3y=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-\frac{1}{2} \\ x=-\frac{1}{4} \end{cases} \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $(x; y) = (-1; 1)$.

Ví dụ 7: Tìm các cặp số nguyên x, y thỏa mãn điều kiện: $x^3 - y^3 = 91$

Lời giải

Ta viết lại phương trình: $(x-y)(x^2 + xy + y^2) = 91 = 13.7$

Vì $(13, 7) = 1$ và $x^2 + xy + y^2 > 0$ suy ra các khả năng có thể xảy ra là:

$$\begin{cases} x-y=7 \\ x^2 + xy + y^2 = 13 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x-y=13 \\ x^2 + xy + y^2 = 7 \end{cases}$$

Ta tìm được nghiệm: $(x; y) = (6; 5), (-5; -6), (4; -3), (3; -4)$.

II. BIỂU THỊ MỘT ẨN THEO ẨN CÒN LẠI RỒI DÙNG TÍNH CHẤT CHIA HẾT

Ví dụ 1. Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $xy - x - y = 2$.

Lời giải

Ta viết lại phương trình thành: $x = \frac{y+2}{y-1} = 1 + \frac{3}{y-1}$.

Để x là số nguyên thì 3 chia hết cho $y-1 \Rightarrow y-1 = \pm 3; y-1 = \pm 1$ từ đó ta tìm được các cặp nghiệm tương ứng là: $(x; y) = (4; 2), (2; 4), (0; -2), (-2; 0)$.

Ví dụ 2. Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $x^3 - xy + 1 = 2y - x$.

Lời giải

Ta viết lại phương trình: $x^3 + x + 1 = y(x+2)$, để ý rằng $x = -2$ không phải là nghiệm của phương trình nên suy ra $y = \frac{x^3 + x + 1}{x+2} \Leftrightarrow y = \frac{x^2(x+2) - 2x(x+2) + 5(x+2) - 9}{x+2}$ hay

$y = x^2 - 2x + 5 - \frac{9}{x+2}$, để $x, y \in \mathbb{Z} \Rightarrow x+2 \in U(9)$. Từ đó ta tìm được các nghiệm của phương trình là: $(x; y) = (-11; 149), (7; 39), (-5; 43), (-3; 29), (-1; -1), (1; 1)$.

Ví dụ 3. Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $x^3 - y^3 = xy + 8$ (*)

Lời giải

Sử dụng hằng đẳng thức: $a^3 - b^3 = (a-b)^3 + 3ab(a-b)$ ta có: (*) tương đương với $(x-y)^3 + 3xy(x-y) = xy + 8$. Đặt $x-y = a, xy = b$ với $a, b \in \mathbb{Z}$ phương trình trở thành:

$$a^3 + 3ab = b + 8 \Leftrightarrow a^3 - 8 = -b(3a-1) \Rightarrow a^3 - 8 : 3a-1$$

Suy ra $27(a^3 - 8) : 3a-1 \Leftrightarrow 27a^3 - 1 - 215 : 3a-1$. Do $27a^3 - 1 = (3a-1)(9a^2 + 6a + 1) : 3a-1$, suy ra điều kiện cần là: $215 : 3a-1$, chú ý rằng $215 = 43 \cdot 5$. Từ đó ta tìm được $a = 2, b = 0$ suy ra các cặp nghiệm của phương trình là: $(x; y) = (0; -2), (2; 0)$.

Chú ý: Với các phương trình đưa được về ẩn $x-y; xy$ hoặc $x+y; xy$ ta dùng phép đặt ẩn phụ để chuyển thành bài toán chia hết.

Ví dụ 4. Tìm các số nguyên dương x, y, z thỏa mãn: $x^2 - 2 = (xy + 2).z$.

Lời giải:

Từ giả thiết ta suy ra $x^2 - 2 : xy + 2$ hay $y(x^2 - 2) : xy + 2$. Ta có phân tích sau:

$$y(x^2 - 2) = x(xy + 2) - 2(x + y) \text{ suy ra } 2(x + y) : xy + 2 \text{ hay } 2(x + y) = k(xy + 2) \text{ với } k \in \mathbb{N}^*.$$

*Nếu $k \geq 2$ thì $2(x + y) = k(xy + 2) \geq 2(xy + 2) \Leftrightarrow x + y \geq xy + 2 \Leftrightarrow (x-1)(y-1) + 1 \leq 0$.

Điều này vô lí do $x, y \geq 1$. Vậy $k = 1 \Leftrightarrow 2(x + y) = xy + 2 \Leftrightarrow (x-2)(y-2) = 2$. Từ đó tìm được $(x; y) = (3; 4), (4; 3)$.

Ví dụ 5. Tìm các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn điều kiện: $(x+2)^2(y-2) + xy^2 + 26 = 0$.

Lời giải

Đặt $z = y - 2$, phương trình đã cho trở thành:

$(x+2)^2 z + (z+2)^2 x + 26 = 0 \Leftrightarrow (x+z+8)(xz+4) = 6$ từ đó suy ra $x+z+8 \in U(6)$. Giải các trường hợp ta thu được cặp số $(x; y)$ thỏa mãn điều kiện là:

$$(x; y) = (1; -1); (-3; 3); (-10; 3); (1; -8).$$

III. PHƯƠNG PHÁP XÉT SỐ DƯ KẾT HỢP TÍNH CHẤT CỦA SỐ NGUYÊN TỐ, SỐ CHÍNH PHƯƠNG

Để giải quyết tốt các bài toán theo dạng xét số dư ta cần lưu ý đến các tính chất:

$$+ am + bm = c \Rightarrow c : m$$

$$+ (a; b) = d \Rightarrow \begin{cases} a = md \\ b = nd \\ (m; n) = 1 \end{cases}$$

$$+ (a; b) = 1 \text{ thì } : (a^2 + ab + b^2; a) = (b^2; a) = (a^2 + ab + b^2; b) = (a^2; b) = (a^2 + ab + b^2; a^2 + b^2) = 1, \dots$$

+ Số chính phương không tận cùng bằng 2, 3, 7, 8.

+ Số chính phương chia hết cho số nguyên tố p thì chia hết cho p^2 .

+ Số chính phương chia cho 3 dư 0 hoặc 1.

+ Số chính phương chia cho 4 dư 0 hoặc 1.

+ Số chính phương chia cho 8 dư 0 hoặc 1 hoặc 4.

Ta xét các ví dụ sau:

Ví dụ 1. Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $9x + 2 = y^2 + y$.

Lời giải

Ta viết lại phương trình thành: $9x + 2 = y(y+1)$

Ta thấy vế trái chia 3 dư 2 nên $y(y+1)$ chia 3 dư 2.

Từ đó suy ra $y = 3k + 1$ và $y + 1 = 3k + 2$ thay vào ta tìm được $x = k(k+1)$

Vậy nghiệm của phương trình là:

$$\begin{cases} x = k(k+1) \\ y = 3k+1 \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

Ví dụ 2. Tìm các số nguyên dương $(x; y)$ thỏa mãn: $x^3 - y^3 = 95(x^2 + y^2)$.

(Trích Đề tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán ĐHSP Hà Nội, năm 2016)

Lời giải

Đặt $d = (x, y); d \geq 1$ suy ra $x = ad; y = bd$ với $(a, b) = 1$. Từ phương trình ta có:

$$d(a-b)(a^2 + ab + b^2) = 95(a^2 + b^2). \text{ Vì } (a, b) = 1 \text{ nên } (a^2 + ab + b^2; a^2 + b^2) = (ab; a^2 + b^2) = 1$$

Suy ra $a^2 + ab + b^2 \in U(95)$. Nếu $a^2 + b^2 + ab : 5 \Rightarrow 4(a^2 + b^2 + ab) : 5 \Rightarrow (2a+b)^2 + 3b^2 : 5$. Một số chính phương chia 5 chỉ có thể dư 0; 1; 4. Suy ra $a, b : 5$ điều này trái với giả thiết $(a, b) = 1$.

Vậy $a^2 + ab + b^2 = 19$, do $a > b > 0 \Rightarrow b = 2; a = 3$ là cặp số duy nhất thỏa mãn: Từ đó tính được cặp nghiệm của phương trình là: $(x; y) = (195; 130)$.

Ví dụ 3

Tìm các số nguyên tố x, y thỏa mãn điều kiện: $(x^2 + 2)^2 = 2y^4 + 11y^2 + x^2y^2 + 9$

Lời giải

Ta viết lại giả thiết thành:

$$(x^2 + 2)^2 = (y^2 + 3)^2 + (y^4 + x^2 y^2 + 5y^2) \Leftrightarrow (x^2 + 2)^2 - (y^2 + 3)^2 = y^2(x^2 + y^2 + 5)$$

Hay $(x^2 + y^2 + 5)(x^2 - 2y^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2y^2 = 1 \Leftrightarrow (x-1)(x+1) = 2y^2$.

Suy ra $(x-1)(x+1):2$ hay $x-1$ hoặc $x+1$ chia hết cho 2. Mặt khác ta có: $x+1-(x-1)=2:2$ nên cả 2 số $x+1, x-1$ đều chia hết cho 2. Do đó $(x-1)(x+1):4 \Rightarrow y^2:2$, mà y là số nguyên tố nên $y:2 \Rightarrow y=2$. Thay vào ta tìm được $x=3$.

Ví dụ 4

Tìm các số nguyên dương x, y thỏa mãn: $x^3 - y^3 = 13(x^2 + y^2)$.

Lời giải

Đặt $(x, y) = d \geq 1$ suy ra $x = ad, y = bd$ với $a > b, (a, b) = 1$ thay vào phương trình ta có:

$$a^3 d^3 - b^3 d^3 = 13(a^2 d^2 + b^2 d^2) \Leftrightarrow d(a-b)(a^2 + ab + b^2) = 13(a^2 + b^2) \Rightarrow 13(a^2 + b^2):(a^2 + ab + b^2)$$

Ta lại có: $(a^2 + b^2, a^2 + ab + b^2) = (a^2 + b^2, ab) = 1$.

Thật vậy giả sử $(a^2 + b^2, ab) = d_1 \Rightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 : d_1 \\ ab : d_1 \end{cases}$ giả sử $a:d \Rightarrow b:d_1$

Mà $(a, b) = 1 \Rightarrow d_1 = 1$. Như vậy ta có: $a^2 + b^2$ không chia hết cho $a^2 + ab + b^2$

Suy ra $13:a^2 + ab + b^2 \Rightarrow a^2 + ab + b^2 = 13 \Rightarrow a = 3, b = 1 \Rightarrow x = 15, y = 5$

Ví dụ 5

Tìm tất cả các cặp số tự nhiên x, y thỏa mãn phương trình: $\frac{16x^4 + y^4 + 14y^2 + 49}{(x^2 + y^2 + 7)^2} = \frac{16}{17}$.

Lời giải

Đặt $x^2 = a, y^2 = b$ ta viết lại phương trình thành $\frac{16a^2 + b^2 + 14b^2 + 49}{(a + b + 7)^2} = \frac{16}{17}$

Hay $\frac{16a^2 + b^2 + 14b^2 + 49}{(a + b + 7)^2} = \frac{16}{17} \Leftrightarrow 16(a + b + 7)^2 = 17.16a^2 + 17(b + 7)^2$ hay

$$256a^2 - 32(b + 7) + (b + 7)^2 = 0 \Leftrightarrow (16a - b - 7)^2 = 0 \Leftrightarrow 16a - b - 7 = 0$$

hay $16x^2 - y^2 = 7$

Tức là $(4x - y)(4x + y) = 7$ do x, y là số tự nhiên nên ta suy ra $\begin{cases} 4x - y = 1 \\ 4x + y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases}$

Ví dụ 6

Phương trình Pitago: Giải phương trình nghiệm nguyên: $x^2 + y^2 = z^2$ (*)

Lời giải

Đặt $(x, y, z) = d$ khi đó phương trình trở thành $\left(\frac{x}{d}\right)^2 + \left(\frac{y}{d}\right)^2 = \left(\frac{z}{d}\right)^2 \Leftrightarrow x_1^2 + y_1^2 = z_1^2$.

Suy ra ta chỉ cần giải phương trình (*) trong trường hợp $(x, y, z) = 1$.

Trong 3 số x, y, z có ít nhất một số chẵn. Nếu z chẵn thì x, y cùng lẻ, khi đó

$x^2 + y^2 \equiv 2 \pmod{4}$ nhưng $z^2 : 4$ nên trường hợp này không thể xảy ra. Suy ra x hoặc y là số

chẵn. Ta giả sử x lẻ, y chẵn. Ta có: $x^2 = z^2 - y^2 = (z - y)(z + y)$ vì $(z - y, z + y) = (2z, z + y) = 1$

suy ra $z - y, z + y$ đều là số chính phương lẻ. Suy ra tồn tại 2 số nguyên dương lẻ a, b sao cho

$$\begin{cases} z + y = a^2 \\ z - y = b^2 \\ x = ab \\ a > b, (a, b) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = ab \\ y = \frac{a^2 - b^2}{2} \\ z = \frac{a^2 + b^2}{2} \end{cases}$$

Vậy nghiệm của phương trình (*) là: $(x; y; z) = \left(abc; \left(\frac{a^2 - b^2}{2} \right).c; \left(\frac{a^2 + b^2}{2} \right).c \right)$ với a, b là các số

nguyên dương lẻ, $a > b$ và c là số nguyên dương bất kì.

Ta cũng có thể viết nghiệm tổng quát của (*) theo cách:

$$(x; y; z) = (2abc; (a^2 - b^2).c; (a^2 + b^2).c)$$

Dùng điều kiện có nghiệm có phương trình bậc 2

Ví dụ 1

Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $x^2 + xy + y^2 = x + y$.

Lời giải

Ta viết lại phương trình thành: $x^2 + x(y - 1) + y^2 - y = 0$

Coi đây là phương trình bậc 2 của x điều kiện của phương trình có nghiệm là:

$$\Delta = -3y^2 + 2y + 1 \geq 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{3} \leq y \leq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ y = 1 \end{cases} \text{ thay vào ta tìm được các cặp nghiệm của phương trình là } (x; y) = (0; 0), (0; 1), (1; 0)$$

Ví dụ 2

Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn phương trình: $x^3 = 4y^3 + x^2y + y + 13$

Lời giải

Đặt $x = 2y + d$ với $d \in \mathbb{Z}$ thay vào phương trình ta có:

$$(2y + d)^3 = 4y^3 + [(2y + d)^2 + 1]y + 13 \Leftrightarrow 8dy^2 + (5d^2 - 1)y + d^3 - 13 = 0 \quad (*)$$

Nếu $d = 0$ thì $y = -13, x = -26$.

Nếu $d \neq 0$ ta coi (*) là phương trình bậc 2 của y . Điều kiện để phương trình có nghiệm là:

$$\Delta = (5d^2 - 1)^2 - 32d(d^3 - 13) \geq 0 \Leftrightarrow 7d^4 + 10d^2 - 416d - 1 \leq 0$$

Nếu $d \leq -1$ thì $7d^4 + 10d^2 - 416d - 1 > 0$ (không thỏa mãn)

Nếu $d \geq 4$ thì $7d^4 + 10d^2 - 416d - 1 > 7.64d + 10d^2 - 416d - 1 > 0$ (không thỏa mãn)

Xét $d \in \{0; 1; 2; 3\}$ thử trực tiếp ta có $d = 1$ thỏa mãn: Khi đó $x = 3; y = 1$.

Vậy phương trình có 2 nghiệm: $(x; y) = (3; 1), (-26; -13)$.

Ví dụ 3

Tìm nghiệm nguyên của phương trình $x^2 - 2y(x - y) = 2(x + 1)$.

(Tuyển sinh vào lớp 10 chuyên Vĩnh Phúc, 2018).

Lời giải

$$\text{Ta có: } x^2 - 2y(x - y) = 2(x + 1) \Leftrightarrow x^2 - 2(y + 1)x + 2(y^2 - 1) = 0 \quad (1).$$

Để phương trình (1) có nghiệm nguyên x thì Δ' theo y phải là số chính phương.

$$\text{Ta có } \Delta' = y^2 + 2y + 1 - 2y^2 + 2 = -y^2 + 2y + 3 = 4 - (y - 1)^2 \leq 4..$$

Δ' chính phương nên $\Delta' \in \{0; 1; 4\}..$

+ Nếu $\Delta' = 4 \Rightarrow (y-1)^2 = 0 \Leftrightarrow y = 1$ thay vào phương trình (1), ta có

$$x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow x(x-4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}.$$

+ Nếu $\Delta' = 1 \Rightarrow (y-1)^2 = 3 \Leftrightarrow y \notin \mathbb{Z}$.

$$+ \text{ Nếu } \Delta' = 0 \Rightarrow (y-1)^2 = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 \\ y = -1 \end{cases}.$$

+ Với $y = 3$, thay vào phương trình (1) ta có:

$$x^2 - 8x + 16 = 0 \Leftrightarrow (x-4)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 4.$$

+ Với $y = -1$, thay vào phương trình (1) ta có $x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Vậy phương trình có 4 nghiệm nguyên: $(x; y) = (0; 1), (4; 1), (4; 3), (0; -1)$.

IV. PHƯƠNG PHÁP DÙNG BẤT ĐẲNG THỨC

Ví dụ 1

Tìm 3 số nguyên dương sao cho tổng của chúng bằng tích của chúng.

Lời giải

Cách 1: Gọi 3 số cần tìm là x, y, z theo giả thiết ta có: $x + y + z = xyz$ với $x, y, z \in \mathbb{Z}^+$.

$$\text{Giả sử 3 số cần tìm thỏa mãn: } 1 \leq x \leq y \leq z \Rightarrow xyz = x + y + z \leq 3z \Leftrightarrow xy \leq 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}$$

$$\text{Hoặc } \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

Từ đó tìm được các số nguyên dương thỏa mãn là: $(x; y; z) = (1; 2; 3)$ và các hoán vị của nó.

Cách 2: Gọi 3 số cần tìm là x, y, z theo giả thiết ta có: $x + y + z = xyz$ với $x, y, z \in \mathbb{Z}^+$.

Chia cho xyz ta có: $\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} = 1$. Giả sử $1 \leq x \leq y \leq z$ suy ra:

$$\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} = 1 \leq \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow x^2 \leq 3 \Leftrightarrow x = 1 \text{ từ đó ta thu được kết quả như trên.}$$

Ví dụ 3

Tìm 3 số nguyên dương sao cho tích của chúng gấp đôi tổng của chúng.

Lời giải:

Cách 1: Gọi 3 số cần tìm là x, y, z theo giả thiết ta có: $2(x + y + z) = xyz$ với $x, y, z \in \mathbb{Z}^+$

$$\text{Giả sử } x \leq y \leq z \Rightarrow xyz = 2(x + y + z) \leq 2.3z = 6z \Leftrightarrow xy \leq 6 \Leftrightarrow \begin{cases} xy = 1 \\ xy = 2 \\ xy = 3 \\ xy = 4 \\ xy = 5 \\ xy = 6 \end{cases}$$

Từ đó ta tìm được các cặp nghiệm $(x, y) \Rightarrow z$

Cách 2: Gọi 3 số cần tìm là x, y, z theo giả thiết ta có: $2(x + y + z) = xyz$ với $x, y, z \in \mathbb{Z}^+$

$$\text{Suy ra } \frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} = \frac{1}{2}.$$

Giả sử $1 \leq x \leq y \leq z$ suy ra $\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} = \frac{1}{2} \leq \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow x^2 \leq 6 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=2 \end{cases}$

Ví dụ 3

Tìm các cặp nghiệm số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $x^2 - xy + y^2 = x^2 y^2 - 5$.

(Đề tuyển sinh vào lớp 10 Trường THPT chuyên KHTN – ĐHQG Hà Nội, 2015).

Lời giải

Để thấy với $x=0$ hoặc $y=0$ không thỏa mãn.

Xét $|x|, |y| \geq 1$ do vai trò như nhau, giả sử $|x| \geq |y|$

Khi đó ta có $x^2 - xy + y^2 \leq 3x^2 \Rightarrow y^2 \leq 8 \Rightarrow y \in \{\pm 1; \pm 2\}$

+ Nếu $y=1 \Rightarrow x^2 + x + 6 = x^2 \Rightarrow x=6$.

+ Nếu $y=-1 \Rightarrow x^2 + x + 6 = x^2 \Rightarrow x=-6$.

+ Nếu $y=2 \Rightarrow x^2 - 2x + 4 = 4x^2 - 5 \Rightarrow x \notin \mathbb{Z}$ loại.

+ Nếu $y=-2 \Rightarrow x^2 + 2x + 4 = 4x^2 - 5 \Rightarrow x \notin \mathbb{Z}$ loại.

Đáp số: $(x; y) = (6; 1), (-6; -1), (1; 6), (-1; -6)$.

V. DÙNG TÍNH CHẤT CỦA SỐ CHÍNH PHƯƠNG , HOẶC TẠO RA BÌNH PHƯƠNG ĐÚNG, HOẶC TẠO THÀNH CÁC SỐ CHÍNH PHƯƠNG LIÊN TIẾP

Số chính phương là bình phương của một số tự nhiên;

+ Số chính phương không tận cùng bằng 2, 3, 7, 8

+ Số chính phương chia hết cho số nguyên tố p thì chia hết cho p^2 ;

+ Số chính phương chia cho 3 dư 0 hoặc 1

+ Số chính phương chia cho 4 dư 0 hoặc 1

+ Số chính phương chia cho 8 có số dư là 0 hoặc 1, hoặc 4.

Ví dụ 1: Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $2x^2 + 4x = 19 - 3y^2$.

Lời giải

Ta viết lại phương trình thành: $2(x+1)^2 = 21 - 3y^2$.

Cách 1: Từ phương trình ta suy ra $y^2 \leq 7 \Leftrightarrow y=0; y=\pm 1; y=\pm 2$ thay vào để tìm x

Cách 2: Từ phương trình ta suy ra $21 - 3y^2$ chia hết cho 2 suy ra $3y^2$ tận cùng là số lẻ. Suy ra y^2 tận cùng là số lẻ. Suy ra $y^2=1$. Từ đó, thay vào để tìm x .

Ví dụ 2: Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình: $4x^2 + 4x + y^2 - 6y = 24$.

Lời giải

Ta viết lại phương trình thành: $(2x+1)^2 + (y-3)^2 = 34 = 1^2 + 33 = 2^2 + 30 = 3^2 + 5^2 = 5^2 + 3^2$, từ đó ta dễ dàng tìm được các cặp số $(x; y)$ thỏa mãn điều kiện là: $(1; 8); (2; 6)$

Ví dụ 3: Tìm tất cả các số nguyên dương x, y, z thỏa mãn $x + y - z = 2$ và $3x^2 + 2y^2 - z^2 = 13$.

(Đề tuyển sinh Chuyên Tin Amsterdam, 2017)

Lời giải

Từ điều kiện $x + y - z = 2$ suy ra $z = x + y - 2$ thay vào điều kiện ban đầu ta có:

$$3x^2 + 2y^2 - (x + y - 2)^2 = 13. \text{ Hay } 2x^2 + y^2 - 2xy - 4x + 4y - 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow y^2 - 2y(x - 2) + 2x^2 - 4x - 9 = 0 \Leftrightarrow y^2 - 2y(x - 2) + (x - 2)^2 + 2x^2 - 4x - 9 - (x - 2)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (y - x + 2)^2 + x^2 = 13 = 4 + 9, \text{ suy ra } x^2 = 4 \text{ hoặc } x^2 = 9 \Leftrightarrow x = 2 \text{ hoặc } x = 3.$$

Nếu $x = 2$ suy ra $y = 3 \Rightarrow z = 3$, nếu $x = 3$ suy ra $(y + 1)^2 = 4 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow z = 2$.

Vậy có hai bộ 3 số (x, y, z) thỏa mãn điều kiện là $(2; 3; 3)$ hoặc $(3; 1; 2)$.

Ví dụ 4: Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $x^4 - y^4 = 3y^2 + 1$.

Lời giải

$$\text{Ta có } x^4 = y^4 + 3y^2 + 1 \geq y^4 + 2y^2 + 1 = (y^2 + 1)^2$$

$$x^4 = y^4 + 3y^2 + 1 < y^4 + 4y^2 + 4 = (y^2 + 2)^2$$

$$\text{Suy ra } (y^2 + 1)^2 \leq x^4 < (y^2 + 2)^2 \Leftrightarrow (y^2 + 1)^2 = x^4 \Leftrightarrow x^2 = y^2 + 1$$

Từ đó tìm được các nghiệm là: $(1; 0); (-1; 0)$.

Ví dụ 5: Tìm tất cả các số nguyên x, y thỏa mãn điều kiện: $x^2(x + y) = y^2(x - y)^2$.

(Trích Đề tuyển sinh vào lớp 10 Trường THPT chuyên KHTN – ĐHQG Hà Nội, 2016)

Lời giải

Ta thấy $x = y = 0$ là một nghiệm của phương trình.

$$\text{Với } x, y \neq 0 \text{ giả sử } (x, y) = d \Rightarrow \begin{cases} x = md \\ y = nd \\ (m, n) = 1 \end{cases} \text{ thay vào phương trình ta được:}$$

$$m^2 d^2 (md + nd) = (md - nd)^2 n^2 d^2 \Leftrightarrow m^2 (m + n) = n^2 d (m - n)^2 \Rightarrow m^2 (m + n) : n^2$$

$$\text{Do } (m, n) = 1 \Rightarrow \begin{cases} (m^2, n^2) = 1 \\ (m + n, n^2) = 1 \end{cases} \Rightarrow n^2 = 1 \Rightarrow n = \pm 1.$$

Nếu $n = 1 \Rightarrow m^2 (m + 1) : (m - 1)^2 \Rightarrow m + 1 : (m - 1)^2 \Rightarrow m + 1 : m - 1 \Rightarrow m \in \{3; 2; 0; -1\}$ từ đó tìm được các cặp nghiệm $(x, y) = (27; 9), (24; 12)$.

Nếu $n = -1 \Rightarrow m^2 (m - 1) = d (m + 1)^2 \Rightarrow m - 1 : m + 1 \Rightarrow m \in \{-3; -2; 0; 1\}$, kiểm tra không có giá trị nào thỏa mãn.

VI. PHƯƠNG TRÌNH BẬC 3 VỚI HAI ẨN

Ta cần kết hợp khéo léo đánh giá và đặt ẩn phụ để làm đơn giản cấu trúc phương trình.

Ví dụ 1: Tìm các nghiệm nguyên của phương trình: $x^3 + x^2 + x + 1 = y^3$.

Lời giải

Ta thấy: $x^2 + x + 1 > 0 \Rightarrow y^2 > x^3 \Rightarrow y > x$

Trường hợp 1: $y = x + 1$ thay vào phương trình ta có: $2x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \end{cases}$

Suy ra các nghiệm của phương trình: $(x; y) = (0; 1), (-1; 0)$

Trường hợp 2: $y > x + 1$ ta có $y^3 > (x + 1)^3 \Rightarrow x^3 + x^2 + x + 1 > (x + 1)^3 \Leftrightarrow 2x^2 + 2x < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 0$ suy ra phương trình vô nghiệm.

Ví dụ 2: Tìm các nghiệm nguyên của phương trình: $x^3 - y^3 = xy + 8$.

Lời giải

Cách 1: Ta viết lại phương trình thành: $(x - y)^3 + 3xy(x - y) = xy + 8$

Đặt $\begin{cases} x - y = a \\ xy = b \end{cases} (a, b \in \mathbb{Z})$. Ta có

$$a^3 + 3ab = b + 8 \Leftrightarrow a^3 - 8 = -b(3a - 1) \Leftrightarrow a^3 - 8 : (3a - 1) \Leftrightarrow 27(a^3 - 8) : 3a - 1$$

$$\Leftrightarrow (27a^3 - 1) - 215 : 3a - 1 \Leftrightarrow 215 : 3a - 1. \text{ Mặt khác ta có } 215 = 5 \cdot 43 \text{ suy ra}$$

$3a - 1 = \pm 1; \pm 5; \pm 43; 215$. Cuối cùng ta thay các trường hợp để tìm $a, b \Rightarrow x = 2; y = 0$ hoặc $x = 0; y = -2$.

Cách 2: Tạo ra phương trình bậc 2 để dùng điều kiện Δ . Ta cần triệt tiêu y^3 .

Đặt $x = y + a$ thì phương trình trở thành:

$$(a)^3 + 3(a + y)ya = (a + y)y + 8 \Leftrightarrow (3a - 1)y^2 + (3a^2 - a)y + a^3 - 8 = 0$$

Phương trình có nghiệm khi

$$(3a^2 - a)^2 - 4(3a - 1)(a^3 - 8) \geq 0 \Leftrightarrow (3a - 1)[a^2(3a - 1) - 4(a^3 - 8)] \geq 0. \text{ Từ đó lập bảng xét dấu}$$

VII. PHƯƠNG TRÌNH BẬC 4 VỚI HAI ẨN

Cách 1: Phân tích đa thức thành nhân tử để tạo ra $f(x; y).g(x; y) = A$ sau đó lập bảng giá trị hoặc quy về giải hệ phương trình.

Cách 2: Tạo phương trình bậc 2 và đánh giá theo Δ .

Ví dụ 1: Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $x^4 - 4x^2 + y^2 + 2x^2y - 9 = 0$.

Lời giải

Cách 1: Ta viết lại phương trình thành: $(x^2 + y)^2 - 4x^2 = 9 \Leftrightarrow (x^2 + y - 2x)(x^2 + y + 2x) = 9$

Từ đó quy về các trường hợp theo ước số của 9.

Cách 2: Viết lại phương trình thành: $y^2 + 2x^2y + x^4 - 4x^2 - 9 = 0$. Đây là phương trình bậc 2 ẩn y . Ta có $\Delta' = 9 + 4x^2$ là số chính phương. Dựa vào các chữ số tận cùng để suy ra điều kiện.

Ví dụ 2: Tìm các số nguyên x để $x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 3$ là một số chính phương.

Lời giải

Cách 1: Đặt $x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 3 = y^2 \Leftrightarrow (x^2 + x)^2 + x^2 + x + 3 = y^2$. Đặt $a = x^2 + x$.

Ta chứng minh: $a^2 < y^2 < (a+2)^2 \Rightarrow y^2 = (a+1)^2$

Cách 2: $x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 3 = y^2 \Leftrightarrow (2x^2 + 2x + 1)^2 + 11 = 4y^2$

$\Leftrightarrow (2x^2 + 2x + 1 - 2y)(2x^2 + 2x + 1 + 2y) = -11$. Từ đó quy về giải các hệ phương trình.

Ví dụ 3: Tìm các số nguyên thỏa mãn: $(x^2 - y^2)^2 = 10y + 9$

Lời giải

Điều kiện: $10y + 9 \geq 0 \Leftrightarrow y \geq -\frac{9}{10} \Leftrightarrow y \geq 0$.

+ Ta xét $y = 0 \Rightarrow x^4 = 9(L)$

+ Xét $y > 0 \Rightarrow (x - y)^2(x + y) = \frac{10x + 9}{x + y}$. Do x và $-x$ có vai trò như nhau nên ta chỉ cần xét $x > 0$

Ta thấy $\begin{cases} y=1 \\ x=1 \end{cases}$ đều dẫn đến vô nghiệm nên ta xét $x + y > 2$

Ta có $(x - y)^2(x + y) = \frac{10x + 9}{x + y} < \frac{10(x + y)}{x + y} = 10 \Leftrightarrow (x - y)^2(x + y)$ là các ước số của 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

Mặt khác ta có: $(x - y)^2(x + y) > 2(x - y)^2 \Rightarrow 2(x - y)^2 < 10 \Leftrightarrow (x - y)^2 < 5$. Hay $x - y = \pm 1$ hoặc $x - y = \pm 2$.

Mặt khác, $10y + 9$ là số lẻ nên $x - y = \pm 1$. Từ đó giải hệ ta tìm được $(x, y) = (3; 4), (-3; 4)$

Ví dụ 4: Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn đẳng thức $(x+1)^4 - (x-1)^4 = y^3$.

Lời giải

Phương trình tương đương với

$$[(x+1)^2 + (x-1)^2][(x+1)^2 - (x-1)^2] = y^3 \Leftrightarrow (2x^2 + 2) \cdot 4x = y^3 \Leftrightarrow 8x^3 + 8x = y^3.$$

+) Nếu $x \geq 1 \Rightarrow 8x^3 < 8x^3 + 8x < (2x+1)^3 \Leftrightarrow (2x)^3 < y^3 < (2x+1)^3$ (mâu thuẫn vì y nguyên).

+) Nếu $x \leq -1$ và $(x; y)$ là nghiệm, ta suy ra $(-x; -y)$ cũng là nghiệm, mà $-x \geq 1 \Rightarrow$ mâu thuẫn.

+) Nếu $x = 0 \Rightarrow y = 0$ (thỏa mãn).

Vậy $x = y = 0$ là nghiệm duy nhất.

Ví dụ 5: Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $x^2 - xy + y^2 = x^2 y^2 - 5$

(Đề tuyển sinh lớp 10 Trường THPT chuyên KHKH – ĐHQG Hà Nội, 2015)

Lời giải

Để thấy với $x = 0$ hoặc $y = 0$ không thỏa mãn.

Xét $|x|, |y| \geq 1$ do vai trò như nhau, giả sử $|x| \geq |y|$

Khi đó ta có $x^2 - xy + y^2 \leq 3x^2$

Suy ra $x^2 y^2 = x^2 - xy + y^2 + 5 \leq 8x^2 \Rightarrow y^2 \leq 8 \Rightarrow y \in \{\pm 1, \pm 2\}$

+ Nếu $y = 1 \Rightarrow x^2 - x + 6 = x^2 \Rightarrow x = 6$

+ Nếu $y = -1 \Rightarrow x^2 + x + 6 = x^2 \Rightarrow x = -6$

+ Nếu $y = 2 \Rightarrow x^2 - 2x + 4 = 4x^2 - 5 \Rightarrow x \notin \mathbb{Z}$ loại

+ Nếu $y = -2 \Rightarrow x^2 + 2x + 4 = 4x^2 - 5 \Rightarrow x \notin \mathbb{Z}$ loại

Đáp số: $(x; y) = (6; 1), (-6; -1), (1; 6), (-1; -6)$.

Ví dụ 6: Tìm nghiệm nguyên của phương trình $x^2 y^2 (x + y) + x + y = 3 + xy$

Lời giải

Đặt $u = x + y; v = xy$ ta có:

$uv^2 - v + u - 3 = 0$ ta phải có:

$\Delta_v = 1 - 4u(u - 3) \geq 0 \Rightarrow u \leq 3 \Rightarrow u \in \{0; 1; 2; 3\}$.

Đáp số: $(0; 3), (3; 0), (1; 1)$.

VIII. PHƯƠNG TRÌNH CHỨA MŨ

Kỹ thuật chính để giải phương trình dạng này là dựa vào tính chia hết để suy ra tính chẵn lẻ của các biến qua đó đưa về phương trình tích hoặc phương trình ước số

Ví dụ 1: Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $2^x + 3 = y^2$.

Lời giải

Nếu $x < 0$ thì vế trái là số hữu tỉ, vế phải là số nguyên nên phương trình không có nghiệm. Ta xét $x \geq 0$.

Để ý rằng nếu $(x; y)$ là một nghiệm của phương trình thì $(x; -y)$ cũng là nghiệm. Nên ta chỉ cần xét khi $x, y \geq 0$.

Nếu x lẻ thì $2^x = 2^{2k+1} = 2 \cdot 4^k$ chia 3 dư 2. Nên suy ra y^2 chia 3 dư 2. Điều này vô lý, suy ra x chẵn. Đặt $x = 2k$. Ta có $y^2 - 2^{2k} = 3 \Rightarrow (y + 2^k)(y - 2^k) = 3 \Rightarrow \begin{cases} y + 2^k = 3 \\ y - 2^k = 1 \end{cases} \Rightarrow 2 \cdot 2^k = 2 \Rightarrow k = 0 \Rightarrow x = 0, y = 2$.

Vậy phương trình có 2 nghiệm là $(0; 2)$, $(0; -2)$

Ví dụ 2: Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $2^x + 57 = y^2$.

Lời giải

Nhận xét :

Nếu $x < 0$ thì phương trình vô nghiệm.

Nếu x lẻ thì 2^x chia 3 dư 2, $2^x + 57$ chia 3 dư 2. Điều này không thể xảy ra vì số chính phương khi chia 3 chỉ có thể dư 0 hoặc 1.

Vậy x là số chẵn, xét $x \geq 0$, không mất tính tổng quát ta giả sử $y \geq 0$ đặt $x = 2k$ ta có:

$$2^x + 57 = y^2 \Rightarrow y^2 - 2^{2k} = 57 \Leftrightarrow (y - 2^k)(y + 2^k) = 1.57 = 3.19$$

$$\text{TH1: } \begin{cases} y - 2^k = 1 \\ y + 2^k = 57 \end{cases} \Rightarrow 2.2^k = 56 \text{ vô nghiệm.}$$

$$\text{TH2: } \begin{cases} y - 2^k = 3 \\ y + 2^k = 19 \end{cases} \Rightarrow 2.2^k = 16 \Rightarrow k = 3 \Rightarrow y = 11, x = 6.$$

Vậy phương trình có 2 nghiệm là $(6; 11)$, $(6; -11)$

Ví dụ 3: Tìm nghiệm tự nhiên của phương trình: $8^x - 37 = y^3$

Lời giải

Ta viết lại phương trình thành:

$$2^{3x} - y^3 = 37 \Leftrightarrow (2^x - y)(2^{2x} + 2^x \cdot y + y^2) = 1.37 \Rightarrow \begin{cases} 2^x - y = 1 \\ 2^{2x} + 2^x \cdot y + y^2 = 37 \end{cases}$$

$$\text{Thay } 2^x = y + 1 \text{ ta có: } (y+1)^2 + (y+1)y + y^2 = 37 \Leftrightarrow y^2 + y = 12 \Leftrightarrow y(y+1) = 3.4 \Rightarrow y = 3, x = 2$$

Vậy phương trình có nghiệm là $(x; y) = (3; 2)$

Ví dụ 4: Tìm nghiệm tự nhiên của phương trình $2^y = x^3 + x^2 + x + 1$

Lời giải

Ta viết lại phương trình thành: $2^y = (x^2 + 1)(x + 1)$ suy ra tồn tại các số $m, n \in \mathbb{N}$, $m \geq n$

$$\text{sao cho } \begin{cases} x^2 + 1 = 2^m \\ x + 1 = 2^n \\ m + n = y \end{cases} \text{ thay } x = 2^n - 1 \text{ ta có:}$$

$$(2^n - 1)^2 + 1 = 2^m \Leftrightarrow 2^{2n} - 2^{n+1} + 2 = 2^m \Leftrightarrow 2(2^{2n-1} - 2^n - 2^{m-1} + 1) = 0 \Leftrightarrow 2^{2n-1} - 2^n - 2^{m-1} + 1 = 0$$

Đề ý rằng: Nếu $m, n \geq 2$ thì $2^{2n-1} - 2^n - 2^{m-1} + 1 \neq 0$

Xét $n = 1 \Rightarrow m = 1 \Rightarrow x = 1, y = 2$ là một nghiệm

Xét $n = 0 \Rightarrow m = 0 \Rightarrow x = 0, y = 0$ là một nghiệm

Vậy phương trình có các nghiệm là: $(x; y) = (0; 0), (1; 2)$

Cách khác: Xét $x^2 + 1 = 2^m$, nếu $m \geq 2$ thì vế phải chia hết cho 4, suy ra x^2 chia 4 dư 3. Điều này là vô lý, vì x^2 chia 4 chỉ có thể dư 0 hoặc 1. Vậy $m < 2 \Rightarrow m = 0, m = 1$

Ví dụ 5: Tìm nghiệm tự nhiên của các phương trình

a) $3^y = x^3 + x^2 + x + 1$

b) $2^y = x^3 + 1$

c) $x^y + 1 = x^2$

d) $x^y = x^x$ (x, y phân biệt)

Lời giải

a) Ta viết lại phương trình thành: $3^y = (x^2 + 1)(x + 1) \Rightarrow x^2 + 1 = 3^m$ với $(m \leq y; m \in \mathbb{N})$

Nếu $m > 0$ thì vế phải chia hết cho 3, suy ra $x^2 + 1$ chia hết cho 3, suy ra x^2 chia 3 dư 2. Điều này không xảy ra vì x^2 chia 3 chỉ có thể dư 0 hoặc 1.

Nếu $m = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = 0$. Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $(x; y) = (0; 0)$

b) Ta viết lại phương trình thành: $(x + 1)(x^2 - x + 1) = 2^y$ suy ra

$$\begin{cases} x + 1 = 2^m \\ x^2 - x + 1 = 2^n \end{cases} \Leftrightarrow (2^m - 1)^2 - (2^m - 1) + 1 = 2^n \Leftrightarrow 2^{2m} - 2^{m+1} - 2^m - 2^n + 3 = 0$$

Để ý rằng với $m, n > 1$ thì $2^{2m} - 2^{m+1} - 2^m - 2^n$ là số chẵn, suy ra $2^{2m} - 2^{m+1} - 2^m - 2^n + 3 \neq 0$

Ta xét $m = 1 \Rightarrow n = 0 \Rightarrow x = 1$, xét $m = 0 \Rightarrow n = 0 \Rightarrow x = 0$

Vậy phương trình có các nghiệm là $(x; y) = (0; 0); (1; 1)$

c) Ta viết lại phương trình thành $x^y = (z - 1)(z + 1)$. Do x là số nguyên tố nên $z - 1, z + 1$ là các lũy thừa của x .

Đặt $z - 1 = x^m, z + 1 = x^{m+n} \Rightarrow (z + 1) - (z - 1) = x^{m+n} - x^m = 2 \Leftrightarrow x^m(x^n - 1) = 2$, suy ra x^n là ước

của 2. Suy ra $\begin{cases} x^m = 1 \\ x^n - 1 = 2 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x^m = \\ x^{m+n} - 1 = 1 \end{cases}$, tức là $x = 3, m = 0, n = 1$ hoặc $x = 2, m = 1, n = 1$.

Tóm lại phương trình có các nghiệm $(2; 3; 3), (3; 1; 2)$

d) Giả sử $1 \leq x < y$. Ta viết lại phương trình thành: $x^{y-x} = \frac{y^x}{x^x} \Rightarrow y^x : x^x$.

Đặt $y = kx, k \in \mathbb{N}, k \geq 2$. Theo đề bài ta có: $x^{kx} = (kx)^x \Leftrightarrow x^k = kx \Leftrightarrow x^{k-1} = k(*)$

Nếu $x = 1 \Rightarrow k = 1 \Rightarrow x = y$ vô lý, vậy $x \geq 2$

Ta luôn chứng minh được: $x^{k-1} \geq k$ với $k \geq 3$. Thật vậy:

Xét $k = 3$ ta có: $x^2 > 3$ luôn đúng (do $x \geq 2$), giả sử bất đẳng thức đúng với $k = m$ tức là: $x^{m-1} > m$ với mọi $m > 3$, ta chứng minh bất đẳng thức cũng đúng với $k = m + 1$.

Thật vậy: $x^m = x \cdot x^{m-1} > 2 \cdot x^{m-1} > 2m > m + 1$. Vậy (*) không có nghiệm khi $k \geq 3$.

Xét $k = 2 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow y = 4$. Vậy phương trình có các nghiệm là $(2; 4), (4; 2)$

CHỦ ĐỀ 8. MỘT SỐ BÀI TOÁN SỐ NGUYÊN TỐ, SỐ CHÍNH PHƯƠNG

KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Một số chính phương khi chia cho 3 có số dư là 0 hoặc 1
2. Một số chính phương khi chia cho 4 có số dư là 0 hoặc 1
3. Một số chính phương khi chia cho 5 có số dư là 0 hoặc 1 hoặc 4
4. Một số chính phương khi chia cho 8 có số dư là 0 hoặc 1 hoặc 4
5. Nếu một số chính phương chia hết cho một số nguyên tố p thì nó chia hết cho p^2 .
6. Với mọi số nguyên dương n ta có $S(n) \equiv n \pmod{3}$
7. Với mọi số nguyên dương n ta có $S(n) \equiv n \pmod{9}$

Chữ số tận cùng của một số chính phương

8. Một số chính phương không thể có tận cùng là một trong các chữ số 2, 3, 7, 8
9. Một số chính phương có chữ số tận cùng là 6 thì phải có chữ số hàng chục là số lẻ
10. Một số chính phương có chữ số tận cùng là 1 thì phải có chữ số hàng chục là số chẵn
11. Tích 2 số tự nhiên liên tiếp là số chính phương thì phải có một số bằng 0
12. Nếu $(a; b) = 1$, $ab = c^2$ thì a, b đều là số chính phương
13. Nếu $(x; y) = 1$ thì $(x^2 + xy + y^2; x) = (y^2; x) = (x^2 + xy + y^2) = 1$ và $(x + y; y) = 1$,
 $(x^2 + xy + y^2; x + y) = (y^2; x + y) = 1$

14.

a) Định lí Fermat nhỏ: Nếu p là số nguyên tố và a là số nguyên không chia hết cho p thì $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$

a) Nếu $a^2 + b^2 \equiv 0 \pmod{p}$ mà p là số nguyên tố có dạng $4k + 3$ thì a, b đều chia hết cho p .

Chứng minh

a) Vì a không chia hết cho p nên các số $2a, 3a, \dots, (p-1)a$ cũng không chia hết cho p . Giả sử khi chia các số $a, 2a, 3a, \dots, (p-1)a$ cho p ta được số dư lần lượt là $r_1, r_2, \dots, r_{p-1}$ thì các số $r_1, r_2, \dots, r_{p-1}$ đôi một khác nhau. Thật vậy nếu có 2 số r_i, r_j bằng nhau thì ia, ja có cùng số dư khi chia cho p nên $ia - ja \equiv 0 \pmod{p} \Leftrightarrow a(i - j) \equiv 0 \pmod{p} \Rightarrow (i - j) \equiv 0 \pmod{p}$ điều này không thể xảy ra do i, j phân biệt và $i, j < p$.

Từ đó ta có: $r_1 \cdot r_2 \cdot \dots \cdot r_{p-1} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (p-1) = (p-1)!$ nên $a \cdot 2a \cdot 3a \cdot \dots \cdot (p-1)a$ có cùng số dư với $r_1 \cdot r_2 \cdot \dots \cdot r_{p-1}$ khi chia cho p . Mà $a \cdot 2a \cdot 3a \cdot \dots \cdot (p-1)a = (p-1)! \cdot a^{p-1}$ suy ra $(p-1)! \cdot a^{p-1}$ và $(p-1)!$ có cùng số dư khi chia cho p hay a^{p-1} và 1 có cùng số dư khi chia cho p . Nói cách khác $(a^{p-1} - 1) \equiv 0 \pmod{p}$

b) Giả sử một trong hai số a, b không chia hết cho p , suy ra số còn lại không chia hết cho p . Theo định lí nhỏ Fermat: $\begin{cases} (a^{p-1} - 1) \equiv 0 \pmod{p} \\ (b^{p-1} - 1) \equiv 0 \pmod{p} \end{cases} \Rightarrow (a^{p-1} + b^{p-1} - 2) \equiv 0 \pmod{p}$, do $p = 4k + 3$ nên

$a^{4k+2} + b^{4k+2} - 2 \equiv 0 \pmod{p}$. Ta có $a^{4k+2} + b^{4k+2} = (a^2)^{2k+1} + (b^2)^{2k+1} \equiv (a^2 + b^2) \pmod{p}$ mà $a^2 + b^2$ chia hết cho p , suy

ra $2 \nmid p$, do p là số nguyên tố nên suy ra $p = 2$, trái với giả thiết $p = 4k + 3$. Vậy cả a, b đều chia hết cho 3.

15. Một số tính chất liên quan đến đồng dư

Định nghĩa: Cho a, b là các số nguyên và m là số nguyên dương. Ta nói a đồng dư với b theo modun m nếu có cùng số dư khi chia cho m .

Kí hiệu $a \equiv b \pmod{m}$. Như vậy $a \equiv b \pmod{m} \Leftrightarrow (a - b) : m$

Tính chất: Cho $a, b, c \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}^*$. Khi đó ta có:

$$+ a \equiv b \pmod{m}, b \equiv c \pmod{m} \Rightarrow a \equiv c \pmod{m}$$

$$+ a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow a + c \equiv b + c \pmod{m}$$

$$+ a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow ac \equiv bc \pmod{m}$$

$$+ a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow a^n \equiv b^n \pmod{m}, n \in \mathbb{Z}^+$$

$$+ (a + b)^n \equiv b^n \pmod{a} \Rightarrow a > 0$$

+ **Định lí Fermat:** Cho số nguyên tố p và số nguyên dương a khi đó ta có: $a^p \equiv a \pmod{p}$

. Đặc biệt: nếu $(a, p) = 1$ thì $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$

Một số ví dụ tiêu biểu

Ví dụ 1: Cho a, b, c là những số nguyên khác 0, $a \neq c$ sao cho $\frac{a}{c} = \frac{a^2 + b^2}{c^2 + b^2}$. Chứng minh rằng $a^2 + b^2 + c^2$ không phải là số nguyên tố.

Lời giải

$$\text{Ta có: } \frac{a}{c} = \frac{a^2 + b^2}{c^2 + b^2}$$

$$\text{Từ } a \neq c \text{ nên } b^2 = ac..$$

$$\text{Khi đó: } a^2 + b^2 + c^2 = a^2 + ac + c^2 = a^2 + 2ac + c^2 - b^2 = (a + c)^2 - b^2 = (a + c - b)(a + c + b)$$

Để thấy $a^2 + b^2 + c^2 > 3$, vì vậy nếu $a^2 + b^2 + c^2$ là một số nguyên tố thì xảy ra bốn trường hợp sau:

- $a + c - b = 1$ và $a + c + b = a^2 + b^2 + c^2$
- $a + c + b = 1$ và $a + c - b = a^2 + b^2 + c^2$
- $a + c - b = -1$ và $a + c + b = -(a^2 + b^2 + c^2)$
- $a + c + b = -1$ và $a + c - b = -(a^2 + b^2 + c^2)$

Hai trường hợp đầu tiên ta thu được: $a^2 + b^2 + c^2 - 2(a + c) + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow (a - 1)^2 + (c - 1)^2 + b^2 = 1, \text{ do đó } a = c = 1.$$

Hai trường hợp còn lại ta thu được: $(a - 1)^2 + (c - 1)^2 = 1$, do đó $a = c = -1$

Nhưng $a = c$ nên dẫn đến mâu thuẫn.

Vậy $a^2 + b^2 + c^2$ không phải là số nguyên tố.

Nhận xét: Để chứng minh a là số nguyên tố ta phân tích $a = b.c$ sau đó suy ra một trong hai thừa số b hoặc c phải bằng 1.

Ví dụ 2:

Tìm tất cả các số nguyên dương a, b sao cho $a^4 + 4b^4$ là một số nguyên tố.

Lời giải:

Ta có: $a^4 + 4b^4 = a^4 + 4b^4 + 4a^2b^2 - 4a^2b^2 = (a^2 + 2b^2)^2 - (2ab)^2$

$$= (a^2 + 2b^2 + 2ab)(a^2 + 2b^2 - 2ab) = [(a+b)^2 + b^2][(a-b)^2 + b^2]$$

Vì $(a+b)^2 + b^2 > 1$ nên $a^4 + 4b^4$ là một số nguyên tố khi $(a-b)^2 + b^2 = 1$. Suy ra $a = b = 1$ thỏa mãn bài toán.

Ví dụ 3:

Tìm các số nguyên dương a, b, c thỏa mãn $\frac{a - b\sqrt{2018}}{b - c\sqrt{2018}}$ là số hữu tỉ và $a^2 + b^2 + c^2$ là số nguyên tố.

Lời giải:

Đặt $\frac{a - b\sqrt{2018}}{b - c\sqrt{2018}} = \frac{m}{n}$ (*) trong đó $m, n \in \mathbb{Z}, (|m|, n) = 1$. Khi đó (*) được viết như sau:

$an - bm = (bn - cm)\sqrt{2018}$. Do $\sqrt{2018}$ là số vô tỉ và các số

$$a, b, c, d, m, n \in \mathbb{Z} \Rightarrow \begin{cases} an - bm = 0 \\ bn - cm = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{m}{n} = \frac{b}{c} \Rightarrow ac = b^2. \text{ Từ đó ta có:}$$

$a^2 + b^2 + c^2 = (a+c)^2 - 2ac + b^2 = (a+c)^2 - b^2 = (a+b+c)(a-b+c)$. Do a, b, c nguyên dương nên $a+b+c > a-b+c$. Vì vậy để $a^2 + b^2 + c^2$ là số nguyên tố thì điều kiện là:

$$\begin{cases} a - b + c = 1 \\ a^2 + b^2 + c^2 = a + b + c \end{cases}. \text{ Mặt khác } a, b, c \text{ nguyên dương nên } a^2 + b^2 + c^2 \geq a + b + c$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$. Khi đó $a^2 + b^2 + c^2 = 3$ là số nguyên tố thỏa mãn điều kiện đầu bài. Vậy $a = b = c = 1$ là ba số cần tìm.

Ví dụ 4:

Cho các số nguyên dương a, b, c, d thỏa mãn điều kiện $a^2 + b^2 + ab = c^2 + d^2 + cd$. Chứng minh rằng: $a + b + c + d$ là hợp số.

Lời giải:

Ta có: $a^2 + b^2 + ab = c^2 + d^2 + cd \Leftrightarrow (a+b)^2 + cd = (c+d)^2 + ab$

$$\Leftrightarrow (a+b)^2 - (c+d)^2 = ab - cd \Leftrightarrow (a+b+c+d)(a+b-c-d) = ab - cd$$

Giả sử ngược lại $p = a + b + c + d$, là số nguyên tố

Thế thì từ $ab - cd = p(a + b - c - d)$, ta có:

$$(ab - cd): p \Rightarrow ab + c(a + b + c) \equiv 0 \pmod{p} \Rightarrow (c+a)(c+b) \equiv 0 \pmod{p}$$

Nhưng điều này vô lí vì p là số nguyên tố và $a, b, c, d > 0$ nên $0 < c+a, c+b < p$

Suy ra $(c+a, p) = 1$, vậy không thể có $(c+a)(c+b) \equiv 0 \pmod{p}$. Vậy $a + b + c + d$ là hợp số.

Ví dụ 5:

Chứng minh rằng: Nếu $p, p^2 + 2$ là số nguyên tố thì $p^3 + 2$ cũng là số nguyên tố.

Lời giải:

Khi $p = 2$ thì $p^2 + 2 = 6$ là hợp số không thỏa mãn điều kiện, suy ra $p \geq 3$.

Khi $p \geq 3$, xét 3 số liên tiếp $p-1, p, p+1$ luôn phải có một số chia hết cho 3. Nếu $p-1$ hoặc

$p+1$ chia hết cho 3 thì $(p-1)(p+1) = p^2 - 1$ chia hết cho 3 suy ra $p^2 + 2 = p^2 - 1 + 3:3$ mà $p^2 + 2 > 3$ suy ra $p^2 + 2$ phải là số nguyên tố, điều này trái giả thiết.

Vậy p phải là số chia hết cho 3, mà p là số nguyên tố nên $p = 3$.

Thử lại: $p = 3$ thỏa mãn điều kiện.

Ví dụ 6:

Chứng minh rằng : Nếu p và $p^2 + 2^p$ là số nguyên tố thì $p^3 + 2$ cũng là số nguyên tố.

Lời giải:

Ta có $p^2 + 2^n = p^2 - 1 + 2^p + 1 = (p-1)(p+1) + 2^p + 1$.

Nếu $p = 2$ thì $p^2 + 2^p = 8$ là hợp số.

Khi $p \geq 3$, xét 3 xét 3 số liên tiếp $p-1, p, p+1$ luôn phải có một số chia hết cho 3. Nếu $p-1$ hoặc $p+1$ chia hết cho 3 thì $(p-1)(p+1) = p^2 - 1$ chia hết cho 3 và $2^p + 1:3$ nên $p^2 + 2^p > 3$ mà $p^2 + 2^p > 3$ nên $p^2 + 2^p$ là hợp số, trái với giả thiết. Vậy $p:3$, do p là số nguyên tố suy ra $p = 3$. Thử lại ta thấy $p^2 + 2^p = 9 + 8 = 17, p^3 + 2 = 19$ là các số nguyên tố thỏa mãn yêu cầu đầu bài.

Ví dụ 7:

Tìm các số nguyên tố p, q sao cho $q^3 + 1: p^2$ và $p^6 - 1: q^2$.

Lời giải:

• Nếu $p = 3$ thì $q^3 + 1:9$ và $p^6 - 1 = 2^3 \cdot 7 \cdot 11:q \Rightarrow q = 2$

• Nếu $p \neq 3$ thì $q^3 + 1 = (q+1)(q^2 - q + 1)$ mà:

$(q+1, q^2 - q + 1) = (q+1, q(q+1) - 2(q+1) + 3) = (q+1, 3) = 1$ hoặc 3. Suy ra $p^2 | q+1$ hoặc $p^2 | q^2 - q + 1$ suy ra $p < q$.

TH1: $q = p+1$ ta có: $p = 2, q = 3$.

TH2: $q \geq p+2$ vì $q^2 | (p-1)(p+1)(p^2 + p + 1)(p^2 - p + 1)$ do

$(q, p+1) = (q, p-1) = 1, (p^2 - p + 1, p^2 + p + 1) = (p^2 + p + 1, 2p) = 1$ nên suy ra $q^2 | p^2 - p + 1$ hoặc $q^2 | p^2 + p + 1$ mà $q \geq p+2$ nên $q^2 \geq (p+2)^2 > p^2 + p + 1 > p^2 - p + 1$

nên q^2 không thể là ước của $p^6 - 1$.

Tóm lại $(p; q) = (2; 3), (3; 2)$

Ví dụ 8:

Cho ba số tự nhiên a, b, c thỏa mãn điều kiện : $a - b$ là số nguyên tố và $3c^2 = ab + c(a + b)$.

Chứng minh: $8c + 1$ là số chính phương.

Lời giải:

Ta viết lại giả thiết: $4c^2 = c^2 + ab + bc + ca = (c + a)(c + b)$.

Đặt $(a + c, b + c) = d \Rightarrow a + c - (b + c):d \Rightarrow a - b:d$. Vì $a - b$ là số nguyên tố nên $d = a - b$ hoặc $d = 1$.

+) Nếu $d = 1$ thì $a + c, b + c$ là hai số nguyên tố cùng nhau suy ra $a + c, b + c$ là hai số chính phương. Đặt $a + c = m^2, b + c = n^2$ với $m, n \in \mathbb{Z}$. Khi đó $m^2 - n^2 = a - b$ là số nguyên tố hay $(m - n)(m + n)$ là số nguyên tố $\Rightarrow m - n = 1 \Rightarrow m = n + 1$ nên

$4c^2 = m^2 \cdot n^2 \Rightarrow 2c = m \cdot n \Rightarrow 8c + 1 = 4mn + 1 = 4n(n + 1) + 1 = (2n + 1)^2$.

+) Nếu $d = a - b$ thì $a + c = (a - b)x, b + c = (a - b)y$ với $x, y \in \mathbb{Z}$. Khi đó
 $a - b = (a + c) - (b + c) = (a - b)x - (a - b)y = (a - b)(x - y) \Rightarrow x - y = 1 \Rightarrow x = y + 1$. Khi đó
 $4c^2 = (a + c)(b + c) = (a - b)^2 xy = (a - b)^2 y(y + 1)$ suy ra $y(y + 1)$ là số chính phương nên
 $y(y + 1) = 0 \Rightarrow c = 0 \Rightarrow 8c + 1$ là số chính phương.

Chú ý: Tích hai số tự nhiên liên tiếp là số chính phương khi và chỉ khi tích đó bằng 0.

Ví dụ 9:

Tìm số tự nhiên x, y sao cho $p^x = y^4 + 4$ biết p là số nguyên tố.

Lời giải:

Để thấy $x = 0$ không thỏa mãn. Suy ra x là số nguyên dương.

Ta có: $y^4 + 4 = p^x \Leftrightarrow (y^2 - 2y + 2)(y^2 + 2y + 2) = p^x$ hay $\begin{cases} y^2 - 2y + 2 = p^n \\ y^2 + 2y + 2 = p^m \end{cases} (*)$

với $m, n \in \mathbb{N}, m \leq n, n + m = x$

• Nếu $m = 0$ thì $y = 1$ suy ra $p = 5, x = 1$.

• Nếu $n = 0$ thì $y = -1$ không thỏa mãn điều kiện bài toán.

• Ta xét $m, n \geq 1$. Từ (*) ta suy ra p là ước của $\begin{cases} y^2 - 2y + 2: p \\ y^2 + 2y + 2: p \end{cases} \Rightarrow 4y: p$

Nếu $4: p \Rightarrow p = 2$, nếu $y: p$ suy ra $2: p \Rightarrow p = 2$. Tóm lại mọi trường hợp đều có $p = 2$.

Thay vào phương trình ban đầu ta được: $y^4 + 4 = 2^x$

+ Nếu $x = 2$ thì $y = 0$.

+ Nếu $x \geq 3$ thì $2^x:8$ còn $y^4 + 4$ chia cho 8 dư 5 hoặc 4 nên không tồn tại x, y .

Tóm lại cặp số x, y thỏa mãn yêu cầu đầu bài là $(x; y)(1; 1), (2; 0)$.

Ví dụ 10:

Với p là số nguyên tố, đặt $n = 2^{2^{p-2}} + 2^{2^{p-4}} + \dots + 2^4 + 2^2 + 1$. Tìm các số nguyên tố p sao cho $2^n - 2$ không chia hết cho n .

Lời giải:

Ta có $n = 2^{2^{p-2}} + 2^{2^{p-4}} + \dots + 2^4 + 2^2 + 1$

Để thấy n là số lẻ và $n = 2^{2^{p-2}} + 2^{2^{p-4}} + \dots + 2^4 + 2^2 + 1 = \frac{2^{2^p} - 1}{3} = \frac{4^p - 1}{3}$.

Nếu $p = 2$ thì $n = 2 + 2^2$ khi đó $n = 2^5 - 2 = 30:5$ chia hết cho n (không thỏa mãn)

Nếu $p = 3$ thì $n = 2^4 + 2^2 + 1 = 21$ khi đó n không chia hết cho 21. Vậy $p = 3$ (thỏa mãn).

Xét p là số nguyên tố lẻ lớn hơn 3. Thì n là số tự nhiên lẻ, không chia hết cho 3.

Ta thấy rằng: $n = \frac{4^p - 1}{3} \Rightarrow n - 1 = \frac{4^p - 4}{3}$.

Theo định lý Fermat nhỏ thì $4^p - 4:3$ và $4^p - 4:3$ mà $(p, 3) = 1$ suy ra $4^p - 4:3p$

nên $n - 1 = \frac{4^p - 4}{3}:p$ mặt khác ta cũng dễ thấy $n - 1:2$ nên $n - 1:2p$ dẫn tới $2^{n-1} - 1:2^{2p} - 1$

Suy ra $2^{n-1} - 1:n$ (do $2^{2^{p-1}} = 3n$).

Vậy $p = 3$ là giá trị cần tìm.

Ví dụ 11:

Tìm số nguyên tố p sao cho $\frac{p^2+1}{2}, \frac{p+1}{2}$ là số chính phương.

Lời giải:

$$\text{Đặt } \frac{p+1}{2} = x^2, \frac{p^2+1}{2} = y^2 \Rightarrow \begin{cases} p+1 = 2x^2 \\ p^2+1 = 2y^2 \end{cases}. \text{ Từ giả thiết } p+1 = 2x^2 \text{ suy ra } p \neq 3. \\ x < y < p$$

Ta có $2x^2, 2y^2$ có cùng số dư khi chia cho p mà p là số lẻ suy ra x^2, y^2 có cùng số dư khi chia cho p hay x, y có cùng số dư khi chia cho p .

Mà $x^2 - y^2 = (x-y)(x+y): p \Rightarrow x+y = p$ (do $x < y < p$). Từ đó ta có:

$$p^2 + 1 = 2(p-x)^2 = 2p^2 - 4px + 2x^2 = 2p^2 - 4px + p + 1 \Rightarrow 4px = p^2 + p \Leftrightarrow 4x = p + 1$$

$$\text{Suy ra: } 2x^2 = 4x \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p=-1 \\ p=7 \end{cases}, \text{ do } p \text{ là số nguyên tố nên } p=7$$

Ví dụ 12:

Tìm các số nguyên dương x, y, z thỏa mãn $\frac{x-\sqrt{3}y}{y-\sqrt{3}z}$ là số hữu tỉ và $x^2 + y^2 + z^2$ là số nguyên tố.

Lời giải:

Từ giả thiết ta suy ra tồn tại các số nguyên $p, q \neq 0$ sao cho $\frac{x-\sqrt{3}y}{y-\sqrt{3}z} = \frac{p}{q}$, đẳng thức trên tương đương với $(pz - qy)\sqrt{3} = py - qx$, nếu $pz - qy \neq 0$ thì điều này không thể xảy ra suy ra $pz - qy = 0$ dẫn đến $py - qx = 0$ hay $y^2 = zx$

$$\text{Ta có: } x^2 + y^2 + z^2 = x^2 + xz + z^2 = (x+z)^2 - xz = (x+z)^2 - xz = (x+z)^2 - y^2 = (x+y+z)(x+z-y).$$

Do $x^2 + y^2 + z^2$ là số nguyên tố suy ra $\begin{cases} x+z-y=1 \\ x^2+y^2+z^2 = x+y+z \end{cases}$, do x, y, z là số nguyên dương nên $x^2 + y^2 + z^2 \geq x+y+z$, dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 1$.

Ví dụ 13: Tìm tất cả các số nguyên dương lẻ n sao cho tồn tại các số nguyên tố p, q, r thỏa mãn: $p^n + q^n = r^2$.

Lời giải

Ta xét $n=1$. Dễ thấy bộ số $p=2, q=7, r=3$ thỏa mãn điều kiện.

Ta xét $n \geq 2$. Ta thấy trong ba số p, q, r phải có 1 số chẵn.

Nếu $r=2$ thì $p^n + q^n = 4$ không có số p, q thỏa mãn.

Nếu $p > q = 2$ ta có: $p^n + 2^n = r^2$.

$$\text{Vì } n \text{ là số lẻ, } \Rightarrow n \geq 3 \Rightarrow p^n + 2^n = r^2 \Leftrightarrow (p+2)(p^{n-1} - 2p^{n-2} + 2^2 p^{n-3} + \dots + 2^{n-1}) = r^2.$$

Vì $p+2 > 1, p^{n-1} - 2p^{n-2} + 2^2 p^{n-3} + \dots + 2^{n-1} > 1, p$ là số nguyên tố nên

$$\begin{cases} p+2 = r \\ p^{n-1} - 2p^{n-2} + 2^2 p^{n-3} + \dots + 2^{n-1} = r \end{cases} \Rightarrow p^n + 2^n = (p+2)^2, \text{ điều này không thể xảy ra, vì}$$

$$p^n + 2^n \geq p^3 + 8 \text{ mà } p^3 + 8 - (p^2 + 4p + 4) = p^3 - p^2 - 4p + 4 = p^2(p-3) + 2p^2 - 4p + 4 > 0$$

Ví dụ 14: Cho p là số nguyên tố sao cho $x^3 + y^3 - 3xy = p - 1$ có nghiệm nguyên dương. Tìm giá trị lớn nhất của p .

Lời giải

Ta viết lại phương trình thành:

$$x^3 + y^3 - 3xy + 1 = p \Leftrightarrow (x+y)^3 - 3xy(x+y) - 3xy + 1 = p \Leftrightarrow (x+y+1)[(x+y)^2 - (x+y) + 1 - 3xy] = p$$

Do $x, y > 0$ nên $x+y+1 > 1$, p là số nguyên tố nên suy ra

$$\begin{cases} x+y+1 = p \\ (x+y)^2 - (x+y) + 1 - 3xy = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+1 = p \\ (x+y)^2 - (x+y) = 3xy \end{cases}, \text{ để ý rằng, với mọi } x, y \text{ ta}$$

luôn có: $4xy \leq (x+y)^2$ suy ra

$$(x+y)^2 - (x+y) \leq \frac{3}{4}(x+y)^2 \Leftrightarrow (x+y)^2 - 4(x+y) \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq x+y \leq 4.$$

Lại có: $x+y = p-1 \Rightarrow p-1 \leq 4 \Leftrightarrow p \leq 5$. Vậy giá trị lớn nhất của p là 5.

Khi đó $x = y = 2$.

Ví dụ 15: Tìm bộ số nguyên dương (m, n) sao cho $p = m^2 + n^2$ là số nguyên tố và $m^3 + n^3 - 4$ chia hết cho p .

Lời giải

$$\text{Vì } x^3 + y^3 - 4 : x^2 + y^2 \Rightarrow (x+y)(x^2 + y^2) - xy(x+y) - 4 : x^2 + y^2 \Rightarrow xy(x+y) + 4 : x^2 + y^2$$

$$\text{Từ đó ta cũng suy ra: } x^3 + y^3 - 4 + 3[xy(x+y) + 4] : x^2 + y^2 \Leftrightarrow (x+y)^3 + 8 : x^2 + y^2$$

$\Leftrightarrow (x+y+2)(x^2 + y^2 + 2xy - 2x - 2y + 4) : x^2 + y^2$ là số nguyên tố ta suy ra có hai trường hợp.

TH1:

$$x+y+2 : x^2 + y^2 \Leftrightarrow a+b+6 : a^2 + b^2 + 2(a+b) + 8 \Rightarrow a+b+6 \geq a^2 + b^2 + 2(a+b) + 8$$

$$\Leftrightarrow 0 \geq a^2 + b^2 + 2(a+b) + 2. \text{ Nhận thấy } x=y=1 \text{ thỏa mãn điều kiện, } x=2, y=1$$

thỏa mãn điều kiện. Ta xét $x, y \geq 2$ đặt $x = a+2, y = b+2$ với $a, b \geq 0$ ta có:

$$x+y+2 : x^2 + y^2 \Leftrightarrow a+b+6 : a^2 + b^2 + 2(a+b) + 8 \Rightarrow a+b+6 \geq a^2 + b^2 + 2(a+b) + 8$$

$$\Leftrightarrow 0 \geq a^2 + b^2 + 2(a+b) + 2, \text{ điều này là vô lý.}$$

TH2: $x^2 + y^2 + 2xy - 2x - 2y + 4 : x^2 + y^2 \Leftrightarrow 2xy - 2x - 2y + 4 : x^2 + y^2$, do $x, y > 1$ suy ra

$$2xy - 2x - 2y + 4 < 2xy - 2 - 2 + 4 = 2xy \leq x^2 + y^2 \text{ nên}$$

$$2xy - 2x - 2y + 4 : x^2 + y^2 \Leftrightarrow 2xy - 2x - 2y + 4 = 0 \Leftrightarrow xy - x - y + 2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(y-1) = -3$$

$$2xy - 2x - 2y + 4 : x^2 + y^2 \Leftrightarrow 2xy - 2x - 2y + 4 = 0 \Leftrightarrow xy - x - y + 2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(y-1) = -3$$

điều này không thể xảy ra do $x, y > 1$.

Tóm lại $(x; y) = (1; 1), (2; 1), (1; 2)$.

Ví dụ 16: Tìm các số nguyên tố x, y thỏa mãn: $(x^2 + 2)^2 = 2y^4 + 11y^2 + x^2y^2 + 9$.

Lời giải

Ta viết lại giả thiết thành:

$$(x^2 + 2)^2 = (y^2 + 3)^2 + (y^4 + x^2y^2 + 5y^2) \Leftrightarrow (x^2 + 2)^2 - (y^2 + 3)^2 = y^2(x^2 + y^2 + 5) \text{ hay}$$

$$(x^2 + y^2 + 5)(x^2 - 2y^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2y^2 = 1 \Leftrightarrow (x-1)(x+1) = 2y^2. \text{ Suy ra}$$

$(x-1)(x+1):2$ hay $x-1$ hoặc $x+1$ chia hết cho 2. Mặt khác ta có:

$x+1-(x-1)=2:2$ nên cả 2 số $x+1, x-1$ đều chia hết cho 2. Do đó

$(x-1)(x+1):4 \Rightarrow y^2:2$ mà y là số nguyên tố nên $y:2 \Rightarrow y=2$. Thay vào ta tìm được $x=3$.

Ví dụ 17: Giả sử n là số tự nhiên lớn hơn 1 sao cho $8n+1$ và $24n+1$ là số chính phương. Chứng minh rằng $8n+3$ là hợp số.

Lời giải

Giả sử $\begin{cases} 8n+1 = x^2 \\ 24n+1 = y^2 \end{cases}$ với x, y là các số nguyên dương.

Khi đó $8n+3 = 4x^2 - y^2 = (2x+y)(2x-y)$. Do $2x+y > 2x-y$. Vì vậy nếu $8n+3$ là số nguyên tố thì điều kiện là $2x-y=1 \Rightarrow y=2x-1$ khi đó

$$24n+1 = (2x-1)^2 \Leftrightarrow x^2 = x+6n \Rightarrow 8n+1 = x+6n \Leftrightarrow x=2n+1 \Rightarrow 8n+1 = (2n+1)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} n=0 \\ n=1 \end{cases}$$

Điều này mâu thuẫn với điều kiện n là số nguyên dương lớn hơn 1. Vậy $8n+3$ là hợp số.

Ví dụ 18: Chứng minh rằng nếu số nguyên n lớn hơn 1 thỏa mãn n^2+4 và n^2+16 là các số nguyên tố thì n chia hết cho 5.

Lời giải

Ta có với mọi số nguyên m thì m^2 chia cho 5 dư 0; 1 hoặc 4.

Nếu n^2 chia cho 5 dư 1 thì $n^2 = 5k+1 \Rightarrow n^2+4 = 5k+5 = 5(k+1)$ nên n^2+4 không là số nguyên tố.

Nếu n^2 chia cho 5 dư 4 thì $n^2 = 5k+4 \Rightarrow n^2+16 = 5k+20 = 5(k+4)$ nên n^2+16 không là số nguyên tố.

Vậy $n^2:5$ hay n chia hết cho 5.

Ví dụ 19: Tìm các số nguyên tố p, q sao cho $p^3 - q^5 = (p+q)^2$.

Lời giải

Ta xét cả 2 số p, q đều khác 3. Khi đó p, q khi chia cho 3 có số dư là 1 hoặc 2.

Nếu p và q có cùng số dư khi chia cho 3 thì $p^3 - q^5$ chia hết cho 3. Còn $p + q$ không chia hết cho 3.

Nếu p và q không có cùng số dư khi chia cho 3 thì vế phải chia hết cho 3 còn vế trái không chia hết cho 3.

Xét $p = 3$ khi đó $q^5 < 27$ nên không tồn tại q .

Xét $q = 3$ thì $p^3 - 243 = (p + 3)^2 \Rightarrow p = 7$. Vậy $(p; q) = (7; 3)$.

Ví dụ 20: Tìm các số nguyên tố p, q sao cho $q^3 + 1 \vdots p^2$ và $p^6 - 1 \vdots q^2$.

Lời giải

Nếu $p = 3$ thì $q^3 + 1 \vdots 9$ và $p^6 - 1 = 2^3 \cdot 7 \cdot 11 \vdots q \Rightarrow q = 2$.

Nếu $p \neq 3$ thì $q^3 + 1 = (q + 1)(q^2 - q + 1)$ mà

$(q + 1, q^2 - q + 1) = (q + 1, q(q + 1) - 2(q + 1) + 3) = (q + 1, 3) = 1$ hoặc 3 suy ra $p^2 \mid q + 1$ hoặc $p^2 \mid q^2 - q + 1$ suy ra $p < q$

TH1: $q = p + 1$ ta có: $p = 2, q = 3$

TH 2: $q \geq p + 2$ vì $q^2 \mid (p - 1)(p + 1)(p^2 + p + 1)(p^2 - p + 1)$ nên suy ra $q^2 \mid p^2 - p + 1$ hoặc $q^2 \mid p^2 + p + 1$ mà $q \geq p + 2$ nên $q^2 \geq (p + 2)^2 > p^2 + p + 1 > p^2 - p + 1$ nên q^2 là không thể là ước của $p^6 - 1$.

Tóm lại $(p; q) = (2; 3), (3; 2)$.

Ví dụ 21: Giả sử a, b là các số tự nhiên sao cho $p = \frac{b}{4} \sqrt{\frac{2a-b}{2a+b}}$ là số nguyên tố. Tìm giá trị lớn nhất của p .

Lời giải

Từ giả thiết suy ra b chẵn, ta đặt $b = 2c$ thì $p = \frac{c}{2} \sqrt{\frac{a-c}{b-c}} \Leftrightarrow \frac{4p^2}{c^2} = \frac{a-c}{a+c}$, đặt $\frac{2p}{c} = \frac{m}{n}$ với

$$(m, n) = 1 \text{ và } k = (a - c, a + c) \Rightarrow \begin{cases} a - c = km^2 \\ a + c = kn^2 \end{cases} \Rightarrow 2c = k(n^2 - m^2) \text{ và } 4pn = km(n^2 - m^2).$$

Nếu m, n cùng lẻ thì $4pn = km(n^2 - m^2) \vdots 8 \Rightarrow p$ chẵn, tức là $p = 2$.

Nếu m, n không cùng lẻ thì m chia 4 dư 2. (do $2p$ không là số chẵn không chia hết cho 4 và $\frac{2p}{c}$ là phân số tối giản). Khi đó n là số lẻ nên $n^2 - m^2$ là số lẻ nên không chia hết cho 4 suy ra k là số chia hết cho 2. Đặt $k = 2r$ ta có $2pn = rm(n^2 - m^2)$ mà $(n^2 - m^2, n) = 1 \Rightarrow r \vdots n$ đặt $r = ns$ ta có $2p = s(n - m)(n + m)$ do $n - m, n + m$ đều là các số lẻ nên $m + n = p, n - m = 1$, suy ra $s, m \leq 2$ và $(m; n) = (1; 2)$ hoặc $(2; 3)$. Trong cả hai trường hợp đều suy ra $p \leq 5$. Với $p = 5$ thì $m = 2, n = 3, s = 1, r = 3, k = 6, c = 15, b = 30, a = 39$.

Ví dụ 22: Cho p là số nguyên tố lớn hơn 3. Chứng minh rằng:

- a) $(p-1)(p+1)$ chia hết cho 24. b) $p^4 - 1$ chia hết cho 48.

Lời giải

- a) p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên p là số lẻ, $p = 2k + 1$ với $k \in \mathbb{N}, k > 1$. Ta có:
 $p + 1 = 2k + 2 \Rightarrow (p-1)(p+1) = 4k(k+1) : 8$, mặt khác xét 3 số liên tiếp $p-1, p, p+1$ luôn tồn tại một số chia hết cho 3, số đó không phải là p nên suy ra $p-1$ hoặc $p+1$ chia hết cho 3. Vậy $(p-1)(p+1)$ chia hết cho 3. Vì $(3, 8) = 1$ nên $(p-1)(p+1) : 24$.
 b) Ta có $p^4 - 1 = (p^2 - 1)(p^2 + 1) = (p-1)(p+1)(p^2 + 1)$ theo câu a) là $(p-1)(p+1) : 24$, $p^2 + 1$ là số chẵn nên $p^2 + 1 : 2$ suy ra $p^4 - 1$ chia hết cho 48.

Ví dụ 23: Cho p là số nguyên tố. Tìm tất cả các số nguyên k sao cho $\sqrt{k^2 - pk}$ là số nguyên dương

Lời giải

Khi $p = 2$ ta có: $\sqrt{k^2 - pk} = \sqrt{k^2 - 2k} = \sqrt{(k-1)^2 - 1}$ do $(k-1)^2 - 1$ không thể là số chính phương lớn hơn 0.

Khi $p \geq 3$ ta xét hai trường hợp.

+ Nếu k chia hết cho số nguyên tố p thì ta đặt $k = np$ khi đó ta có:

$k^2 - pk = n^2 p^2 - p^2 n = p^2 n(n-1)$ do $n(n-1) > 0$ không thể là số chính phương nên trường hợp này ta loại.

+ Nếu k không chia hết cho $k = np$, tức là $(k, p) = 1$ suy ra $(k, k-p) = 1$. Do đó $k^2 - pk = k(k-p)$ là số chính phương khi và chỉ khi $k, k-p$ là số chính phương.

Tức là:

$k = m^2, k-p = n^2 \Rightarrow p = m^2 - n^2 = (m-n)(m+n)$, mà p là số nguyên tố nên ta suy ra

$$\begin{cases} m-n=1 \\ m+n=p \end{cases} \Rightarrow m = \frac{p+1}{2} \Rightarrow k = \frac{(p+1)^2}{4}. \text{ Thử lại ta thấy thỏa mãn.}$$

Vậy $k = \frac{(p+1)^2}{4}$ với p là số nguyên tố lẻ.

Ví dụ 24: Cho p là số nguyên tố sao cho $A = \frac{x^2 + py^2}{xy}$ là số tự nhiên. Khi đó $A = p+1$.

Lời giải

Gọi d là ước chung lớn nhất của x, y ta suy ra $\begin{cases} x = md \\ y = nd \\ (m, n) = 1 \end{cases}$.

$$\text{Ta có: } A = \frac{x^2 + py^2}{xy} = \frac{m^2 d^2 + pn^2 d^2}{mnd^2} = \frac{m^2 + pn^2}{mn} \Rightarrow m^2 + pn^2 : mn \Rightarrow \begin{cases} m^2 + pn^2 : n \\ m^2 + pn^2 : m \end{cases} \Rightarrow m^2 : n$$

Mặt khác ta có $(m, n) = 1$ suy ra $n = 1$ do đó $m^2 + p : m \Rightarrow p : m$ mà p là số nguyên tố nên $m = 1$ hoặc $m = p$.

+ Nếu $m = 1$ thì $x = y = d \Rightarrow A = p + 1$.

+ Nếu $m = p \Rightarrow c = dp, y = d$ khi đó $A = \frac{(dp)^2 + pd^2}{d^2 p} = p + 1$.

Áp dụng vào bài toán ta suy ra đpcm.

Ví dụ 25.

Cho p là số nguyên tố lớn hơn 3. Chứng minh $2017 - p^2$ chia hết cho 24. (Đề tuyển sinh Chuyên Toán Amsterdam 2017).

Lời giải:

Tính chất: Nếu p là số nguyên tố lớn 3 thì $p^2 - 1$ chia hết cho 24.

Chứng minh: $p > 3$ nên p là số lẻ dẫn đến $p^2 - 1 = (p - 1)(p + 1)$ là tích 2 số chẵn liên tiếp nên chia hết cho 8 (*).

Lại có $(p - 1)p(p + 1)$ là tích 3 số tự nhiên liên tiếp nên $(p - 1)p(p + 1)$ chia hết cho 3. Mà 3 là số nguyên tố nên trong 3 số $(p - 1), p, (p + 1)$ phải có ít nhất 1 số chia hết cho 3. Do p không chia hết cho 3 suy ra $(p - 1)(p + 1)$ chia hết cho 3 (**). Từ (*), (**) suy ra $p^2 - 1 : 24$.

Ta có: $2017 - p^2 = 2016 - (p^2 - 1) : 24$ (đpcm).

Ví dụ 26.

Cho a, b, c là các số nguyên dương. Chứng minh $a + b + 2\sqrt{ab + c^2}$ không phải là số nguyên tố. (Tuyển sinh vào lớp 10 chuyên TP Hà Nội, 2017).

Lời giải:

Đặt $p = a + b + 2\sqrt{ab + c^2}$, giả sử $a \geq b$.

Cách 1: Xét $p \notin \mathbb{Z}$ thì p không là số nguyên tố.

Xét $p \in \mathbb{Z}$: Giả sử thì p là số nguyên tố $\Rightarrow ab + c^2$ là số chính phương

$$\Rightarrow (a + b)^2 - 4(ab + c^2) = p \cdot (a + b - 2\sqrt{ab + c^2}) : p \Rightarrow (a - b + 2c)(a - b - 2c) : p.$$

$$\text{TH1: } (a - b + 2c) : p \Rightarrow a - b + 2c \geq p = a + b + 2\sqrt{ab + c^2} \Rightarrow c \geq b + \sqrt{ab + c^2} > c \text{ (loại)}$$

$$\text{TH2: } a - b - 2c : p \Rightarrow a - b - 2c = 0 \text{ hoặc } p \leq |a - b - 2c|$$

$$\text{Nếu } a - b - 2c = 0 \Rightarrow c = \frac{a - b}{2} \Rightarrow p = 2(a + b) \Rightarrow a + b = 1 \text{ (loại)}.$$

$$\text{Nếu } p \leq |a - b - 2c| \leq a + b + 2c \Rightarrow \sqrt{ab + c^2} \leq c \text{ (vô lí) (loại)}.$$

Vậy p không thể là số nguyên tố.

Cách 2: TH1: $\sqrt{ab + c^2} \notin \mathbb{Z}$ suy ra đpcm.

TH2: $\sqrt{ab+c^2} = d \notin \mathbb{Z}^+ \Rightarrow ad = (d-c)(d+c)$ với $d > c$.

$\Rightarrow \exists r, s$ sao cho $(r, s) = 1$ và $\frac{a}{d-c} = \frac{d+c}{b} = \frac{r}{s}$.

+) $as \vdots r, (r, s) = 1 \Rightarrow \exists p \in \mathbb{Z}^+, a = pr, d-c = ps$.

+) $br \vdots s, (r, s) = 1 \Rightarrow \exists q \in \mathbb{Z}^+, b = qs, d+c = qr$.

Từ đó $K = a + b + 2d = pr + qs + (ps + qr) = (p+q)(r+s)$ là hợp số.

MỘT SỐ BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN SỐ CHÍNH PHƯƠNG

Ví dụ 1.

Tìm các số nguyên dương x, y, z sao cho $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2x(z-1) + 2y(z+1)$ là số chính phương.

Lời giải:

$$\text{Đặt } x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2x(z-1) + 2y(z+1) = m^2$$

$$\text{Ta có } (x + y + z \pm 1)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2x(z \pm 1) + 2y(z \pm 1) \pm 2z + 1$$

$$\text{Từ đó suy ra } (x + y + z - 1)^2 < m^2 < (x + y + z + 1)^2 \Rightarrow m^2 = (x + y + z)^2$$

Hay $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2x(z-1) + 2y(z+1) = (x + y + z)^2 \Leftrightarrow x = y$. Vậy các số x, y, z thỏa mãn điều kiện là: (x, x, z) với x, z là các số nguyên dương.

Ví dụ 2.

Tìm các số nguyên dương x, y sao cho $x^2 + 3y$ và $y^2 + 3x$ là số chính phương.

Lời giải:

Không mất tính tổng quát ta giả sử: $x \leq y$ vì $y^2 < y^2 + 3x \leq y^2 + 3y < y^2 + 4y + 4 = (y + 2)^2$

$\Rightarrow y^2 + 3x = (y + 1)^2 \Leftrightarrow 3x = 2y + 1$. Bây giờ ta cần tìm điều kiện để:

$$x^2 + 3y = m^2 \Leftrightarrow 16x^2 + 48y = 16m^2 \Leftrightarrow 16x^2 + 24(3x - 1) = 16m^2 \Leftrightarrow (4x + 9)^2 - 16m^2 = 105 \text{ hay}$$

$(4x - 4y + 9)(4x + 4y + 9) = 1 \cdot 105 = 3 \cdot 35 = 5 \cdot 21 = 7 \cdot 15$. Giải các trường hợp trên ta thu được bộ số $(x; y)$ thỏa mãn điều kiện là $(x; y) = (1; 1), (11; 16), (16; 11)$.

Ví dụ 3.

Tìm các số nguyên m sao cho $m^4 + m^3 + 1$ là một số chính phương.

Lời giải:

$$\text{Ta có: } m^4 + m^3 + 1 = n^2 \Rightarrow 64m^4 + 64m^3 + 64 = (8n)^2$$

Nếu $m = 0$ thì rõ ràng thỏa mãn.

$$\text{Nếu } m \neq 0 \text{ và } m > -8 \text{ thì: } (8m^2 + 4m - 1)^2 + 8m + 63 = (8n)^2 \Rightarrow (8n)^2 > (8m^2 + 4m - 1)^2$$

$$\text{Do } 8m^2 + 4m - 1 \geq 0, \text{ ta có } (8n)^2 \geq (8m^2 + 4m)^2$$

$$\text{Vậy } (8m^2 + 4m - 1) + 8m + 63 \geq (8m^2 + 4m)^2. \text{ Vì thế } m^2 \leq 4 \Rightarrow m \in \{-2; -1; 1; 2\} \text{ thỏa mãn.}$$

$$\text{Nếu } m \leq -8 \text{ thì } (8m^2 + 4m - 1) + 8m + 63 = (8n)^2 \Rightarrow (8n)^2 < (8m^2 + 4m - 1)^2$$

$$\text{Do } 8m^2 + 4m - 1 \geq 0, \text{ ta có } (8n)^2 \leq (8m^2 + 4m - 2)^2$$

Vậy $(8m^2 + 4m - 1)^2 + 8m + 63 \leq (8m^2 + 4m - 2)^2$ và $4m^2 + 4m + 15 < 0$ (vô lí).

Từ đó ta tìm được các nghiệm là $m \in \{-2; -1; 0; 2\}$.

Ví dụ 4.

Chứng minh rằng: Nếu $\overline{abc}$ là số nguyên tố thì $b^2 - 4ac$ không phải là số chính phương.

Lời giải:

Giả sử $b^2 - 4ac$ là số chính phương thì $b^2 - 4ac = k^2$ với $k \in \mathbb{N}^*$. Ta có:

$$4a\overline{abc} = 400a^2 + 40ab + 4ac = 400a^2 + 40ab + b^2 - k^2 = (20a + b + k)(20a + b - k).$$

Vì $\overline{abc}$ là số nguyên tố nên $c \neq 0$ và $\Rightarrow ac > 0$. Do đó $b > k \Rightarrow 20a + b + k > 20a + b - k > 20a$.

$$\text{Suy ra } \overline{abc} = \frac{(20a + b + k)(20a + b - k)}{4a} = m.n. \text{ Mà } 20a + b + k, 20a + b - k \text{ đều lớn hơn } 4a \text{ nên}$$

$m, n > 1$ suy ra $\overline{abc}$ là hợp số, mâu thuẫn với giả thiết.

Ví dụ 5.

Tìm số nguyên dương n nhỏ nhất để $\frac{(n+1)(4n+3)}{3}$ là số chính phương.

Lời giải:

Đặt $\frac{(n+1)(4n+3)}{3} = k^2 \Leftrightarrow (n+1)(3n+1) = 3k^2$ ($k \in \mathbb{N}^*$), các số $n+1, 4n+3$ nguyên tố cùng nhau và số $4n+3$ không phải là số chính phương (số chính phương chia 4 chỉ có thể dư 0 hoặc 1 nên suy ra $\begin{cases} n+1 = a^2 \\ 4n+3 = 3b^2 \end{cases}$ với $(a, b \in \mathbb{N}^*)$). Từ đó ta có: $4a^2 - 3b^2 = 1 \Leftrightarrow (2a-1)(2a+1) = 3b^2$ do $2a-1, 2a+1$ nguyên tố cùng nhau nên ta có các khả năng xảy ra như sau:

$$\text{TH1: } \begin{cases} 2a-1 = 3x^2 \\ 2a+1 = y^2 \end{cases} \Rightarrow y^2 - 3x^2 = 2 \Rightarrow y^2 \text{ chia 3 dư 2 (loại)}$$

$$\text{TH2: } \begin{cases} 2a-1 = x^2 \\ 2a+1 = 3y^2 \end{cases} \Rightarrow 3y^2 - x^2 = 2 \quad (*).$$

+ Nếu x chẵn thì suy ra y chẵn suy ra $3y^2 - x^2$ chia hết cho 4, mà 2 không chia hết cho 4 nên điều này không thể xảy ra.

+ Nếu x lẻ thì suy ra x không chia hết cho 3. Do $n+1 = a^2, 2a-1 = x^2$ nên n nhỏ nhất khi và chỉ khi x nhỏ nhất dẫn đến n nhỏ nhất.

Xét $x = 5$ khi đó ta tính được $a = 13, n = 168, \frac{(n+1)(4n+3)}{3} = \frac{169 \cdot 657}{3} = (13 \cdot 15)^2$ thỏa mãn điều kiện. Vậy giá trị n nhỏ nhất cần tìm là 168.

Ví dụ 6.

Tìm các số nguyên tố x, y sao cho: $x^2 + 3xy + y^2$ là số chính phương.

Lời giải:

Giả sử $x^2 + 3xy + y^2 = m^2$ với m là số tự nhiên khác 0.

Ta thấy rằng: Nếu cả 2 số x, y không chia hết cho 3 thì x^2, y^2 chia 3 dư 1. Suy ra $x^2 + y^2$ chia 3 dư 2 dẫn đến m^2 chia 3 dư 2 điều này không thể xảy ra. Vì một số chính phương chia 3 chỉ có thể dư 0 hoặc 1. Từ đó suy ra trong hai số x, y phải có 1 số chia hết cho 3. Giả sử số đó là x thì $x = 3$ (do x là số nguyên tố). Thay vào ta có: $y^2 + 9y + 9 = m^2 \Leftrightarrow 4y^2 + 36y + 36 = 4m^2$ hay $(2y+9)^2 - 4m^2 = 45 \Leftrightarrow (2y+9-2m)(2y+9+2m) = 45 = 1.45 = 3.15 = 5.9$. Giải các trường hợp ta thu được cặp số $(x; y)$ thỏa mãn điều kiện là $(x; y) = (3; 7), (7; 3)$.

Ví dụ 7.

Cho 2 số tự nhiên $y > x$ thỏa mãn: $(2y-1)^2 = (2y-x)(6y+x)$. Chứng minh $2y-x$ là số chính phương.

Lời giải:

Vì $2y-1$ là số chính phương lẻ nên x là số lẻ.

Gọi $d = (2y-x, 6y+x)$ với $d \in N, d$ lẻ.

$$\text{Suy ra } \begin{cases} 2y-x:d \\ 6y+x:d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y-x+6y+x:d \\ 3(2y-x)-(6y+x):d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8y:d \\ -4x:d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y:d \\ x:d \end{cases}$$

Mặt khác cũng từ giả thiết ta suy ra $(2y-1)^2 : d^2 \Rightarrow 2y-1:d$ mà $y:d \Rightarrow d \in U(1) \Rightarrow d=1$, hay $(2y-x, 6y+x)=1$ từ đó suy ra $2y-x, 6y+x$ đều là số chính phương.

Cách ra đề bài khác:

Cho các số nguyên dương x, y thỏa mãn $y > x$ và $x^2 + 4xy - 8y^2 - 4y + 1 = 0$ Chứng minh $2y-x$ là số chính phương.

Ví dụ 8.

Cho $(x; y)$ là các số nguyên lớn hơn 1 sao cho $4x^2y^2 - 7x + 7y$ là số chính phương. Chứng minh: $x = y$.

Lời giải:

Ta có: $4x^2y^2 - 7x + 7y = (2xy-1)^2 - 7x + 7y + 4xy - 1 > (2xy-1)^2$.

$4x^2y^2 - 7x + 7y = (2xy+1)^2 - 7x + 7y - 4xy - 1 < (2xy+1)^2$. Mà $4x^2y^2 - 7x + 7y$ là số chính phương nên suy ra $4x^2y^2 - 7x + 7y = (2xy)^2 \Rightarrow x = y$.

Ví dụ 9.

Cho các số nguyên dương a, b, c thỏa mãn: $(a, b, c) = 1, ab = c(a-b)$. Chứng minh: $a-b$ là số chính phương.

Lời giải:

$$\text{Đặt } (a, b) = d \Rightarrow \begin{cases} a = nd \\ b = nd \\ (m, n) = 1 \end{cases}. \text{ Vì } (a, b, c) = 1 \Rightarrow (c, d) = 1 \text{ thay vào điều kiện ban đầu ta có:}$$

$dmn = c(m-n) = cm - cn \Rightarrow \begin{cases} cm - cn : m \\ cm - cn : n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c : m \\ c : n \end{cases} \Rightarrow m, n | c$, đặt $c = mnk$ với k nguyên dương thì ta suy ra $dmn = c(m-n) \Leftrightarrow d = k(m-n) \Rightarrow d : k$ mà $k | c \Rightarrow k = 1$ nên $d = m - n$ nên $a - b = d(m-n) = d^2$ là một số chính phương.

Ví dụ 10.

Cho x, y là số nguyên dương sao cho $x^2 + y^2 - x$ chia hết cho xy . Chứng minh: x là số chính phương.

Lời giải:

Đặt $(x, y) = d \Rightarrow \begin{cases} x = nd \\ y = nd \\ (m, n) = 1; m, n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$. Thay vào điều kiện bài toán ta có:

$$d^2 mn = xy | x^2 + y^2 - x = d(dm^2 + dn^2 - m) \Rightarrow dmn | dm^2 + dn^2 - m.$$

Từ đó suy ra $d | m$ (1).

Ta cũng có $dm^2 + dn^2 - m : m \Rightarrow dn^2 : m$ do $(m, n) = 1 \Rightarrow (m, n^2) = 1$.

Suy ra $m | d$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $d = m$ nên $x = dm = d^2$ là số chính phương.

Ví dụ 11. Tìm tất cả các số nguyên tố p sao cho tổng tất cả các ước tự nhiên của p^4 là một số chính phương.

Lời giải:

Gọi p là số nguyên tố nên p^4 chỉ có 5 ước số tự nhiên là $1, p, p^2, p^3, p^4$.

Giả sử $1 + p + p^2 + p^3 + p^4 = n^2$ với $n \in \mathbb{N}$.

Ta có: $(2n)^2 = 4n^2 = 4 + 4p + 4p^2 + 4p^3 + 4p^4$ (1)

Suy ra: $(2p^2 + p)^2 < (2n)^2 < (2p^2 + p + 2)^2$. Bất đẳng thức xảy ra nếu như

$$(2n)^2 = (2p^2 + p + 1)^2 = 4p^4 + 4p^3 + 5p^2 + 2p + 1$$
 (2)

Từ (1) và (2) suy ra $4 + 4p + 4p^2 + 4p^3 + 4p^4 = 4p^4 + 4p^3 + 5p^2 + 2p + 1$

$$\Leftrightarrow p^2 - 2p - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} p = -1 \\ p = 3 \end{cases}. \text{ Vì } p \text{ là số nguyên tố nên } p = 3.$$

Đảo lại với $p = 3$, ta có $p^4 = 81$ có các ước số tự nhiên là $1, 3, 3^2, 3^3, 3^4$ và $1 + 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 = 121 = 11^2$.

Ví dụ 12

Cho 3 số tự nhiên a, b, c thỏa mãn điều kiện $a - b$ là số nguyên tố và $3c^2 = ab + c(a + b)$. Chứng minh: $8c + 1$ là số chính phương.

Lời giải

Ta viết lại giả thiết thành $4c^2 = c^2 + ab + bc + ca = (c + a)(c + b)$.

Đặt $(a+c; b+c) = d \Rightarrow a+c-(b+d):d \Rightarrow a-b:d$. Vì $a-b$ là số nguyên tố nên $d = a-b$ hoặc $d=1$.

+ Nếu $d=1$ thì $a+c, b+c$ là hai số nguyên tố cùng nhau suy ra $a+c, b+c$ là hai số chính phương. Đặt $a+c=m^2, b+c=n^2$ với $m, n \in \mathbb{N}$. Khi đó $m^2 - n^2 = a-b$ là số nguyên tố hay $(m-n)(m+n)$ là số nguyên tố $\Rightarrow m-n=1 \Rightarrow m=n+1$ nên

$$4c^2 = m^2 \cdot n^2 \Rightarrow 2c = mn \Rightarrow 8c+1 = 4mn+1 = 4n(n+1)+1 = (2n+1)^2.$$

+ Nếu $d = a-b$ thì $a+c = (a-b)x, b+c = (a-b)y$ với $x, y \in \mathbb{Z}$. Khi đó

$$a-b = (a+c) - (b+c) = (a-b)x - (a-b)y = (a-b)(x-y) \Rightarrow x-y=1 \Rightarrow x=y+1. \text{ Khi đó}$$

$4c^2 = (a+c)(b+c) = (a-b)^2 xy = (a-b)^2 y(y+1)$ suy ra $y(y+1)$ là số chính phương nên $y(y+1)=0 \Rightarrow c=0 \Rightarrow 8c+1$ là số chính phương. (Chú ý: Tích hai số tự nhiên liên tiếp là số chính phương khi và chỉ khi tích đó bằng 0).

Ví dụ 13

Giả sử n là số tự nhiên lớn hơn 1 sao cho $8n+1$ và $24n+1$ là số chính phương. Chứng minh rằng: $8n+3$ là hợp số.

Lời giải

Giả sử $\begin{cases} 8n+1 = x^2 \\ 24n+1 = y^2 \end{cases}$ với x, y là các số nguyên dương.

Khi đó $8n+3 = 4x^2 - y^2 = (2x+y)(2x-y)$. Do đó $2x+y > 2x-y$ vì vậy nếu $8n+3$ là số nguyên tố thì điều kiện là $2x-y=1 \Rightarrow y=2x-1$ khi đó

$$24n+1 = (2x-1)^2 \Leftrightarrow x^2 = x+6n \Rightarrow 8n+1 = x+6n \Leftrightarrow x=2n+1 \Rightarrow 8n+1 = (2n+1)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} n=0 \\ n=1 \end{cases}$$

Điều này mâu thuẫn với điều kiện n là số nguyên dương lớn hơn 1. Vậy $8n+3$ là hợp số.

Ví dụ 14

Cho $n \in \mathbb{N}$ sao cho $\frac{n^2-1}{3}$ là tích của hai số tự nhiên liên tiếp. Chứng minh rằng n là tổng của hai số chính phương liên tiếp.

Lời giải

Giả sử ta có $\frac{n^2-1}{3} = a(a+1)$. Từ đó ta có: $n^2 = 3a^2 + 3a + 1 \Rightarrow 4n^2 - 1 = 12a^2 + 12a + 3$

$$\Rightarrow (2n-1)(2n+1) = 3(2a+1)^2$$

Vì $2n+1; 2n-1$ là hai số lẻ liên tiếp nên ta có các trường hợp sau:

$$\text{Trường hợp 1: } \begin{cases} 2n-1 = 3p^2 \\ 2n+1 = q^2 \end{cases}$$

Khi đó $q^2 = 3p^2 + 2$ vô lý. Vậy trường hợp này không xảy ra.

$$\text{Trường hợp 2: } \begin{cases} 2n-1 = p^2 \\ 2n+1 = 3q^2 \end{cases},$$

Từ đó p là số lẻ nên $p = 2k+1$

$$\text{Từ đó } 2n = (2k+1)^2 + 1 \Rightarrow n = k^2 + (k+1)^2 \text{ (đpcm)}$$

Ví dụ 15

Cho a, b là hai số nguyên sao cho tồn tại hai số nguyên liên tiếp c và d để $a - b = a^2c - b^2d$. Chứng minh rằng $|a - b|$ là số chính phương.

Lời giải

Vì c và d là hai số nguyên liên tiếp nên $d = c + 1$ thay vào đẳng thức $a - b = a^2c - b^2d$ ta được

$$a - b = a^2c - b^2(c + 1) \Leftrightarrow (a - b)[c(a + b) - 1] = b^2$$

Để dàng chứng minh $(a - b, c(a + b) - 1) = 1$ nên $|a - b|$ phải là số chính phương.

Ví dụ 16

Cho các số tự nhiên a, b, c sao cho $a^2 + b^2 + c^2 = (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2$. Chứng minh rằng các số ab, bc, ca và $ab + bc + ca$ đều là số chính phương.

Lời giải

Từ $a^2 + b^2 + c^2 = (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2$, suy ra $a^2 + b^2 + c^2 = 2(ab + bc + ca)$ (1)

Từ (1) $\Rightarrow (a + b + c)^2 = 4(ab + bc + ca)$

Vì $(a + b + c)^2$ và 4 là những số chính phương nên $ab + bc + ca$ phải là số chính phương.

$$(1) \Leftrightarrow (a + b - c)^2 = 4ab$$

Vì $(a + b - c)^2$ và 4 là những số chính phương nên ab là số chính phương.

$$(1) \Rightarrow (b + c - a)^2 = 4bc$$

Vì $(b + c - a)^2$ và 4 là những số chính phương nên bc là số chính phương.

$$(1) \Rightarrow (c + a - b)^2 = 4ca$$

Vì $(c + a - b)^2$ và 4 là những số chính phương nên ca là số chính phương.

Ví dụ 17

Cho $A = \underbrace{33\dots3}_n^2 + \underbrace{55\dots5}_{n-1} \underbrace{44\dots4}_n^2$. Chứng minh rằng A là số chính phương.

Lời giải

Đặt $a = \underbrace{11\dots1}_{n-1} = \frac{10^n - 1}{9}$, ta có $10^n = 9a + 1$ và $\underbrace{11\dots1}_{n-1} = \frac{a - 1}{10}$.

$$\text{Suy ra } A = (3a)^2 + \left[5 \cdot \frac{a-1}{10} \cdot (9a+1) + 4a^2 \right] = 9a^2 + \left(\frac{9a^2 - 1}{2} \right)^2 = \left(\frac{9a^2 - 1}{2} \right)^2.$$

Vì a lẻ nên $\frac{9a^2 + 1}{2}$ là số nguyên. Suy ra A là số chính phương.

Ta có thể tính cụ thể như sau:

$$\begin{aligned} \frac{9a^2 + 1}{2} &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{10^n - 1}{3} \right)^3 + 1 \right] = \frac{10^{2n} - 2 \cdot 10^n + 10}{18} = \frac{10^n(10^n - 10)}{18} + \frac{8(10^n - 1)}{18} + 1 \\ &= 5 \cdot 10^n \cdot \frac{10^{n-1} - 1}{9} + 4 \cdot \frac{10^n - 1}{9} + 1 = \underbrace{55\dots5}_{n-1} \cdot 10^n + \underbrace{44\dots4}_n + 1 = \underbrace{55\dots5}_{n-1} + \underbrace{44\dots4}_{n-1} 5. \end{aligned}$$

$$\text{Như vậy } A = \underbrace{33\dots3}_n^2 + \underbrace{55\dots5}_{n-1} \cdot 10^n + \underbrace{44\dots4}_n^2 = \underbrace{55\dots5}_{n-1} \underbrace{44\dots4}_{n-1} 5^2.$$

Ví dụ 18

Tìm tất cả các số tự nhiên n để $4n+9$ và $9n+10$ đều là số chính phương.

Lời giải

Theo giả thiết, tồn tại các số nguyên dương x, y sao cho
$$\begin{cases} 4n+9 = x^2 \\ 9n+10 = y^2 \end{cases}$$

Suy ra $9x^2 - 4y^2 = 9(4n+9) - 4(9n+10) = 41 \Leftrightarrow (3x-2y)(3x+2y) = 41$.

Vì 41 là số nguyên tố và $3x-2y < 3x+2y$ nên chỉ xảy ra
$$\begin{cases} 3x-2y = 1 \\ 3x+2y = 41 \end{cases}$$

Từ đó tìm được $x=7, y=10$. Suy ra $n=10$.

Ví dụ 19

Tìm tất cả các số tự nhiên n để $3^n + 144$ là số chính phương.

Lời giải

Giải sử $3^n + 144 = l^2$ với $l \in \mathbb{N}$. Suy ra $(l+12)(l-12) = 3^n$.

Suy ra
$$\begin{cases} l+12 = 3^a \\ l-12 = 3^b \\ a, b \in \mathbb{N}, a+b=n \end{cases}$$
 suy ra $3^a - 3^b = 24$ hay $3^{a-1} - 3^{b-1} = 8$. Vì 8 không chia hết cho 3 nên

phải có $b=1$. Suy ra $a=3$ và $n=4$.

Ví dụ 20

Tìm tất cả các số nguyên dương n để $3^n + 63$ là số chính phương.

Lời giải

Giải sử $3^n + 63 = k^2$. Nếu n lẻ thì $3^n + 63 \equiv 3 + 63 \equiv 2 \pmod{4}$. Suy ra $k^2 \equiv 2 \pmod{4}$ (loại)

Nếu n chẵn đặt $n=2m$ với $m \in \mathbb{N}$, khi đó $k^2 - 3^{2m} = 63 \Leftrightarrow (k-3^m)(k+3^m) = 7 \cdot 9$

Vì $k+3^m \equiv k-3^m \pmod{3}$ nên suy ra cả $k+3^m$ và $k-3^m$ đều chia hết cho 3.

Hơn nữa $k-3^m < k+3^m$ chỉ xảy ra khả năng
$$\begin{cases} k-3^m = 3 \\ k+3^m = 3 \cdot 7 \end{cases}$$

Từ đó tìm được $m=12$ và $m=2$. Suy ra $n=4$.

Ví dụ 21

Chứng minh rằng không thể thêm chữ số 0 vào giữa chữ số 6 và 8 trong số 1681 để thu được một số chính phương.

Lời giải

Giả sử ta có thể thêm $n(n > 0)$ vào giữa chữ số 6 và chữ số 8 trong số 1681 để thu được một số chính phương. Khi đó tồn tại số nguyên dương k sao cho: $16 \cdot 10^{n+2} + 81 = k^2 \Leftrightarrow (k-9)(k+9) = 2^{n+6} \cdot 5^{n+2}$. Suy ra $k+9$ và $k-9$ chỉ có ước nguyên tố là 2 hoặc 5. Hơn nữa k lẻ và $(k+9) - (k-9) = 18 = 2 \cdot 3^2$ nên $(k+9, k-9) = 2$. Chỉ xảy ra hai trường hợp sau:

$$\begin{cases} k-9 = 2 \cdot 5^{n+2} \\ k+9 = 2^{n+5} \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} k+9 = 2 \cdot 5^{n+2} \\ k-9 = 2^{n+5} \end{cases}$$

Trong cả hai trường hợp ta có: $|2 \cdot 5^{n+2} - 5^{n+4}| = 18 \Leftrightarrow |25 \cdot 5^n - 16 \cdot 2^n| = 9$

Điều này không xảy ra vì $25.5^n - 16.2^n > 25.2^n - 16.2^n = 9.2^n > 9$.

Ví dụ 22

Tìm tất cả các số tự nhiên n để $2^{2012} + 2^{2015} + 2^n$ là số chính phương.

Lời giải

Giả sử số tự nhiên n thỏa mãn đề bài. Khi đó tồn tại số nguyên dương k sao cho:

$$2^{2012} + 2^{2015} + 2^n = k^2 \Leftrightarrow 9.2^{2012} + 2^n = k^2 \Leftrightarrow (k + 3.2^{1006})(k - 3.2^{1006}) = 2^n$$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} k + 3.2^{1006} = 2^a \\ k - 3.2^{1006} = 2^b \\ a, b \in \mathbb{N}, a + b = n \end{cases} \text{ suy ra } 2^a - 2^b = 3.2^{1006} \text{ hay } 2^{b-1}(2^{a-b} - 1) = 3.2^{1006}.$$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} b-1=1006 \\ 2^{a-b}-1=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=1007 \\ a=1009 \end{cases} \Leftrightarrow n=2016.$$

Ví dụ 23

Tìm tất cả các cặp số tự nhiên m, n sao cho $2^m + 3^n$ là số chính phương.

Lời giải

Giả sử $2^m + 3^n = k^2, k \in \mathbb{N}$. Nếu m lẻ thì $2^m \equiv 2 \pmod{3}$. Suy ra $n=0$. Do đó

$(k+1)(k-1) = 2^m$. Ta thấy k lẻ $(k+1, k-1) = 2$ nên chỉ có thể xảy ra $k-1=2$ và $k+1=2^{m-1}$

Từ đó tìm được $k=3, m=3$.

$$\text{Nếu } m \text{ chẵn, đặt } m=2s, s \in \mathbb{N}. \text{ Ta có: } (k+2^s)(k-2^s) = 2^n. \text{ Suy ra } \begin{cases} k+2^s = 3^a \\ k-2^s = 3^b \\ a, b \in \mathbb{N}, a+b=n \end{cases}$$

Suy ra $3^a - 3^b = 2^{s+1}$. Vì 2^{s+1} không chia hết cho 3 nên phải có $b=0, a=n$. Như vậy $3^n - 1 = 2^{s+1}$

Nếu $s=0$ thì $n=1, m=0$

Nếu $s>0$ thì $3^n = 2^{s+1} + 1 \equiv 1 \pmod{4}$ nên n chẵn.

Đặt $n=2t, t \in \mathbb{N}$ khi đó $(3^t + 1)(3^t - 1) = 2^{s+1}$.

Ta thấy $(3^t + 1, 3^t - 1) = 2$ nên phải có $3^t - 1 = 2; 3^t + 1 = 2^s$

Từ đó tìm được $t=1, s=2, n=2, m=4$.

Vậy có ba cặp số thỏa mãn đề bài là $(m, n) = (0, 1); (3, 0); (4, 2)$.

Ví dụ 24

Tìm tất cả các cặp số nguyên dương (m, n) để $2^m.5^n + 25$ là số chính phương.

Lời giải

Giả sử $2^m.5^n + 25 = l^2$ với $l \in \mathbb{N}$. Suy ra $(l+5)(l-5) = 2^m.5^n$. Vì $(l+5) - (l-5) = 10 = 2.5$ nên suy ra cả hai số $l+5$ và $l-5$ cùng chia hết cho 2 và 5. Suy ra $(l+5, l-5) = 10$. Xảy ra các trường hợp sau:

$$\text{Trường hợp 1: } \begin{cases} l+5=10 \\ l-5=10.2^{m-2}.5^{n-2} \end{cases} \text{ (loại)}$$

$$\text{Trường hợp 2: } \begin{cases} l+5=10.2^{m-2} \\ l-5=10.5^{n-2} \end{cases}.$$

Suy ra $2^{m-2} = 5^{n-2} + 1$. Vì $5^{n-2} + 1 \equiv 2 \pmod{4}$ nên phải có $m=3, n=2$.

Trường hợp 3:
$$\begin{cases} l+5 = 10 \cdot 5^{n-2} \\ l-5 = 10 \cdot 2^{m-2} \end{cases}$$

Suy ra $5^{n-2} - 1 = 2^{m-2}$. Nếu $m \geq 5$ thì $5^{n-2} - 1 = 2^{m-2} : 8$. Suy ra $n-2$ chẵn, đặt $n-2 = 2k, k \in \mathbb{N}$.

Khi đó $(5^k - 1)(5^k + 1) = 2^{m-2}$.

Vì $(5^{k-1}, 5^{k+1}) = 2$ nên phải có $5^k - 1 = 2$ (loại). Với $m \leq 4$, thử trực tiếp ta thấy $m=4, n=3$ thỏa mãn.

Trường hợp 4:
$$\begin{cases} l+5 = 10 \cdot 2^{m-2} \cdot 5^{n-2} \\ l-5 = 10 \end{cases}$$

Suy ra $l=15$ và $2^{m-2} \cdot 5^{n-2} = 2$. Suy ra $m=3, n=2$.

Vậy có hai cặp số thỏa mãn đề bài là $(m, n) = (3; 2), (4; 3)$.

Ví dụ 25

Tìm các số nguyên dương x, y sao cho $x^2 + 3y$ và $y^2 + 3x$ là số chính phương.

Lời giải:

Không mất tính tổng quát ta giả sử: $x \leq y$ vì $y^2 \leq y^2 + 3x \leq y^2 + 3y < y^2 + 4y + 4 = (y+2)^2$.

$\Rightarrow y^2 + 3x = (y+1)^2 \Leftrightarrow 3x = 2y+1$. Bây giờ ta cần tìm điều kiện để:

$$x^2 + 3y = m^2 \Leftrightarrow 16x^2 + 48y = 16m^2 \Leftrightarrow 16x^2 + 24(3x-1) = 16m^2 \Leftrightarrow (4x+9)^2 - 16m^2 = 105 \text{ hay}$$

$(4x-4y+9)(4x+4y+9) = 1 \cdot 105 = 3 \cdot 35 = 5 \cdot 21 = 7 \cdot 15$. Giải các trường hợp trên ta thu được bộ số $(x; y)$ thỏa mãn điều kiện là $(x; y) = (1; 1), (11; 16), (16; 11)$.

Ví dụ 26

Cho các số nguyên a, b, c thỏa mãn $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{abc}$.

Chứng minh rằng $(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)$ là một số chính phương.

Lời giải

Từ $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{abc}$ suy ra $ab+bc+ca=1$.

Khi đó $1+a^2 = ab+bc+ca+a^2 = (a+b)(a+c)$

Tương tự, $1+b^2 = (a+b)(b+c); 1+c^2 = (a+c)(b+c)$

Như vậy, $(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2) = ((a+b)(b+c)(c+a))^2$ là một số chính phương.

Ví dụ 27

Chứng minh rằng nếu $x^2 + 2y$ là một số chính phương với $x, y \in \mathbb{Z}^+$ thì $x^2 + y$ là tổng của hai số chính phương.

Lời giải

Từ giả thiết suy ra: $x^2 + 2y = (x+y)^2$ với $t \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow 2y = t^2 + 2tx \Rightarrow t$ chẵn $\Rightarrow t = 2k, k \in \mathbb{Z}^+$.

Do đó $2y = 4k^2 + 4kx \Rightarrow y = 2k^2 + 2kx \Rightarrow x^2 + y = (x+k)^2 + k^2$ (đpcm).

Ví dụ 28

a) Chứng minh rằng: Nếu n là số tự nhiên sao cho $2n+1$ và $3n+1$ là số chính phương thì $n:40$.

b) Tìm tất cả các số tự nhiên $\overline{ab}$ để $2\overline{ab}+1, 3\overline{ab}+1$ là các số chính phương.

Lời giải

a) Ta thấy $2n+1$ là số chính phương lẻ nên $2n+1$ tận cùng bởi các chữ số 1, 5, 9 suy ra n có chữ số tận cùng là 0, 2, 4. Mặt khác $3n+1$ cũng là số chính phương nên n chỉ có thể tận cùng bởi 0. Suy ra $n \vdots 5$.

Khi n tận cùng là 0 thì $2n+1, 3n+1$ đều là số chính phương lẻ.

Suy ra $3n+1 = (2k+1)^2 \Rightarrow 3n = 4k(k+1) : 8$ hay $n : 8$ mà $(5, 8) = 1 \Rightarrow n : 40$.

b) Từ kết quả câu a suy ra $\overline{ab} = 40$ hoặc $\overline{ab} = 80$ thử lại ta thấy chỉ có $\overline{ab} = 40$ thỏa mãn điều kiện bài toán.

Ví dụ 29

a) Chứng minh: $n=1984$ là giá trị lớn nhất của n để số $4^{31} + 4^{1008} + 4^n$ là số chính phương.

b) Tìm các số nguyên dương x, y, z để: $4^x + 4^y + 4^z$ là số chính phương.

Lời giải

a) Ta xét $n > 1008$. Giả sử $4^{31} + 4^{1008} + 4^n = y^2$ với $y \in \mathbb{N}^*$. Hay $4^{30}(4 + 4^{978} + 4^{n-30}) = y^2$ do

$4^{30} = (4^{15})^2$ suy ra $4 + 4^{978} + 4^{n-30}$ là số chính phương chẵn, hay $4 + 4^{978} + 4^{n-30} = (2k+2)^2$ với $k \in \mathbb{N}^*$.

Ta có: $4 + 4^{978} + 4^{n-30} = (2k+2)^2 \Leftrightarrow 4^{977} + 4^{n-31} = k(k+1) \Leftrightarrow 4^{977}(1 + 4^{n-1008}) = k(k+1)$.

Nếu k là số chẵn thì $k+1$ là số lẻ suy ra $\begin{cases} 4^{977} = k \\ 1 + 4^{n-1008} = k+1 \end{cases} \Rightarrow 4^{977} = 4^{n-1008} \Rightarrow n = 1985$ thử lại ta thấy không thỏa mãn.

Nếu k lẻ thì $\begin{cases} 4^{977} = k+1 \\ 1 + 4^{n-1008} = k \end{cases} \Rightarrow 4^{977} = 4^{n-1008} + 2 \Rightarrow 4^{n-1008} < 4^{977} \Rightarrow n < 1985$ hay $n \leq 1984$.

Khi $n = 1984$ thì $4^{31} + 4^{1008} + 4^{1984} = 2^{62} + 2^{2016} + 2^{2968} = (2^{31} + 2^{1984})^2$ đpcm.

b) Không mất tính tổng quát ta giả sử $x \leq y \leq z$. Đặt $4^x + 4^y + 4^z = u^2$ thế thì

$$2^{2x}(1 + 4^{y-x} + 4^{z-x}) = u^2.$$

TH1: Nếu $1 + 4^{y-x} + 4^{z-x}$ là số lẻ thì

$$1 + 4^{y-x} + 4^{z-x} = (2k+1)^2 \Leftrightarrow 4^{y-x-1} + 4^{z-x-1} = k(k+1) \Leftrightarrow 4^{y-x-1}(1 + 4^{z-y}) = k(k+1).$$

+ Nếu k chẵn thì $k+1$ là số lẻ suy ra $\begin{cases} 4^{y-x-1} = k \\ 1 + 4^{z-y} = k+1 \end{cases} \Rightarrow 4^{y-x-1} = 4^{z-y} \Rightarrow z = 2y - x - 1$ và

$$4^x + 4^y + 4^z = 4^x + 4^y + 4^{2y-x-1} = (2^x + 2^{2y-x-1})^2.$$

+ Nếu k lẻ thì $k+1$ chẵn suy ra $\begin{cases} 4^{y-x-1} = k+1 \\ 1 + 4^{z-y} = k \end{cases} \Rightarrow 4^{y-x-1} - 4^{z-y} = 2 \Leftrightarrow 2^{2y-2x-3} = 2^{2x-2y-1} + 1 (*)$ do

$2x - 2y - 1$ là số lẻ luôn khác 0. Nên (*) không thể xảy ra.

TH2: Nếu $1 + 4^{y-x} + 4^{z-x}$ là số chẵn thì $y = x$ hoặc $z = x$. Từ đó ta suy ra phải có $x = y$ dẫn đến: $2 + 4^{z-x}$ là số chính phương. Điều này là vô lý vì một số chính phương chia cho 4 chỉ có thể dư 0 hoặc 1. Còn $2 + 4^{z-x}$ chia cho 4 dư 2 hoặc 3.

Tóm lại: Điều kiện để $4^x + 4^y + 4^z$ là số chính phương là: $z = 2y - x - 1$.

Áp dụng vào câu a) ta có: $n = 2 \cdot 1008 - 31 - 1 = 1984$.

Ví dụ 30

Cho số nguyên dương n và d là một ước số nguyên dương của $3n^2$. Chứng minh: $n^2 + d$ là số chính phương khi và chỉ khi $d = 3n^2$.

Lời giải

Vì d là một ước của $3n^2 \Rightarrow d.k = 3n^2$, ta có $n^2 + d = n^2 + \frac{3n^2}{k}$ là số chính phương với

$k > 0, k \in \mathbb{N}$ tức là

$\frac{n^2 k(k+3)}{k^2}$ là số chính phương suy ra $k(k+3)$ là số chính phương.

$$\text{Đặt } k(k+3) = m^2 \Rightarrow (2k+3+2m)(2k+3-2m) = 9 \Rightarrow \begin{cases} 2k+3-2m=1 \\ 2k+3+2m=9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k=1 \\ m=2 \end{cases}.$$

Ví dụ 31

Cho m, n là 2 số nguyên dương lẻ sao cho $n^2 - 1$ chia hết cho $|m^2 - n^2 + 1|$. Chứng minh rằng: $|m^2 - n^2 + 1|$ là số chính phương.

Lời giải:

Nếu $m = n$ thì ta có điều phải chứng minh:

Xét $m \neq n$ ta đặt $\begin{cases} m+n=2x \\ m-n=2y \end{cases}$ ($x, y \in \mathbb{Z}, x > 0, y \neq 0$) khi đó ta có $\begin{cases} m=x+y \\ n=x-y \end{cases}$ do $m, n > 0$

suy ra $\begin{cases} x+y > 0 \\ x-y > 0 \end{cases} \Rightarrow x > |y|$.

Do $n^2 - 1 \mid |m^2 - n^2 + 1|$ suy ra $-(m^2 - n^2 - 1) + m^2 \mid |m^2 - n^2 + 1| \Rightarrow m^2 \mid |m^2 - n^2 + 1|$. Suy ra $m^2 = k(m^2 - n^2 + 1)$ (1) (với $k \in \mathbb{Z}$).

Thay $m = x + y, n = x - y$ ta có: $(x + y)^2 = k(4xy + 1) \Leftrightarrow x^2 - 2k(2k - 1)xy + y^2 - k = 0$ (*). Phương trình (*) có 1 nghiệm là $x \in \mathbb{Z}$ nên có một nghiệm nữa là x_1 . Theo hệ thức Vi-et ta có:

$$\begin{cases} x + x_1 = 2(2k - 1) \\ xx_1 = y^2 - k \end{cases} \text{ từ đây suy ra } x_1 \in \mathbb{Z}.$$

+ Nếu $x_1 > 0 \Rightarrow (x_1; y)$ là cặp nghiệm thỏa mãn (*) suy ra

$$x_1 > |y| \Rightarrow y^2 - k = xx_1 > |y|^2 = y^2 \Rightarrow k < 0 \Rightarrow x_1 + x = 2(2k - 1) < 0 \text{ mâu thuẫn.}$$

+ Nếu $x_1 < 0$ thì $xx_1 = y^2 - k < 0 \Rightarrow k > y^2 \Rightarrow k > 0 \Rightarrow 4xy + 1 > 0 \Rightarrow y > 0$. Ta có:

$$k = x_1^2 - 2(2k - 1)x_1 y + y^2 = x_1^2 + 2(2k - 1)|x_1| y + y^2 > 2(2k - 1)|x_1| y \geq 2(2k - 1) > k \text{ mâu thuẫn.}$$

Vậy $x_1 = 0$. Khi đó $k = y^2$ và $m^2 - n^2 + 1 = \frac{m^2}{k} = \left(\frac{m}{y}\right)^2$ nên $|m^2 - n^2 + 1|$ là số chính phương.

Ví dụ 32

Cho hai số nguyên a, b thỏa mãn $a^2 + b^2 + 1 = 2(ab + a + b)$. Chứng minh rằng a và b là hai số chính phương liên tiếp.

(Đề tuyển sinh lớp 10 chuyên toán – Trường THPT chuyên – ĐHSPT Hà Nội, 2016).

Lời giải:

Từ đẳng thức đã cho ta có $a^2 - 2(b+1)a + (b-1)^2 = 0$ là phương trình bậc hai ẩn a , ta có $\Delta' = (b+1)^2 - (b-1)^2 = 4b$. Vì phương trình trên có nghiệm nguyên nên điều kiện cần ta có Δ' là một số chính phương. Khi đó ta có b là một số chính phương.

- Với $b = 0$ ta có $a = 1$. Ta thấy 0 và 1 là hai số chính phương liên tiếp (đúng với đpcm).

$$\text{- Với } b > 0 \text{ ta có } \begin{cases} a = b+1+\sqrt{4b} = (\sqrt{b}+1)^2 \\ a = b+1-\sqrt{4b} = (\sqrt{b}-1)^2 \end{cases}$$

Ta thấy b và $(\sqrt{b}+1)^2$ là hai số chính phương liên tiếp; $(\sqrt{b}-1)^2$ và b là hai số chính phương liên tiếp (điều phải chứng minh)

Vậy a và b là các số chính phương liên tiếp.

Ví dụ 33.

Tìm tất cả số tự nhiên n thỏa mãn $2n+1, 3n+1$ là các số chính phương và $2n+9$ là số nguyên tố.

(Tuyển sinh lớp 10 chuyên TP Hà Nội, 2017)

Lời giải

Giả sử $2n+1, 3n+1$ là các số chính phương

$$\Rightarrow \begin{cases} 2n+1 = a^2 \\ 3n+1 = b^2 \end{cases} \text{ với } a, b \in \mathbb{Z}^+. \text{ Ta có } n = b^2 - a^2; 1 = 3a^2 - 2b^2.$$

$$\text{Do đó } 2n+9 = 2(b^2 - a^2) + 9(3a^2 - 2b^2) = 25a^2 - 16b^2 = (5a-4b)(5a+4b).$$

Vì $2n+9$ là số nguyên tố nên $5a-4b=1 \Rightarrow 5a-1=4b$. Nên ta có:

$$1 = 3a^2 - 2b^2 = 3a^2 - 2 \cdot \frac{(5a-1)^2}{16} = \frac{-a^2 + 10a - 1}{8}. \text{ Suy ra } -a^2 + 10a - 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ a=9 \end{cases}$$

Với $a=1 \Rightarrow n=0$ (loại vì $2n+9=9$)

Với $a=9 \Rightarrow n=40$. Thử lại: Thỏa mãn.

Các bài toán liên quan đến tính chia hết của số nguyên

Ví dụ 1

Cho $n \in \mathbb{N}^*$. Chứng minh rằng: $S_n = 1^{2019} + 2^{2019} + \dots + n^{2019}$ chia hết cho $T_n = 1 + 2 + \dots + n$.

Lời giải:

Ta có: $2T_n = n(n+1)$. Mặt khác, sử dụng tính chất $a^n + b^n$ chia hết cho $a+b \in \mathbb{N}^*$ và n lẻ, ta

$$\text{có: } 2S_n = \left[(1^{2019} + n^{2019}) + 2^{2019} + (n-1)^{2019} + \dots + (n^{2019} + 1) \right] : (n+1) \quad (1)$$

$$2S_n = \left\{ \left[1^{2019} + (n-1)^{2019} \right] + \left[2^{2019} + (n-2)^{2019} \right] + \dots + \left[(n-1)^{2019} \right] + 2n^{2019} \right\} : n \quad (2)$$

Do $(n, n+1)=1$ nên từ (1) và (2) suy ra: $2S_n : n(n+1) = 2T_n$ hay $S_n : T_n$.

Ví dụ 2

Cho m, n là các số nguyên dương, giả sử $A = \frac{(m+n)^3}{n^2}$ là số nguyên lẻ. Tìm giá trị bé nhất có thể của A và tìm m, n thỏa mãn giá trị này. Chứng minh cho câu trả lời.

Lời giải:

Gọi d là ước chung lớn nhất của m và n .

Giả sử $m = ad, n = bd$ với $(a, b) = 1$

$$\text{Ta có: } A = \frac{(m+n)^3}{n^2} = \frac{d^3(a+b)^3}{d^2b^2} = \frac{d(a+b)^3}{b^2}$$

Vì $(a, b) = 1$ nên $(b, a+b) = 1$. Suy ra $(b^2, (a+b)^3) = 1$. Như vậy để A nguyên thì $d : b^2$, giả sử

$d = cb^2$. Bây giờ ta được $A = c(a+b)^3$ với a, b, c nguyên dương.

Do $a+b \geq 2$ và A lẻ nên A nhận giá trị bé nhất là 27, điều này xảy ra khi $c=1, a+b=3$. Khi đó có hai khả năng:

Nếu $a=2$ và $b=1$ thì ta có $d=1$. Suy ra $m=2, n=1$.

Nếu $a=1$ và $b=2$ thì ta có $d=4$. Suy ra $m=4, n=8$.

Ví dụ 3

Tìm các số nguyên dương a, b sao cho $\frac{a^3b-1}{a+1}, \frac{b^3a+1}{b-1}$ là các số nguyên dương.

Lời giải:

Ta có $a^3b-1 = b(a^3+1) - (b+1):a+1 \Rightarrow b+1:a+1$. Tương tự $b^3a+1 = a(b^3-1) + a+1:b-1$ suy ra $a+1:b-1$. Từ đó suy ra $b+1:b-1 \Leftrightarrow b-1+2:b-1 \Rightarrow b-1 \in U(2)$ suy ra $b=2$ hoặc $b=3$.

Với $b=2$ ta có $3:a+1 \Rightarrow a=2$, với $b=3$ ta có: $4:a+1 \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ a=3 \end{cases}$.

Vậy các bộ số $(a;b)$ thỏa mãn điều kiện là: $(a;b) = (1;3), (2;2), (3;3)$.

Ví dụ 4

Cho các số tự nhiên a, b, c, d, e biết: $a+b+c+d+e=3a=4b=5c, d+e=13$. Tìm số lớn nhất trong các số a, b, c, d, e .

Lời giải:

Từ giả thiết ta suy ra $a+b+c+d+e$ chia hết cho $3.4.5=60$ suy ra $4b, 5c$ chia hết cho 60 nên b chia hết cho 15, c chia hết cho 12. Nếu $b=0$ hoặc $c=0$ thì suy ra $a=b=c=d=e=0$ trái với giả thiết suy ra $b, c \neq 0$. Vậy $b, c \geq 1$ suy ra $b \geq 15, c \geq 12$. Theo giả thiết ta có:

$$3(a+b+c+d+e) = 3a+4b+5c \Rightarrow 3(d+e) = b+2c \geq 15+2.12 \Rightarrow d+e \geq 13.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $b=15, c=12$ vậy $a=20$. Vậy $a=20$ là giá trị cần tìm.

Ví dụ 5

Tìm tất cả các số nguyên dương m, n sao cho $m+n^2:(m^2-n)$ và $n+m^2:(n^2-m)$

Lời giải:

Không mất tính tổng quát, ta giả sử $n \geq m$

+ Nếu $n > m+1$ thì suy ra

$n^2-m > n+m^2$, thật vậy ta có: $n^2-m-n-m^2 = (n+m)(n-m-1) > 0$. Từ đó ta suy ra $n+m^2$ không thể chia hết cho $n-m^2$.

+ Ta xét $n = m+1$,

$$m+n^2:m^2-n \Leftrightarrow m+(m+1)^2:m^2-(m+1) \Leftrightarrow m^2+3m+1:m^2-m+1 \Leftrightarrow m^2-m+1+4m:m^2-m+1 \text{ hay}$$

$$4m:m^2-m+1 \Rightarrow 4m \geq m^2-m+1 \Leftrightarrow m^2-5m+1 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{5-\sqrt{21}}{2} \leq m \leq \frac{5+\sqrt{21}}{2}, \text{ do } m \text{ là số nguyên}$$

dương nên suy ra $m \in \{1; 2; 3; 4\}$ thử trực tiếp ta thấy $m=1, m=2$ thỏa mãn.

+ Xét $m=n$ ta có $n^2+n:n^2-n \Rightarrow 2n:n^2-n \Rightarrow 2n \geq n^2-n \Leftrightarrow n^2-3n \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq n \leq 3$ thử trực tiếp ta thấy $n=2$ hoặc $n=3$ thỏa mãn điều kiện.

Vậy cặp số $(m; n)$ thỏa mãn điều kiện là: $(m, n) = (2; 2), (3; 3), (1; 2), (2; 1), (2; 3), (3; 2)$.

Ví dụ 6

Tìm các số nguyên dương x, y sao cho $2xy - 1$ chia hết cho $(x-1)(y-1)$.

Lời giải:

Đặt $x-1=a, y-1=b$ với $a, b \in \mathbb{N}^*$. Yêu cầu bài toán được viết lại thành:

$2(a+1)(b+1)-1 \vdots ab \Leftrightarrow 2ab+2(a+b)+1 \vdots ab \Leftrightarrow 2(a+b)+1 \vdots ab$. Ta giả sử $2(a+b)+1=kab$, và $1 \leq a \leq b$ thì $kab=2(a+b)+1 \leq 4b+b=5b \Rightarrow ka \leq 5$. Từ đó ta có các trường hợp có thể xảy ra là: $k=1, a=1 \Rightarrow 2(1+b)+1=b \Rightarrow b=-3$ loại. Thử lần lượt: $k=1, a=2; k=1, a=3; k=1, a=4; k=1, a=5; k=2, a=1; k=2, a=2; k=3, a=1; k=4, a=1; k=5, a=1$; ta suy ra các cặp số $(x; y)$ thỏa mãn điều kiện là:

$$(x; y) = (2; 2), (2; 4), (4; 2), (8; 4), (4; 8).$$

Ví dụ 7

Tìm các số nguyên dương x, y sao cho $4x^2+6x+3$ chia hết cho $2xy-1$.

Lời giải:

Từ giả thiết ta suy ra $y(4x^2+8x+3) \vdots 4xy-1 \Leftrightarrow x(4xy-1)+2(4xy-1)+x+3y+2 \vdots 4xy-1$.

Hay

$$x+3y+2 \vdots 4xy-1 \Leftrightarrow 4xy-1 \leq x+3y+2 \Leftrightarrow x(4xy-1) \leq 3y+3 \Leftrightarrow x \leq \frac{3y+3}{4y-1} = \frac{12y+12}{4(4y-1)} = \frac{3(4y-1)+15}{4(4y-1)}$$

$$\text{Mà } \frac{3(4y-1)+15}{4(4y-1)} = \frac{3}{4} + \frac{15}{4(4y-1)} \leq \frac{3}{4} + \frac{15}{4 \cdot 3} = 2 \text{ suy ra } x \leq 2.$$

Thay $x=1 \Rightarrow y=1$ và $y=4$.

Thay $x=2$ suy ra $y=1$.

Ví dụ 8

Tìm các số nguyên dương x, y sao cho x^2-2 chia hết cho $xy+2$.

Lời giải:

Từ giả thiết ta suy ra $x^2-2 \vdots xy+2$ Ta có phân tích sau:

$$y(x^2-2) = x(xy+2) - 2(x+y) \text{ suy ra } 2(x+y) \vdots xy+2 \text{ hay } 2(x+y) = k(xy+2) \text{ với } k \in \mathbb{N}^*.$$

Nếu $k \geq 2$ thì $2(x+y) = k(xy+2) \geq 2(xy+2) \Leftrightarrow x+y \geq xy+2 \Leftrightarrow (x-1)(y-1)+1 \leq 0$. Điều này là vô lý do $x, y \geq 1$. Vậy $k=1 \Leftrightarrow 2(x+y) = xy+2 \Leftrightarrow (x-2)(y-2) = 2$. Từ đó tìm được $(x; y) = (3; 4), (4; 3)$.

Ví dụ 9: Tìm các số tự nhiên x, y sao cho $x^2+3xy+y^2$ là lũy thừa của 5.

Lời giải:

Giả sử $x^2+3xy+y^2=5^n$ do $x, y \geq 2 \Rightarrow n \geq 2$.

Suy ra $x^2+3xy+y^2 \vdots 25 \Leftrightarrow (x-y)^2+5xy \vdots 25 \Rightarrow (x-y)^2+5xy \vdots 5 \Rightarrow (x-y)^2 \vdots 5 \Leftrightarrow x-y \vdots 5$ hay $(x-y)^2 \vdots 25 \Rightarrow 5xy \vdots 5 \Leftrightarrow xy \vdots 5$. Do x, y là số nguyên tố ta suy ra x hoặc y chia hết cho 5.

Giả sử $x \vdots 5 \Rightarrow x=5$, lại có $x-y \vdots 5 \Rightarrow$ số còn lại cũng chia hết cho 5, hay $x=y=5$.

Khi đó $n=3$.

Ví dụ 10

Cho x, y là các số nguyên $x, y \neq -1$ sao cho $\frac{x^4-1}{y+1} + \frac{y^4-1}{x+1}$ là số nguyên. Chứng minh: $x^4 y^{44} - 1$ chia hết $y+1$.

Lời giải:

Đặt $\frac{x^4-1}{y+1} = \frac{a}{b}$; $\frac{y^4-1}{x+1} = \frac{m}{n}$; với $(a, b) = 1, (m, n) = 1, b, n > 0$. Theo giả thiết ta có: $\frac{a}{b} + \frac{m}{n}$ là số

nguyên, tức là: $\frac{an+bm}{bn} \in \mathbb{Z} \Rightarrow \begin{cases} an+bm : b \\ an+bm : n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} an : b \\ bm : n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n : b \\ b : n \end{cases} \Rightarrow n = b$.

Mặt khác $\frac{a}{b} \cdot \frac{m}{n} = \frac{x^4-1}{y+1} \cdot \frac{y^4-1}{x+1} = (x-1)(x^2+1)(y-1)(y^2+1)$ là số nguyên, suy ra

$am : n \Rightarrow a : n \Leftrightarrow a : b \Rightarrow x^4 - 1 : y + 1$. Ta có: $x^4 y^{44} - 1 = y^{44}(x^4 - 1) + y^{44} - 1$ mà $x^4 - 1 : y + 1$ và $y^{44} - 1 : y^2 - 1 : y + 1$ nên bài toán được chứng minh.

Ví dụ 11

Xác định tất cả các số nguyên tố p, q sao cho $\frac{p^{2n+1}-1}{p-1} = \frac{q^3-1}{q-1}$ với $n > 1, n \in \mathbb{Z}$.

Lời giải:

Ta có: $\frac{p^{2n+1}-1}{p-1} = \frac{q^3-1}{q-1} \Leftrightarrow (p-1) \left(\frac{p^{2n}-1}{p-1} - 1 \right) = (p-1) \left(\frac{q^3-1}{q-1} - 1 \right) \Leftrightarrow p(p^n-1)(p^n+1) = (p-1)(p+1)$

(1)

Nếu $q \leq p^n - 1$ thì các thừa số ở vế trái lớn hơn các thừa số tương ứng ở vế phải của (1), do đó $q \geq p^n$. Vì q nguyên tố còn p^n không nguyên tố nên $q \geq p^n + 1$.

Một trong những thừa số ở vế trái của (1) chia hết cho số nguyên tố q . Theo bất đẳng thức $q \geq p^n + 1$, điều đó chỉ xảy ra khi $q = p^n + 1$

Thay vào (1) ta được: $p(p^n-1) = (p-1)(p^n+2)$ suy ra $p^n - 3p + 2 = 0$.

Từ đó $p/2$ hay $p=2, n=2$ suy ra $q = p^n + 1 = 5$.

Ví dụ 12

Cho a, b là các số nguyên và p là số nguyên tố lẻ. Chứng minh rằng nếu p^4 là ước của $a^2 + b^2$ và $a(a+b)^2$ thì p^4 cũng là ước của $a(a+b)$.

Lời giải:

Ta có: $2a^2b = a(a+b) - a(a^2 + b^2)$

Vì p^4 là ước của $a^2 + b^2$ và $a(a+b)^2$ nên p^4 là ước của $2a^2b$. Lại vì p lẻ nên p^4 là ước của a^2b

Nếu a không chia hết cho p^2 thì số mũ của p trong a^2 lớn nhất chỉ có thể là 2. Do đó b phải chứa p^2 , nghĩa là b chia hết cho p^2 suy ra $b^2 : p^4$. Điều này vô lý vì $a^2 + b^2$ không chia hết cho p^4 (do a^2 không chia hết cho p^4). Như vậy a phải chia hết cho p^2 .

Vì $a^2 + b^2$ chia hết cho p^4 nên $b^2 : p^4$. Suy ra $b : p$ và $(a+b) : p$.

Tóm lại, p^4 là ước của $a(a+b)$.

Ví dụ 13

Cho ba số nguyên dương khác nhau x, y, z . Chứng minh rằng: $(x-y)^5 + (y-z)^5 + (z-x)^5$ chia hết cho $5(x-y)(y-z)(z-x)$.

Lời giải:

Đặt $a = x - y, b = y - z$. Suy ra $z - x = -(a + b)$

Bài toán quy về chứng minh: $(a+b)^5 - a^5 - b^5 : 5ab(a+b)$

Ta có: $(a+b)^5 - a^5 - b^5 = 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4$

$$= 5ab(a^3 + 2a^2b + 2ab^2 + b^3) = 5ab[(a^3 + b^3) + 2(a^2b + ab^2)]$$

$$= 5ab[(a+b)(a^2 - ab + b^2) + 2ab(a+b)] = 5ab(a+b)(a^2 + ab + b^2)$$

Đến đây ta suy ra được điều phải chứng minh.

Ví dụ 14

Chứng minh rằng $a^2 + b^2$ là bội của 5 thì hai số $A = 2a + b; B = 2b - a$ hoặc hai số

$A' = 2a - b; B' = 2b + a$ chia hết cho 5.

Lời giải:

Ta có: $a^2 + b^2 = (a^2 - 4b^2) + 5b^2$ chia hết cho 5. Suy ra $a^2 - 4b^2 = (a - 2b)(a + 2b)$ chia hết cho 5.

Đến đây ta xét các trường hợp:

Nếu $a - 2b : 5$ thì $2b - a = B : 5$. Mặt khác, $2b - a = (2b + 4a) - 5 : 5$ nên $2(b + 2a) : 5$, suy ra $b + 2a = A : 5$ (vì $(2; 5) = 1$).

Nếu $a + 2b : 5$ thì $-a - 2b : 5$.

Mặt khác, $-a - 2b = -5a - (2b - 4a) : 5$ nên $2(b - 2a) : 5$, suy ra $(b - 2a) : 5$ (vì $(2; 5) = 1$).

Nếu cả hai số $a - 2b$ và $a + 2b$ đều chia hết cho 5 thì các số A, B, A', B' đều chia hết cho 5.

Ví dụ 15

Cho a, b, c, d là các số nguyên dương thỏa mãn $ab = cd$. Chứng minh rằng

$A = a^n + b^n + c^n + d^n$ là hợp số với mọi n nguyên dương.

Lời giải:

Giả sử $d = (a, c), d \geq 1$. Suy ra $a = da_1, c = dc_1$ với $a_1, c_1 \in \mathbb{N}^*$ và $(a_1, c_1) = 1$

Từ đẳng thức $ab = cd$, suy ra $a_1b = c_1d$ nên $b : c_1$ và $d : a_1$

Ta có: $b = c_1s, d = a_1s, s \in \mathbb{N}^*$. Từ đó suy ra: $a^n + b^n + c^n + d^n = (a_1^n + c_1^n)(d^n + s^n)$ hay A là hợp số với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$.

Ví dụ 16

Cho $a, b \in \mathbb{Z}$ và $a \neq b$ thỏa $ab(a+b)$ chia hết cho $a^2 + ab + b^2$. Chứng minh rằng: $|a - b| > \sqrt[3]{ab}$

Lời giải:

Đặt $d = (a, b)$. Suy ra $a = xd, b = yd, (x, y) = 1$

Khi đó: $\frac{ab(a+b)}{a^2+ab+b^2} = \frac{dxy(x+y)}{x^2+xy+y^2} \in \mathbb{Z}$

Ta có $(x^2+xy+y^2; x) = (y^2; x) = 1$. Tương tự $(x^2+xy+y^2; y) = 1$.

Vì $(x+y; y) = 1$ nên $(x^2+xy+y^2; x+y) = (y^2; x+y) = 1$.

Do đó $x^2+xy+y^2 \mid d \Rightarrow d \geq x^2+xy+y^2$.

Mặt khác $|a-b|^3 = d^3|x-y|^3 = d^2|x-y|^3 \cdot d \geq d^2 \cdot 1 \cdot (x^2+xy+y^2) > ab$.

Vậy $|a-b| > \sqrt[3]{ab}$.

Ví dụ 17

Cho n là một số nguyên dương. Tìm tổng của tất cả các số chẵn nằm giữa $n^2 - n + 1$ và $n^2 + n + 1$.

Lời giải

Ta có $n^2 - n + 1 = n(n-1) + 1$ và $n^2 + n + 1 = n(n+1) + 1$ là các số lẻ.

Suy ra rằng số lẻ nhỏ nhất được xem xét là $n^2 - n + 2$ và số lẻ lớn nhất là $n^2 + n$. Như vậy tổng cần tìm là:

$$\begin{aligned} & (n^2 - n + 2) + (n^2 - n + 4) + \dots + (n^2 + n - 2) + (n^2 + n) \\ &= (n^2 - n) + 2 + (n^2 - n) + 4 + \dots + (n^2 - n) + 2n - 2 + (n^2 - n) + 2n \\ &= n(n^2 - n) + 2(1 + 2 + \dots + n) = n^3 - n^2 + n^2 + n = n^3 + n. \end{aligned}$$

Ví dụ 18

Cho m, n là các số nguyên dương, giả sử $A = \frac{(m+n)^3}{n^2}$ là số nguyên lẻ, tìm giá trị bé nhất có thể có của A và tìm m, n thỏa mãn giá trị này. Chứng minh cho câu trả lời.

Lời giải

Gọi d là ước chung lớn nhất của m và n .

Giả sử $m = ad, n = bd$ với $(a, b) = 1$.

$$\text{Ta có } A = \frac{(m+n)^3}{n^2} = \frac{d^3(a+b)^3}{d^2b^2} = \frac{d(a+b)^3}{b^2}.$$

Vì $(a, b) = 1$ nên $(b, a+b) = 1$ suy ra $(b^2, (a+b)^3) = 1$. Như vậy để A nguyên thì $d : b^2$, giả sử

$d = cb^2$. Bây giờ ta được $A = c(a+b)^3$ với a, b, c nguyên dương.

Do $a+b \geq 2$ và A lẻ nên A nhận giá trị bé nhất là 27, điều này xảy ra khi $c = 1; a+b = 3$. Khi đó có hai khả năng:

Nếu $a = 2$ và $b = 1$ thì ta có $d = 1$. Suy ra $m = 2, n = 1$.

Nếu $a = 1$ và $b = 2$ thì ta có $d = 4$, suy ra $m = 4; n = 8$.

Ví dụ 19

Tìm tất cả các số nguyên $n > 1$ sao cho với bất kỳ ước số nguyên tố của $n^6 - 1$ là một ước của $(n^3 - 1)(n^2 - 1)$.

Lời giải

Rõ ràng $n = 2$ thỏa mãn các điều kiện bài toán.

Với $n > 2$ ta viết $n^6 - 1 = (n^3 - 1)(n^3 + 1) = (n^3 - 1)(n + 1)(n^2 - n + 1)$

Do đó tất cả các thừa số nguyên tố của $n^2 - n + 1$ chia hết cho $n^3 - 1$ hoặc $n^2 - 1 = (n - 1)(n + 1)$.

Tuy nhiên cần đề ý rằng $(n^2 - n + 1; n^3 - 1) \leq (n^3 + 1, n^2 - 1) \leq 2$.

Mặt khác, $n^2 - n + 1 = n(n-1) + 1$ là số lẻ, vì vậy tất cả các thừa số nguyên tố của $n^2 - n + 1$ phải là chia hết $n+1$.

Nhưng $n^2 - n + 1 = (n+1)(n-2) + 3$ vì vậy ta phải có $n^2 - n + 1 = 3^k$ với k nguyên dương. Bởi vì $n > 2$ nên ta có $k \geq 3$.

Bây giờ $3 | n^2 - n + 1$ nên $n \equiv 2 \pmod{3}$, nhưng mỗi trường hợp $n \equiv 2, 5, 8 \pmod{9}$, ta có $n^2 - n + 1 \equiv 3 \pmod{9}$ mâu thuẫn.

Vậy bài toán có nghiệm duy nhất là $n = 2$.

Ví dụ 20

Tìm n để $M = \underbrace{100\dots 01}_{n} \underbrace{00\dots 01}_{n}$ chia hết cho 37.

Lời giải

Ta có $M = 10^{2n+1} + 10^{n+1} + 1$.

Đề ý rằng $10^3 \equiv 1 \pmod{37}$, cho nên ta có thể xét các trường hợp của n theo mod 3.

Nếu $n = 3k$ thì $M \equiv 10^2 + 10 + 1 \equiv 0 \pmod{37}$.

Nếu $n = 3k + 1$ thì $M \equiv 10^4 + 10^2 + 1 \equiv 0 \pmod{37}$.

Nếu $n = 3k - 1$ thì $M \equiv 1 + 1 + 1 \equiv 3 \pmod{37}$.

Tóm lại, M chia hết cho 37 khi và chỉ khi n có một trong hai dạng $n = 3k$ hoặc $n = 3k + 1$ với $k \in \mathbb{N}^*$.

Ví dụ 21

Tìm tất cả các số có năm chữ số $\overline{abcde}$ sao cho $\sqrt[3]{\overline{abcde}} = \overline{ab}$.

Lời giải

Đặt $x = \overline{ab}$. Ta có $\overline{abcde} = 1000x + y$ với $0 \leq y < 1000$.

Từ $\sqrt[3]{\overline{abcde}} = \overline{ab}$ ta suy ra $1000x + y = x^3$.

Vấn đề còn lại là chúng ta đi giải phương trình nghiệm nguyên.

Vì $y \geq 0$ nên $1000x \leq x^3 \Rightarrow x^2 \geq 1000 \Rightarrow x \geq 32$ (1)

Mặt khác do $y < 1000$ nên $1000x + 1000 > x^3 \Rightarrow x(x^2 - 1000) < 1000 \Rightarrow x < 33$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $x = 32$ hay $x^3 = 32768$.

Vậy $\overline{abcde} = 32768$.

Ví dụ 22

Tìm các chữ số a, b, c với $a \geq 1$ sao cho $\sqrt{abc} = (a+b)\sqrt{c}$.

Lời giải

Từ $\sqrt{abc} = (a+b)\sqrt{c}$, suy ra $100a + 10b + c = (a+b)^2 c \Rightarrow 10(10a+b) = c[(a+b)^2 - 1]$ (*)

Vì $a \geq 1$ nên $10(10a+b) \geq 100 \Rightarrow c[(a+b)^2 - 1] \geq 100 \Rightarrow a+b \geq 4$ và $c \geq 1$.

Nếu $a+b$ không chia hết cho 3 thì $(a+b)^2 \equiv 1 \pmod{3}$. Từ (*) suy ra $(10a+b):3 \Rightarrow (a+b):3$ (vô lý).

Như vậy $(a+b):3$ nên $(10a+b):3$. Từ (*) suy ra $c:3$ và do đó c không chia hết cho 5.

Từ (*) suy ra $[(a+b)^2 - 1]:5 \Rightarrow \begin{cases} a+b-1=1 \\ a+b+1=1 \end{cases}$. Kết hợp với $(a+b):3$ ta suy ra $a+b = 6$ hoặc

$$a+b=9.$$

Trường hợp 1: $a+b=9$ thay vào (*) ta được: $10(9a+9)=80c \Rightarrow 8c=9(a+1) \Rightarrow c:9 \Rightarrow c=9$, vì vậy $a=7$.

Trường hợp 2: $a+b=6$ làm tương tự trường hợp trên.

Ví dụ 23

Tìm số có 3 chữ số $\overline{abc}$ biết $\overline{abc} = a!+b!+c!$

Lời giải

Vì $\overline{abc} < 999$ nên $a!+b!+c! \leq 999 \Rightarrow a, b, c \leq 6 \Rightarrow \overline{abc} \leq 666$.

Điều này dẫn đến $a!+b!+c! \leq 666 \Rightarrow a, b, c \leq 5 \Rightarrow a!+b!+c! \leq 3.5! = 360 \Rightarrow a \leq 3$.

Suy ra $a!+b!+c! \leq 3!+5!+5! = 246 \Rightarrow a \leq 2$.

Nếu $b=c=5$ thì $a!+5!+5! = \overline{a55} \Rightarrow a!+240 = \overline{a55}$, ta có $a \geq 2$ vì vậy $a=2$.

Tuy nhiên thử lại thấy $255 \neq 2!+5!+5!$

Một trong hai số b hoặc c nhỏ hơn 5.

Từ đó ta có $a!+b!+c! \leq 2!+4!+5! = 146 \Rightarrow \overline{abc} \leq 146 \Rightarrow a=1, b \leq 4$.

Vì $c < 5$ thì $\overline{abc} = a!+b!+c! < 1!+4!+4! = 49$ vô lý.

Với $c=5$ thì $\overline{1b5} = 1!+b!+5!$ suy ra $10b = 16+b! \Rightarrow b!$ tận cùng bởi số 4, vì vậy $b=4$.

Vậy $\overline{abc} = 145$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Ví dụ 24

Cho các số tự nhiên a, b . Chứng minh:

a, a^2+b^2 chia hết cho 3 thì a, b đều chia hết cho 3.

b, a^2+b^2 chia hết cho 7 thì a, b đều chia hết cho 7.

c, a^4+b^4 chia hết cho 15 thì a, b đều chia hết cho 3 và 5.

Lời giải

a, Một số chính phương khi chia cho 3 chỉ có thể dư 0 hoặc 1. Do a^2+b^2 chia cho 3 nên chỉ có thể xảy ra số dư $0+0, 0+1, 1+1$ trong 3 trường hợp này chỉ có trường hợp $a, b:3$ thì $a^2+b^2:3$ suy ra đpcm.

b, Một số chính phương khi chia cho 7 chỉ có thể dư 0, 1, 2, 4. (Thật vậy chỉ cần xét $a=7k, 7k \pm 1, 7k \pm 2, 7k \pm 3$ thì a^2 chia cho 7 có số dư lần lượt là 0, 1, 4, 2). Như vậy a^2+b^2 khi chia cho 7 thì có số dư là $0+0, 0+1, 0+2, 0+4, 1+2, 1+4, 2+4, 1+1, 2+2, 4+4$. Trong các trường hợp này chỉ có a, b đồng thời chia hết cho 7 thì $a^2+b^2:7$ đpcm.

c, Dễ thấy nếu a không chia hết cho 3 thì a^4 chia 3 chỉ có thể dư 1. Từ giả thiết ta có a^4+b^4 chia hết cho 3 và chia hết cho 5.

Nếu a không chia hết cho 3 thì a^4 không chia hết cho 3 suy ra b^4 không chia hết cho 3 nên b không chia hết cho 3 suy ra a^4+b^4 chia cho 3 dư 2. Trái với giả thiết, vậy a, b phải chia hết cho 3. Ta cũng có: Nếu a không chia hết cho 5 thì a^4 chia cho 5 có thể dư 1. Làm tương tự như trên ta suy ra a, b phải chia hết cho 5 là đpcm.

Ví dụ 25

Tìm tất cả các số nguyên dương m, n sao cho $m+n^2:(m^2-n)$ và $n+m^2:(n^2-m)$.

Lời giải

Không mất tính tổng quát, ta giả sử $n \geq m$.

+) Nếu $n > m+1$ thì suy ra $n^2-m > n+m^2$ thật vậy ta có: $n^2-m-n-m^2 = (n+m)(n-m-1) > 0$.

Từ đó suy ra $n+m^2$ không thể chia hết cho n^2-m .

+) Ta xét $n=m+1, m+n^2:m^2-n \Leftrightarrow m+(m+1)^2:m^2-(m+1) \Leftrightarrow m^2+3m+1:m^2-m+1$

$\Leftrightarrow m^2-m+1+4m:m^2-m+1$ hay $\Leftrightarrow 4m:m^2-m+1 \Rightarrow 4m \geq m^2-m+1 \Leftrightarrow m^2-5m+1 \leq 0$

$\Leftrightarrow \frac{5-\sqrt{21}}{2} \leq m \leq \frac{5+\sqrt{21}}{2}$, do m là số nguyên dương nên suy ra $m \in \{1; 2; 3; 4\}$ thử trực tiếp ta thấy $m=1, m=2$ thỏa mãn.

+) Xét $m=n$ ta có $n^2+n:n^2-n \Rightarrow 2n:n^2-n \Rightarrow 2n \geq n^2-n \Leftrightarrow n^2-3n \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq n \leq 3$ thử trực tiếp ta thấy $n=2$ hoặc $n=3$ thỏa mãn điều kiện.

Vậy các cặp số $(m;n)$ thỏa mãn điều kiện là $(m;n)=(2,2), (3,3), (1,2), (2,1), (2,3), (3,2)$.

Ví dụ 26

Xét phân số $A = \frac{n^2+4}{n+5}$. Hỏi có bao nhiêu số tự nhiên n trong khoảng từ 1 đến 2017 sao cho phân số A chưa tối giản.

Lời giải

Giả sử A là phân số chưa tối giản, đặt $d = (n^2+4, n+5)$, suy ra $d > 1$.

Ta có $d|(n+5)^2 - (n^2-4) = 10n+21 = 10(n+5) - 29 \Rightarrow d|29 \Rightarrow d = 29$.

Ngược lại nếu $(n+5):29$ thì đặt $n+5 = 29m$ với $m \in \mathbb{N}^*$. Khi đó $n^2+4 = 29(29m^2-10m+1):29$ nên A chưa tối giản.

Như vậy, ta chỉ cần tìm n sao cho $n+5 = 29m$ với $m \in \mathbb{N}^*$.

$1 \leq n \leq 2017 \Rightarrow 1 \leq 29m-5 \leq 2017 \Rightarrow 1 \leq m \leq 69 \Rightarrow$ có 69 giá trị của $m \Rightarrow$ có 69 giá trị của n .

Vậy có 69 giá trị của n để A là phân số chưa tối giản.

Ví dụ 27

Cho $a, b \in \mathbb{N}$ sao cho $\frac{a+1}{b} + \frac{b+1}{a} \in \mathbb{Z}$. Chứng minh rằng ước chung lớn nhất của a và b không vượt quá $\sqrt{a+b}$.

Lời giải

Giả sử $d = (a, b) \Rightarrow a = md, b = nd$ với $(m, n) = 1$.

Ta có $\frac{a+1}{b} + \frac{b+1}{a} = \frac{(m^2+n^2)d + (m+n)}{mnd} \Rightarrow (m+n):d \Rightarrow d \leq m+n \Rightarrow d \leq \sqrt{d(m+n)} = \sqrt{a+b}$.

Ví dụ 28

Cho các số nguyên dương a, b, c thỏa mãn $a^2+b^2=c^2$. Chứng minh ab chia hết cho $a+b+c$.

Lời giải

Từ giả thiết ta có $a^2+b^2+2ab-c^2=2ab \Leftrightarrow (a+b)^2-c^2=2ab \Leftrightarrow (a+b+c)(a+b-c)=2ab$ (*).

Nếu a lẻ, b chẵn thì suy ra c lẻ dẫn tới $a+b-c$ chẵn.

Nếu a, b lẻ thì c chẵn suy ra $a+b-c$ chẵn.

Nếu a, b cũng chẵn thì c chẵn suy ra $a+b-c$ chẵn.

Như vậy trong mọi trường hợp ta luôn có $a+b-c$ chẵn $\Rightarrow a+b-c=2k$ ($k \in \mathbb{Z}$).

Từ (*) ta cũng suy ra $2k(a+b+c)=2ab \Leftrightarrow k(a+b+c)=ab \Leftrightarrow ab:(a+b+c)$.

TỔNG HỢP MỘT SỐ ĐỀ THI

ĐỀ SỐ 01

Câu 1. Cho biểu thức $A = \frac{5}{\sqrt{x}+2}$, $B = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} - \frac{2}{\sqrt{x}+2} \right) : \frac{x+4}{\sqrt{x}+2}$ với $x \geq 0$, $x \neq 4$.

a) Tính giá trị của A khi $x = \frac{1}{9-4\sqrt{5}}$.

b) Rút gọn B .

c) Tìm các số thực x để $P = \frac{A}{B}$ là số nguyên.

Câu 2. Một người đi xe đạp từ A đến B cách nhau 24 km với vận tốc dự định. Khi đi từ B trở về A người đó tăng vận tốc trung bình thêm 4 km/h so với lúc đi, nên thời gian về ít hơn thời gian đi là 30 phút. Tính vận tốc trung bình dự định của xe đạp khi đi từ A đến B .

Câu 3

a) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \frac{2x}{x+y} + \frac{1}{\sqrt{x}-1} = 3 \\ \frac{3y}{x+y} - \sqrt{x} = -2 \end{cases}.$$

b) Cho phương trình $x^2 - 2(m-1)x + m^2 - 2m - 3 = 0$ với m là tham số.

+) Chứng minh phương trình luôn có 2 nghiệm phân biệt với mọi m .

+) Gọi x_1, x_2 là 2 nghiệm của phương trình. Tìm m để $x_1 + 1 = \sqrt{x_2}$.

Câu 4. Cho tam giác ABC có $\widehat{BAC} = 60^\circ$, $AC = b$, $AB = c$, ($b > c$). Vẽ đường kính EF của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC (F nằm trên cung nhỏ CB) vuông góc BC tại M . Gọi I, J lần lượt là hình chiếu của E lên AB, AC . Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của F lên AB, AC .

a) Chứng minh: $AIEJ, CMJE$ là các tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh: I, J, M thẳng hàng.

c) Chứng minh: $IJ \perp HK$.

d) Tìm bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC theo b, c .

Câu 5. Cho các số thực $a, b \geq 0$, $0 \leq c \leq 1$ và $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Tìm GTLN, GTNN của $P = ab + bc + ca + 3(a + b + c)$.

LỜI GIẢI

Câu 1

a) Ta có $x = \frac{1}{9-4\sqrt{5}} = \frac{9+4\sqrt{5}}{9^2 - (4\sqrt{5})^2} = \frac{9+4\sqrt{5}}{9^2 - 80} = \frac{9+4\sqrt{5}}{1} = 9+4\sqrt{5} = (\sqrt{5}+2)^2 \Rightarrow \sqrt{x} = \sqrt{5}+2$.

Suy ra $A = \frac{5}{\sqrt{5}+2+2} = \frac{5}{4+\sqrt{5}} = \frac{5(4-\sqrt{5})}{4^2-5} = \frac{5}{11}(4-\sqrt{5})$.

b) Ta có:

$$B = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} - \frac{2}{\sqrt{x}+2} \right) : \frac{x+4}{\sqrt{x}+2} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2) - 2(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)} \cdot \frac{\sqrt{x}+2}{x+4} = \frac{x+4}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)} \cdot \frac{\sqrt{x}+2}{x+4} = \frac{1}{\sqrt{x}-2}.$$

Ta có: $P = \frac{A}{B} = \frac{5}{\sqrt{x}+2} : \frac{1}{\sqrt{x}-2} = \frac{5(\sqrt{x}-2)}{\sqrt{x}+2}$, dễ thấy $\begin{cases} P \neq 5 \\ P \neq 0 \end{cases}$ ta viết lại biểu thức thành

$$P(\sqrt{x}+2) = 5(\sqrt{x}-2) \Leftrightarrow \sqrt{x}(P-5) = -2(P+5) \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{-2(P+5)}{P-5}.$$

Do $\sqrt{x} \geq 0$ suy ra $\frac{-2(P+5)}{P-5} \geq 0$ hay $\frac{P+5}{P-5} \leq 0$ suy ra $P+5, P-5$ trái dấu do $P+5 > P-5$

$$\Rightarrow \begin{cases} P+5 \geq 0 \\ P-5 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow -5 \leq P < 5. \text{ Vì } P \text{ là số nguyên nên suy ra } P \in \{-5; -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 4\} \text{ thay}$$

vào ta tính được $\sqrt{x} \in \left\{0; \frac{2}{9}; \frac{1}{2}; \frac{6}{7}; \frac{4}{3}; 3; \frac{14}{3}; 8; 18\right\} \Rightarrow \in \left\{0; \frac{4}{81}; \frac{1}{4}; \frac{36}{49}; \frac{16}{9}; 9; \frac{196}{9}; 64; 324\right\}.$

Câu 2. Gọi vận tốc dự định đi từ A đến B là x (km/h), điều kiện $x > 0$.

Vận tốc thực tế khi đi từ B và A là $x+4$ (km/h).

Thời gian dự định đi từ A đến B là $\frac{24}{x}$ giờ. Thời gian thực tế đi từ B về A là $\frac{24}{x+4}$.

Theo giả thiết ta có:

$$\frac{24}{x+4} + \frac{1}{2} = \frac{24}{x} \Leftrightarrow \frac{48+x+4}{2(x+4)} = \frac{24}{x} \Leftrightarrow x^2 + 4x - 192 = 0 \Leftrightarrow (x-12)(x+16) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=12 \\ x=-16 \end{cases}.$$

Đối chiếu với điều kiện ta suy ra $x=12$ thỏa mãn. Vậy vận tốc dự định đi từ A đến B là 12 km/h.

Câu 3

a) Điều kiện $x \geq 0, x \neq 1, x+y \neq 0$. Ta viết lại hệ phương trình thành
$$\begin{cases} \frac{6x}{x+y} + \frac{3}{\sqrt{x}-1} = 9 \\ \frac{6y}{x+y} - 2\sqrt{x} = -4 \end{cases}.$$

Cộng 2 phương trình của hệ ta có $\frac{6x}{x+y} + \frac{6y}{x+y} + \frac{3}{\sqrt{x}-1} - 2\sqrt{x} = 9-4 \Leftrightarrow \frac{3}{\sqrt{x}-1} - 2\sqrt{x} + 1 = 0$

$\Leftrightarrow 3 - (2\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-1) = 0 \Leftrightarrow 2x - 3\sqrt{x} - 2 = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x}-2)(2\sqrt{x}+1) = 0$ suy ra $\sqrt{x} = 2 \Leftrightarrow x = 4$ (thỏa mãn) hoặc $\sqrt{x} = -\frac{1}{2}$ (loại).

Thay $x=4$ vào ta tìm được $y=0$, vậy hệ có nghiệm $(x, y) = (4, 0)$.

b) Xét phương trình $x^2 - 2(m-1)x + m^2 - 2m - 3 = 0$ với m là tham số.

Ta có $\Delta' = (m-1)^2 - (m^2 - 2m - 3) = 4 > 0$ nên phương trình luôn có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 .

Ta tính được
$$\begin{cases} x = \frac{m-1-2}{1} = m-3 \\ x = \frac{m-1+2}{1} = m+1 \end{cases}.$$

Xét điều kiện: $x_1 + 1 = \sqrt{x_2}$ (*)

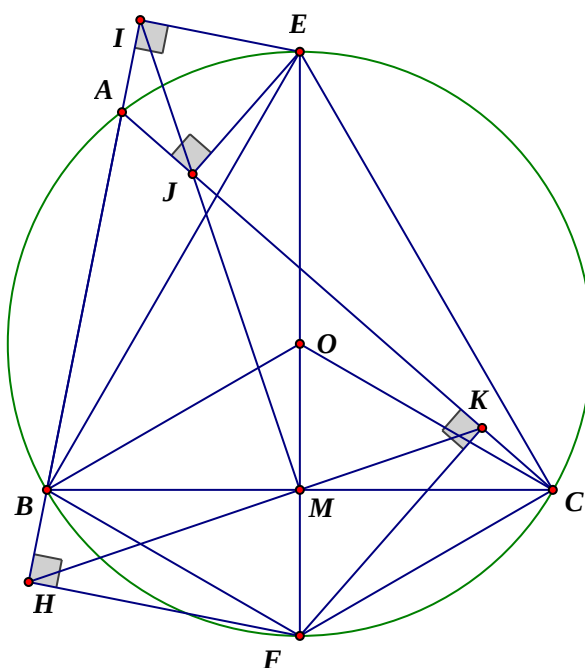
TH1: $x_1 = m-3, x_2 = m+1$ thay vào (*) ta có

$$m-2=\sqrt{m+1} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 2 \\ m^2-5m+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 2 \\ m = \frac{5+\sqrt{13}}{2} \Rightarrow m = \frac{5+\sqrt{13}}{2} \\ m = \frac{5-\sqrt{13}}{2} \end{cases}$$

TH2: $x_1 = m+1$, $x_2 = m-3$ thay vào (*) ta có $m+2=\sqrt{m-3} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 3 \\ m^2+3m+7=0 \end{cases}$ (vô nghiệm).

Vậy $m = \frac{5+\sqrt{13}}{2}$ là giá trị cần tìm.

Câu 4



a) Học sinh tự chứng minh.

b) Từ các tứ giác $IAJE$, $EJMC$, $EABC$ nội tiếp, ta có biến đổi góc sau:

$\widehat{EJI} = \widehat{EAI} = \widehat{ECB} = \widehat{ECM} = 180^\circ - \widehat{EJM}$. Từ đó suy ra $\widehat{EJI} + \widehat{EJM} = 180^\circ$ hay I, J, M thẳng hàng.

Chú ý: Đây là kết quả hình học khá quen thuộc, đường thẳng I, J, M là đường thẳng Simson của điểm E đối với tam giác ABC .

c) Chứng minh tương tự câu b ta có 3 điểm H, M, K thẳng hàng.

Ta có $\widehat{IHM} = \widehat{BFM} = \widehat{BFE} = \frac{1}{2} s\widehat{BE}$, tứ giác $BIEM$ nội tiếp nên $\widehat{HIM} = \widehat{BIM} = \widehat{BEM} = \frac{1}{2} s\widehat{BF}$.

Từ đó suy ra $\widehat{IHM} + \widehat{HIM} = \frac{1}{2} s\widehat{BE} + \frac{1}{2} s\widehat{BF} = \frac{1}{2} s\widehat{EF} = 90^\circ$ hay $IM \perp HK$.

d) Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC thì $OB = R$.

Dựng đường cao BN của tam giác ABC ($N \in AC$). Ta có

$$\begin{aligned} BC^2 &= BN^2 + NC^2 = BN^2 + (AC - AN)^2 = AC^2 + BN^2 + AN^2 - 2.AC.AN \\ &= AC^2 + AB^2 - 2AC.AB \cos \widehat{BAC} \text{ hay } BC^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos 60^\circ = b^2 + c^2 - bc. \end{aligned}$$

Do $\widehat{BAC} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{BOC} = 120^\circ \Rightarrow \widehat{BOM} = 60^\circ$. Trong tam giác vuông BOM ta có

$$\sin \widehat{BOM} = \frac{BM}{OB} \Leftrightarrow OB = \frac{BM}{\sin \widehat{BOM}} = \frac{BC}{2 \sin 60^\circ} = \frac{\sqrt{b^2 + c^2 - bc}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{b^2 + c^2 - bc}{3}}.$$

Vậy bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là $R = \sqrt{\frac{b^2 + c^2 - bc}{3}}$.

Câu 5

Ta viết lại $2(ab + bc + ca) = (a + b + c)^2 - (a^2 + b^2 + c^2) = (a + b + c)^2 - 3$ thì

$$2P = (a + b + c)^2 + 6(a + b + c) - 3.$$

Từ đánh giá quen thuộc: $(a + b + c)^2 \leq 3(a^2 + b^2 + c^2) = 9 \Rightarrow a + b + c \leq 3$. Ta cũng có

$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) \geq a^2 + b^2 + c^2 = 3 \Rightarrow a + b + c \geq \sqrt{3}$ dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi một trong hai số a hoặc b bằng 0 và $c = 0$.

Từ đó ta có $3 + 6\sqrt{3} - 3 \leq 2P \leq 3^2 + 6 \cdot 3 - 3 \Leftrightarrow 3\sqrt{3} \leq P \leq 12$.

GTLN của P bằng 12 tại $a = b = c = 1$, GTNN của P bằng $3\sqrt{3}$ khi $a = \sqrt{3}, b = 0, c = 0$ hoặc $a = 0, b = \sqrt{3}, c = 0$.

ĐỀ SỐ 02

Câu 1. Cho biểu thức $P = \left(\frac{x-2}{x+2\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}+2} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$ với $x > 0, x \neq 1$.

- a) Rút gọn P .
 b) Tìm các giá trị của x để $2P = 2\sqrt{x} + 5$.
 c) Chứng minh $P + \sqrt{x} > 3$

Câu 2. Trong mặt phẳng Oxy cho parabol $(P): y = \frac{x^2}{2}$ và đường thẳng $d: y = -\frac{2}{m}x + 2$ với $m \neq 0$.

- a) Khi $m = -\frac{4}{3}$ tìm tọa độ các giao điểm của (P) và (d) .
 b) Chứng minh đường thẳng (d) luôn cắt (P) tại 2 điểm M, N nằm ở 2 phía trục tung. Gọi I là điểm cố định mà (d) luôn đi qua. Tìm m để diện tích tam giác CID bằng $4\sqrt{5}$ với C, D lần lượt là hình chiếu vuông góc của M, N lên trục Ox .

Câu 3. Một ca nô xuôi dòng 108 km rồi ngược dòng 63 km, tổng thời gian cả đi lẫn về là 7 giờ.

Nếu ca nô xuôi dòng 81 km và ngược dòng 84 km thì tổng thời gian cũng hết 7 giờ. Biết vận tốc riêng của dòng nước không thay đổi. Tính vận tốc ca nô và vận tốc riêng dòng nước.

Câu 4. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp $(O; R)$, đường cao AH . Gọi I, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của H trên AB, AC .

- a) Chứng minh: A, I, H, K là tứ giác nội tiếp.
 b) Chứng minh: $AK \cdot AC = AI \cdot AB$ và $OA \perp IK$.
 c) Chứng minh: $AB \cdot AC = 2R \cdot AH$.
 d) Đường tròn ngoại tiếp tam giác AIK cắt (O) tại giao điểm thứ 2 là M (khác A). Chứng minh AM, IK, BC đồng quy.

Câu 5.

- a) Giải phương trình $\sqrt{7-x} + \sqrt{x-5} = x^2 - 12x + 38$.
 b) Tìm GTLN, GTNN của biểu thức $P = \sqrt[4]{1+x} + \sqrt[4]{1-x} + \sqrt[4]{1-x^2}$

LỜI GIẢI

Câu 1

- a) Ta có $P = \left(\frac{x-2}{x+2\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}+2} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} = \left[\frac{x-2}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)} \right] \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} = \frac{x+\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)} \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$
 $= \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)} \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$ với $x > 0, x \neq 1$.
 $2P = 2\sqrt{x} + 5 \Leftrightarrow 2 \left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} \right) = 2\sqrt{x} + 5 \Leftrightarrow 2x + 5\sqrt{x} = 2\sqrt{x} + 2 \Leftrightarrow 2x + 3\sqrt{x} - 2 = 0$
 $\Leftrightarrow (\sqrt{x}+2)(2\sqrt{x}-1) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$.

b) Ta có: $P + \sqrt{x} = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} + \sqrt{x} = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{x}$.

Theo bất đẳng thức Cô si dạng $a+b \geq 2\sqrt{ab}$

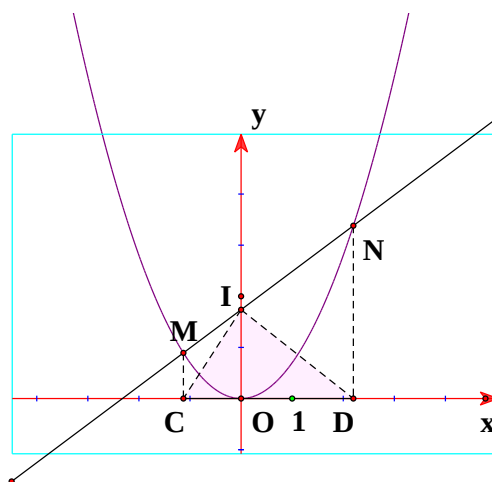
Ta có $\frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{x} \geq 2$ suy ra $P \geq 3$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi $\sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{x}}$ hay $x=1$ không thỏa mãn điều kiện $x \neq 1$

Vậy $P > 3, \forall x > 0; x \neq 1$.

Câu 2. Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là:

$$\frac{x^2}{2} = -\frac{2}{m}x + 2 \text{ với mọi } m \neq 0 \text{ hay } m^2x + 4x - 4m = 0$$



a) Khi $m = \frac{4}{3}$ thì (*) trở thành $4x^2 + 12x - 16 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+4) = 0$

$\Leftrightarrow x=1$ hoặc $x=-4$. Vậy (d) và (p) cắt nhau tại $A\left(1; \frac{1}{2}\right); B(-4; 8)$

b) Vì $\Delta' = 4 + 4m^2 > 0$ với mọi $m \neq 0$ nên phương trình (*) luôn có 2 nghiệm phân biệt tức là (d) cắt (P) tại 2 điểm phân biệt. Hơn nữa $x_1x_2 = \frac{-4m}{m} = -4 < 0$ nên hai giao điểm luôn nằm

về 2 phía trục tung. Giả sử $M(x_1; y_1), N(x_2; y_2)$ với $x_1 < 0 < x_2$ khi đó ta có $C(x_1; 0), D(x_2; 0)$

Để thấy parabol luôn đi qua điểm cố định là $I(0; 2)$ nên $OI = 2, CD = |x_1| + |x_2| = x_2 - x_1$

Suy ra diện tích tam giác ICD bằng $S = \frac{1}{2}OI \cdot OD = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (x_2 - x_1) = (x_2 - x_1)$

$\Rightarrow S^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2$

Theo hệ thức vi et ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{4}{m} \\ x_1x_2 = -4 \end{cases}$ suy ra $S^2 = \frac{16}{m^2} + 16$ từ giả thiết suy ra

$S^2 = \frac{16}{m^2} + 16 = 80 \Rightarrow m^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow m = \pm \frac{1}{2}$. Vậy $m = \pm \frac{1}{2}$ để diện tích tam giác ICD bằng $4\sqrt{5}$

Câu 3

Gọi Vận tốc ca nô là x (km/h), Vận tốc dòng nước là y (km/h) với $x > y > 0$.

Thời gian ca nô đi xuôi dòng 108 km là $\frac{108}{x+y}$ giờ, thời gian ca nô ngược dòng 63 km là $\frac{63}{x-y}$ giờ.

Theo giả thiết ta có $\frac{108}{x+y} + \frac{63}{x-y} = 7$ (1) Thời gian ca nô đi xuôi dòng 81 km là $\frac{81}{x+y}$ giờ,

Thời gian ca nô ngược dòng 84 km là $\frac{84}{x-y}$ giờ. Theo giả thiết ta có $\frac{81}{x+y} + \frac{84}{x-y} = 7$ (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình
$$\begin{cases} \frac{108}{x+y} + \frac{63}{x-y} = 7 \\ \frac{81}{x+y} + \frac{84}{x-y} = 7 \end{cases} \Rightarrow \frac{27}{x+y} - \frac{21}{x-y} = 0 \Leftrightarrow x-8y=0 \Leftrightarrow x=8y.$$

Thay vào phương trình (1) ta có $\frac{108}{9y} + \frac{63}{7y} = 7 \Leftrightarrow y=3 \Rightarrow x=24$

Vậy vận tốc ca nô là 24 km/h, vận tốc dòng nước là 3 km/h.

Câu 4

a) Do $IH \perp AB, KH \perp AC \Rightarrow \widehat{HIA} = \widehat{HKA} = 90^\circ$ nên 4 điểm A, I, H, K nằm trên đường tròn (J) đường kính AH .

b) Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông AHB, AHC ta có

$$AH^2 = AI \cdot AB, AH^2 = AK \cdot AC \Rightarrow AI \cdot AB = AK \cdot AC$$

Từ đó suy ra $\frac{AI}{AC} = \frac{AK}{AB} \Rightarrow \triangle AKI \sim \triangle ABC (c.g.c) \Rightarrow \widehat{AKI} = \widehat{ABC}$

$$\text{Ta có } \widehat{OAK} + \widehat{AKI} = \frac{1}{2}(180^\circ - \widehat{AOC}) + \widehat{ABC} = 90^\circ - \frac{1}{2}\widehat{AOC} + \frac{1}{2}\widehat{AOC} = 90^\circ \Rightarrow OA \perp KI$$

c) Kẻ đường kính AD của (O) thì $AD = 2R, \widehat{ACD} = 90^\circ$, tam giác vuông AHB, ACD

$$\widehat{ABH} = \widehat{ADC} \text{ cùng chắn cung } AC \text{ suy ra } \triangle AHB \sim \triangle ACD (g.g) \Rightarrow \frac{AH}{AB} = \frac{AC}{AD}$$

$$\Leftrightarrow AB \cdot AC = AH \cdot AD = 2R \cdot AH$$

d) Từ việc chứng minh: $\triangle AKI \sim \triangle ABC (c.g.c) \Rightarrow \widehat{AKI} = \widehat{ABC}$ suy ra tứ giác $BKCI$ nội tiếp.

Giả sử AM cắt BC tại N . Ta chứng minh N, K, I thẳng hàng.

Thật vậy giả sử NI cắt đường tròn (J) tại điểm K_1 . Khi đó ta có

$$\triangle NMI \sim \triangle NK_1A \Rightarrow NM \cdot NA = NI \cdot NK_1 \quad (1)$$

Mặt khác tứ giác $AMBC$ nội tiếp nên ta cũng suy ra $NB \cdot NC = NM \cdot NA \quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $NB \cdot NC = NI \cdot NK_1 \Rightarrow \triangle NBI \sim \triangle NK_1C \Rightarrow \widehat{NBI} = \widehat{NK_1C} \Rightarrow BIK_1C$ nội tiếp hay K_1 thuộc đường tròn ngoại tiếp tứ giác $BIKC \Rightarrow K \equiv K_1$ Hay N, I, K thẳng hàng, tức là AM, IK, BC đồng quy.

Câu 5

a) điều kiện $5 \leq x \leq 7$

Với mọi số thực a, b ta có: $(a-b)^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab \Leftrightarrow 2(a^2 + b^2) \geq (a+b)^2 \quad (**)$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b$ Áp dụng vào bài toán ta có :

$$(\sqrt{7-x} + \sqrt{x-5})^2 \leq 2(7-x+x-5) = 4 \Leftrightarrow \sqrt{7-x} + \sqrt{x-5} \leq 2 \text{ dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi}$$

$$7 - x = x - 5 \Leftrightarrow x = 6$$

Lại có $x^2 - 12x + 38 - 2 = (x - 6)^2 \geq 0$ suy ra $VP \geq VT$, dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = 6$

Vậy $x=6$ là nghiệm của phương trình.

b) Đặt $a = \sqrt[4]{1+x}, b = \sqrt[4]{1-x} \Rightarrow a, b \geq 0, a^4 + b^4 = 2$

Ta có: $P = a + b + ab$. Áp dụng bất đẳng thức ở (**) ta có

$$2(a^4 + b^4) \geq (a^2 + b^2)^2 = \frac{(a^4 + b^4)^2}{4} \Rightarrow (a + b)^4 \leq 8(a^4 + b^4) = 16 \Leftrightarrow a + b \leq 2$$

$$\text{Suy ra } P \leq a + b + \frac{(a + b)^2}{4} \leq 3$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = 1 \Leftrightarrow x = 0$

$$\text{Ta cũng có : } a^4 + b^4 \leq a^4 + 2a^2b^2 + b^4 \leq (a^2 + b^2)^2 \Rightarrow a^2 + b^2 \geq \sqrt{2},$$

$$\text{Mà } a^2 + b^2 \leq a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2 \text{ với mọi } a, b \geq 0. \text{ Suy ra } a + b \geq \sqrt{a^2 + b^2} \geq \sqrt[4]{2}$$

Vậy $p = a + b + ab \geq a + b \geq \sqrt[4]{2}$, dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = 0$ hoặc $b = 0$ tức là $x = 1$ hoặc $x = -1$

ĐỀ SỐ 3

Câu 1: Cho $A = \frac{x-2}{2+\sqrt{x}} (x \geq 0)$, $B = \left(\frac{8x\sqrt{x}-1}{2x-\sqrt{x}} - \frac{8x\sqrt{x}+1}{2x+\sqrt{x}} \right) : \frac{2x+1}{2x-1}$ với $x \geq 0, x \neq \frac{1}{2}, x \neq -\frac{1}{2}$

a) Chứng minh khi $x = 3+2\sqrt{2}$ thì $A = \frac{5\sqrt{2}-1}{7}$

b) Rút gọn B và tìm x để $\frac{A}{B} = \frac{x-2}{4\sqrt{x}}$

Câu 2:

Một phòng họp có 180 ghế được chia thành các dãy ghế có số ghế ở mỗi dãy bằng nhau. Nếu kê thêm mỗi dãy 5 ghế và bớt đi 3 dãy thì số ghế trong phòng không thay đổi. Hỏi ban đầu phòng họp được chia thành bao nhiêu dãy.

Câu 3: Trong mặt phẳng cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = (m-2)x + 3$

a) Chứng minh rằng khi m thay đổi thì (P) luôn cắt (d)

b) Gọi x_1, x_2 là hoành độ giao điểm A, B của (d) với (P) và $x_1 < 0 < x_2$. Xét các điểm

$A(x_1; x_1^2); B(x_2; x_2^2); C(x_1; 0); D(x_2; 0)$ Tìm m để hai tam giác AOC và BOD có diện tích bằng nhau.

Câu 4: Cho đường tròn tâm O đường kính $AB = 2R$, trên đoạn OA lấy điểm I ($I \neq A; I \neq O$) vẽ tia $Ix \perp AB$ cắt (O) tại C. Lấy điểm E trên cung nhỏ BC ($E \neq B; E \neq C$) nối AE cắt CI tại F, gọi D là giao điểm của BC với tiếp tuyến tại A của (O; R)

a) Chứng minh: BEFI là tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh: $AE \cdot AF = CB \cdot CD$

c) Tia BE cắt IC tại K. Giả sử I, F lần lượt là trung điểm của OA, IC. Chứng minh:

$\Delta AIF \sim \Delta KID$ từ đó tính IK theo R

d) Khi I là trung điểm của OA và E chạy trên cung nhỏ BC. Tìm vị trí điểm E để $EB + EC$ lớn nhất.

Câu 5: Cho các số thực $a, b, c \geq 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{2a-1} + \frac{1}{2b-1} + \frac{1}{2c-1} + \frac{4ab}{1+bc} + \frac{4bc}{1+ac} + \frac{4ca}{1+ab} \geq 9$$

Lời giải**Câu 1:**

a) Ta có $x = 3+2\sqrt{2} = (\sqrt{2}+1)^2 \Rightarrow \sqrt{x} = \sqrt{2}+1$ thay vào A ta có:

$$A = \frac{3+2\sqrt{2}-2}{\sqrt{2}+1+2} = \frac{2\sqrt{2}+1}{3+\sqrt{2}} = \frac{(2\sqrt{2}+1)(3-\sqrt{2})}{(3+\sqrt{2})(3-\sqrt{2})} = \frac{5\sqrt{2}-1}{7}$$

b) Ta có:

$$B = \left(\frac{8x\sqrt{x}-1}{2x-\sqrt{x}} - \frac{8x\sqrt{x}+1}{2x+\sqrt{x}} \right) : \frac{2x+1}{2x-1} = \left[\frac{(2\sqrt{x}-1)(4x+2\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}(2\sqrt{x}-1)} - \frac{(2\sqrt{x}+1)(4x-2\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}(2\sqrt{x}+1)} \right] : \frac{2x+1}{2x-1}$$

$$= \left(\frac{4x+2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} - \frac{4x-2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} \right) : \frac{2x+1}{2x-1} = 4 : \frac{2x+1}{2x-1} = \frac{4(2x-1)}{2x+1}$$

Suy ra $\frac{A}{B} = \frac{x-2}{2+\sqrt{x}} : \frac{4(2x-1)}{2x+1} = \frac{(x-2)(2x+1)}{4(\sqrt{x}+2)(2x-1)}$, yêu cầu bài toán tương đương

Với $\frac{(x-2)(2x+1)}{4(\sqrt{x}+2)(2x-1)} = \frac{x-2}{4\sqrt{x}} \Leftrightarrow (x-2) \left[\frac{2x+1}{(\sqrt{x}+2)(2x-1)} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right] = 0$ hay $x = 2$

Hoặc $\frac{2x+1}{(\sqrt{x}+2)(2x-1)} = \frac{1}{\sqrt{x}} (*)$. Ta có $(*) \Leftrightarrow \sqrt{x}(2x+1) = (\sqrt{x}+2)(2x-1)$

$$\Leftrightarrow 4x - 2\sqrt{x} - 2 = 0 \Leftrightarrow 2x - \sqrt{x} - 1 = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x}-1)(2\sqrt{x}+1) = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Đổi chiếu với điều kiện bài toán ta thấy $x=1; x=2$ thỏa mãn.

Câu 2 :

Gọi số dãy ghế ban đầu của phòng họp là x (dãy) điều kiện $x > 3, x \in \mathbb{N}$

Số ghế ở mỗi dãy lúc đầu là $\frac{180}{x}$ (ghế). Số dãy mới là : $x-3$ (dãy), Số ghế ở mỗi dãy lúc này

là :

$$\frac{180}{x-3} \text{ (ghế).}$$

Theo giả thiết ta có $\frac{180}{x-3} - \frac{180}{x} = 5 \Leftrightarrow 5x(x-3) = 540 \Leftrightarrow 5x^2 - 15x - 540 = 0$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3x - 108 = 0 \Leftrightarrow (x-12)(x+9) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 12 \\ x = -9 \end{cases}$$

Đổi chiếu điều kiện ban đầu ta thấy $x = 12$ thỏa mãn

Vậy số dãy ghế ban đầu của phòng là : 12 dãy.

Câu 3 :

a) Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là :

$$x^2 = (m-2)x + 3 \Leftrightarrow x^2 - (m-2)x - 3 = 0 (*)$$

Ta có $\Delta = (m-2)^2 + 12$ vì $(m-2)^2 \geq 0, \forall m$

Nên $\Delta \geq 12 > 0$ suy ra phương trình $(*)$ luôn có 2 nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ hay đường thẳng (d) luôn cắt (P) tại 2 điểm phân biệt A, B.

Theo hệ thức Vi – ét ta cũng có $x_1 x_2 = -3 < 0$ suy ra 2 giao điểm A, B nằm về hai phía trục tung.

b) Vì các điểm A, C có cùng hoành độ và $C \in Ox$ nên $AC \perp CO$ tương tự $BD \perp OD$

Tam giác ACO vuông tại C, BOD vuông tại D nên ta có:

$$S_{AOC} = \frac{1}{2} OC \cdot AC = |x_1| |y_1| = -\frac{x_1 x_1^2}{2} = \frac{-x^3}{2}, S_{BOD} = \frac{1}{2} |x_2| |y_2| = \frac{x_2 \cdot x_2^2}{2} = \frac{x_2^3}{2}$$

Yêu cầu bài toán tương đương với $-\frac{1}{2} x_1^3 = \frac{1}{2} x_2^3 \Leftrightarrow x_1^3 + x_2^3 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -x_2 \Leftrightarrow x_1 + x_2 = 0$ Theo hệ

thức Vi – ét ta có $x_1 + x_2 = m-2 \Rightarrow m-2 = 0 \Leftrightarrow m = 2$

Câu 4 :

a) Vì điểm E nằm trên (O) đường kính AB nên $\widehat{AEB} = 90^\circ$ Tứ giác IFEB có

$\widehat{AEB} + \widehat{FIB} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ nên IFEB là tứ giác nội tiếp.

b) Xét tứ giác AIF, AEB có $\widehat{AIF} = \widehat{AEB} = 90^\circ$, $\widehat{EAB}$ chung, Suy ra $\triangle AIF \sim \triangle AEB(1)$

(g.g) dẫn đến $\frac{AI}{AF} = \frac{AE}{AB} \Leftrightarrow AE.AF = AI.AB$ Vì C nằm trên (O) đường kính AB nên $\widehat{ACB} = 90^\circ$, AD là tiếp tuyến của (O)

Nên $\widehat{DAB} = 90^\circ$ áp dụng hệ thức lượng trong các tam giác vuông ACB, BAD ta có:

$$AI.AB = AC^2 = CD.CB \text{ suy ra } AE.AF = CD.CB$$

c) Tam giác AIF và KIB có:

$$\widehat{AIF} = \widehat{KIB} = 90^\circ, \widehat{IAF} = \widehat{IKB} = 90^\circ - \widehat{KBA} \text{ nên}$$

$$\Delta AIF \sim \Delta KIB \text{ (g-g)} \Rightarrow \frac{AI}{KI} = \frac{IF}{IB} \Rightarrow KI = \frac{AI.IB}{IF}$$

Vì I là trung điểm OA và $CI \perp OA$ nên

Tam giác OAC cân tại C , lại có $OC = OA = R$

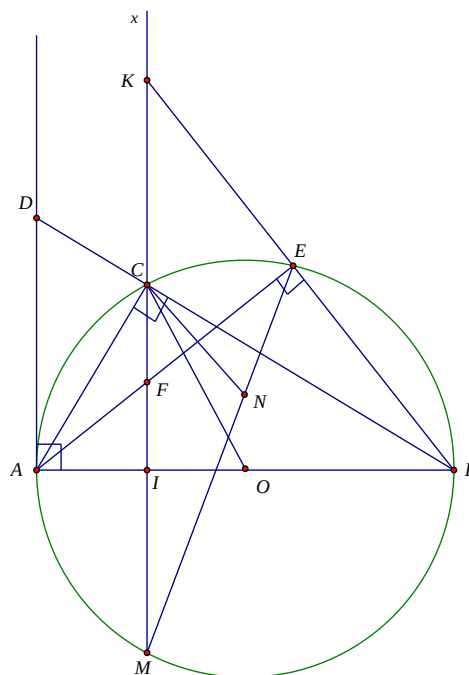
Nên tam giác OAC là tam giác đều, suy ra

$$\widehat{COA} = 60^\circ$$

$$\widehat{CBA} = \frac{1}{2}\widehat{COA} = 30^\circ, \text{ từ đó dễ tính được}$$

$$CI = \frac{\sqrt{3}}{2}R \Rightarrow IF = \frac{1}{2}CI = \frac{\sqrt{3}}{4}R \text{ nên}$$

$$KI = \frac{IA.IB}{IF} = \frac{IC^2}{\frac{1}{2}IC} = 2IC = \sqrt{3}R$$



d) Gọi M là giao điểm của tia CI với (O) ($M \neq C$) thì tam giác CIB cân tại B .

Kết hợp với chứng minh ở câu c: $\widehat{CBA} = 30^\circ \Rightarrow \widehat{CBM} = 60^\circ$ ta suy ra tam giác CBM đều. Lấy điểm N trên đoạn EM sao cho $EN = EC$, do $\widehat{CEM} = \widehat{CBM} = 60^\circ$ nên suy ra tam giác CEN đều. Xét các $\Delta CNM, \Delta CEB$ ta có: $\widehat{CNM} = 180^\circ - \widehat{CNE} = 120^\circ$, $\widehat{CEB} = 180^\circ - \widehat{CMB} = 120^\circ$ và $CE = CN$, $\widehat{CMN} = \widehat{CBE} \Rightarrow \widehat{MCN} = \widehat{BCE} \Rightarrow \Delta CNM = \Delta CEB$ (c-g-c) suy ra $MN = EB$.

Từ đó ta có: $EC + EB = EN + MN = EM \leq 2R$, dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi EM là đường kính của (O) , hay E là điểm đối xứng với M qua O .

Nhận xét: Nếu biết định lý Ptolemy thì ta có kết quả $EC.MB + EB.MC = BC.EM$ mà tam giác BMC đều nên $MB = MC = BC$ suy ra $EC + EB = EM$.

Bài tập tương tự: Cho đường tròn $(O; R)$ có đường kính AB , C là trung điểm của OA và dây $MN \perp OA$ tại C . Gọi K là điểm tùy ý trên cung nhỏ BM , H là giao điểm của AK, MN .

a) Chứng minh: $BCHK$ là tứ giác nội tiếp

b) Tính $AH.AK$ theo R

c) Xác định vị trí điểm K để $KM + KN + KB$ lớn nhất. Tính GTLN đó. (trích đề tuyển sinh lớp 10 TP Hà Nội, năm 2006).

KIẾN THỨC BỔ SUNG

a. Định lý Ptolemy cho tứ giác nội tiếp: Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp trong đường tròn (O) . Khi đó ta có: $AB.CD + AD.BC = AC.BD$

Chứng minh

Trên đường chéo BD lấy điểm E sao cho $\widehat{DAE} = \widehat{BAC}$
ta có $\widehat{DAE} = \widehat{BAC}$ và $\widehat{ADE} = \widehat{ACB}$ (cùng chắn $\widehat{AB}$) nên

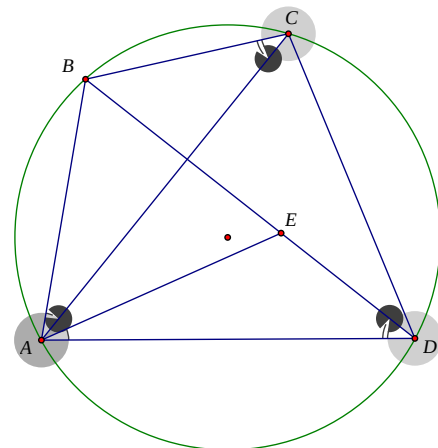
$$\triangle ADE \sim \triangle ACB \text{ (g - g)} \Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{DE}{BC}$$

$$\Rightarrow AD.BC = AC.DE \quad (1). \text{ Do } \widehat{DAE} = \widehat{CAB}$$

Nên $\widehat{DAC} = \widehat{EAB}$, lại có $\widehat{ABE} = \widehat{ACD}$
(cùng chắn $\widehat{AD}$)

$$\Rightarrow \triangle ABE \sim \triangle ACD \text{ (g - g)} \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{BE}{CD} \Rightarrow AB.CD = AC.BE \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $AB.CD + AD.BC = AC(BE + DE) = AC.BD$



b. Định lý Shooten:

Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn (O) . Chứng minh rằng với mỗi điểm M bất kỳ nằm trên đường tròn (O) thì một trong ba đoạn MA, MB, MC có một đoạn có độ dài bằng tổng độ dài hai đoạn kia.

Chứng minh

Xét điểm M nằm trên cung nhỏ BC .

Áp dụng định lý Ptolemy cho tứ giác nội tiếp $ABMC$

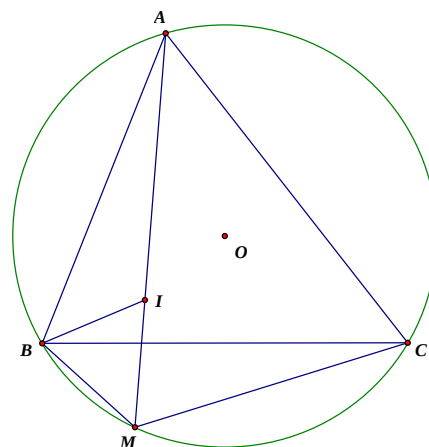
$$\text{Ta có: } MA.BC = MB.AC + MC.AB$$

$$\text{Vì } AB = AC = BC \text{ nên } MA = MB + MC$$

Tương tự nếu điểm M nằm trên cung nhỏ AC và AB

thì ta lần lượt có $MB = MC + MA$ và $MC = MA + MB$.

Suy ra đpcm.



Cách khác để chứng minh: $MA = MB + MC$ (trường hợp điểm M nằm trên các cung AB, AC tương tự)

Trên MA lấy điểm I sao cho $MI = MB$ ta cần chứng minh $MC = AI$. Thật vậy, ta có: $\widehat{BMI} = \widehat{ACB} = 60^\circ$ mà $MB = MI$ nên tam giác BIM đều, do đó $BI = BM$ và $\widehat{IBM} = 60^\circ$.

Ta lại có $\widehat{ABC} = 60^\circ$ nên $\widehat{ABC} = \widehat{IBM}$, suy ra $\widehat{CBM} = \widehat{ABI}$. Dễ dàng chứng minh được $\triangle BCM = \triangle BAI$ (c - g - c) nên $MC = AI$

Câu 5

$$\text{Đặt } P = \frac{1}{2a-1} + \frac{1}{2b-1} + \frac{1}{2c-1} + \frac{4ab}{1+ab} + \frac{4ac}{1+bc} + \frac{4ca}{1+ca}$$

Vì $a, b \geq 1 \Rightarrow (a-1)(b-1) \geq 0 \Rightarrow ab+1 \geq a+b$. Ta có: $(a-1)^2 \geq 0 \Rightarrow a^2 \geq 2a-1$ suy ra

$\frac{1}{2a-1} \geq \frac{1}{a^2}$, lại có $\frac{4ab}{1+ab} = \frac{4(ab+1)-4}{1+ab} = 4 - \frac{4}{1+ab} \geq 4 - \frac{4}{a+b}$, tương tự ta cũng có đánh giá với các biểu thức còn lại trong vế trái và suy ra: $P \geq \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + 12 - 4\left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}\right)$

Từ $(a+b)^2 \geq 4ab$ và bất đẳng thức Cauchy ta có: $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \geq \frac{2}{ab} \geq \frac{8}{(a+b)^2}$ suy ra

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + 12 - 4\left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}\right) \geq \frac{4}{(a+b)^2} + \frac{4}{(b+c)^2} + \frac{4}{(c+a)^2} - 4\left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}\right) + 12$$

Ta cũng có

$$\frac{4}{(a+b)^2} + \frac{4}{(b+c)^2} + \frac{4}{(c+a)^2} - 4\left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}\right) + 12 = \left(\frac{2}{a+b} - 1\right)^2 + \left(\frac{2}{b+c} - 1\right)^2 + \left(\frac{2}{c+a} - 1\right)^2 + 9$$

Nên suy ra $P \geq 9$. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

b) Vì $DEIC$ là tứ giác nội tiếp (O) nên $\widehat{NEI} = \widehat{NDC}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung IC). Ta cũng có $\widehat{EHI} = \widehat{DNC}$ đối đỉnh, suy ra $\triangle ENI$ đồng dạng với $\triangle DNC$ (g.g) dẫn tới $\frac{NE}{ND} = \frac{NI}{NC}$ (tỉ số đồng dạng) suy ra $NE \cdot NC = NI \cdot ND$

c) Để chứng minh: $MN \parallel AB$ ta chứng minh: $\widehat{AFE} = \widehat{EMN}$. Từ các tứ giác $BFEC, DEIC$ nội tiếp nên $\widehat{AFE} = \widehat{ACB} = \widehat{DIE}$ (học sinh tự trình bày chi tiết phần này). Ta cần chứng minh: $\widehat{DIE} = \widehat{EMN}$.

Tức là quy về chứng minh: $MENI$ là tứ giác nội tiếp.

Ta lại có: $\widehat{MEC} = \widehat{AEF} = \widehat{ABC} = \widehat{DEC} = \widehat{DIC}$ suy ra tứ giác $MENI$ nội tiếp (đpcm).

d) Để chứng minh: H, T, G thẳng hàng ta sẽ chứng minh: $\widehat{HGN} = \widehat{TGN}$, ta có biến đổi góc liên quan như sau $\widehat{HGN} = \widehat{HCK} = \widehat{KMN}$, như vậy để chứng minh: $\widehat{HGN} = \widehat{TGN}$ ta cần chỉ ra $\widehat{KMN} = \widehat{TGN} \Leftrightarrow \triangle TGN \sim \triangle KMN$. Thật vậy,

+ Xét tam giác ENM, TNC ta có: $\widehat{EMN} = \widehat{EIN} = \widehat{NCT}$, $\widehat{ENM} = \widehat{TNC}$ suy ra $\triangle ENM \sim \triangle TNC$ (g.g) suy ra $\frac{EN}{NT} = \frac{NM}{NC}$ (1)

+ Xét tam giác ENK, GNC ta có: $\widehat{KEN} = \widehat{CGN}$, $\widehat{ENK} = \widehat{GNC} \Rightarrow \triangle ENK \sim \triangle GNC$ (g.g) suy ra $\frac{EN}{GN} = \frac{NK}{NC}$ (2). Từ (1) và (2) ta suy ra $\frac{NK}{NT} = \frac{NM}{NG}$ suy ra $\triangle TGN \sim \triangle KMN$ (c.g.c) đpcm.

Câu 5:

Ta có: $P = (a^2 + 2ab + b^2) + c^2 - 2ab + abc = (3-c)^2 + c^2 - ab(2-c)$

Từ giả thiết ta có: $ab(2-c) \geq 0$ và $0 \leq ab \leq \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{(3-c)^2}{4} \Rightarrow \frac{1}{4}(c^3 - 3c + 18) \leq P \leq (3-c)^2 + c^2$

Ta có $\frac{1}{4}(c^3 - 3c + 18) = \frac{1}{4}[(c-1)^2(c+2) + 16] \geq \frac{16}{4} = 4$, dấu đẳng thức xảy ra tại $a = b = c = 1$

Do $0 \leq c \leq 1 \Rightarrow c(c-1) \leq 0$ dẫn tới $2c^2 - 6c + 9 = 2c(c-1) - 4c + 9 \leq 9$. Dấu đẳng thức xảy ra tại $c = 0, ab = 0, a + b + c + abc = 3$ hay $c = 0, a = 3, b = 0$ hoặc $c = 0, a = 0, b = 3$

Kết luận GTNN của P là 4, GTLN của P là 9.

Nhận xét:

+ Giả thiết $0 \leq c \leq 1$, giúp bài toán nhẹ nhàng hơn.

+ Nếu không có $0 \leq c \leq 1$ ta có thể giả sử $c = \min\{a, b, c\} \Rightarrow 3 = a + b + c \geq 3c \Rightarrow c \leq 1$.

Có thể tìm GTNN của P theo cách: Trong 3 số $a-1, b-1, c-1$ luôn tồn tại 2 số cùng dấu.

Giả sử $a-1, b-1$ cùng dấu, suy ra $(a-1)(b-1) \geq 0 \Leftrightarrow ab \geq a+b-1 = 2-c$

Suy ra

$$\begin{aligned} \Rightarrow 2P &= 2(a^2 + b^2) + 2c^2 + 2c.ab \geq (a+b)^2 + 2c^2 + 2c(2-c) = (3-c)^2 + 2c^2 + 2c(2-c) \\ &= c^2 - 2c + 9 = (c-1)^2 + 8 \geq 8 \end{aligned}$$

suy ra $P \geq 4$.

ĐỀ SỐ 5**Câu 1:**

Cho $A = \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} + \frac{\sqrt{x}+2}{3-\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}+2}{x-5\sqrt{x}+6}$, $B = \frac{1}{\sqrt{x}+1}$ với $x \geq 0, x \neq 4, x \neq 9$

a) Rút gọn A

b) Tính giá trị của A khi $x = 7 + 4\sqrt{3}$

c) Đặt $P = \frac{A}{B}$, tìm x để: $P \leq 4$

Câu 2: Một ô tô dự định đi từ A đến B cách nhau 148 km trong một thời gian đã định. Sau khi đi được 1 giờ thì ô tô bị chặn bởi tàu hỏa trong 5 phút, vì vậy để đến B đúng giờ ô tô phải chạy với vận tốc tăng thêm 2 km/h so với lúc đầu. Tính vận tốc ô tô trong 1 giờ đầu.

Câu 3:

1) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \sqrt{2x-1} + \frac{1}{|2y-1|} = 1 \\ 3\sqrt{2x-1} - \frac{2}{|2y-1|} = -2 \end{cases}$$

2) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường thẳng $(d): y = (2m+1)x - (m^2 + m)$ và parabol $(P): y = x^2$.

a) Khi $m=1$ tìm tọa độ giao điểm của (P) và (d)

b) Tìm tất cả các giá trị m để đường thẳng (d) cắt (P) tại 2 điểm có hoành độ lần lượt là x_1, x_2 sao cho $\sqrt{2x_1+1} = x_2$.

Câu 4: Từ điểm A ở ngoài $(O; R)$ vẽ hai tiếp tuyến AE, AF đến $(O; R)$, đường thẳng qua O vuông góc với AO cắt các tia AE, AF lần lượt tại B, C. Gọi D là điểm nằm trên cung nhỏ EF của $(O; R)$, tiếp tuyến tại D của $(O; R)$ cắt AB, AC lần lượt tại M, N.

a) Chứng minh: Tứ giác AEOF nội tiếp.

b) Gọi I là giao điểm của DE và MO, K là giao điểm của DF và NO. Chứng minh:

$$OI \cdot OM = ON \cdot OK$$

c) Chứng minh: $\triangle OMN \sim \triangle BMO$.

d) Khi điểm D thay đổi trên cung nhỏ EF của $(O; R)$ hãy tìm giá trị lớn nhất của diện tích tam giác AMN .

Câu 5: Giải phương trình $\left(\frac{x^3-x}{2}\right)^3 = 2x + \sqrt[3]{\frac{x^3+3x}{2}}$

LỜI GIẢI

Câu 1:

a) Điều kiện xác định: $\begin{cases} x \geq 0 \\ x \neq 4 \\ x \neq 9 \end{cases}$

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } A &= \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-3} + \frac{\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)} \\ &= \frac{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3) - (\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2) + \sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)} = \frac{1}{\sqrt{x}-2} \end{aligned}$$

$$\text{b) Khi } x = 7 + 4\sqrt{3} = (2 + \sqrt{3})^2 \Rightarrow \sqrt{x} = 2 + \sqrt{3} \text{ thì } A = \frac{1}{2 + \sqrt{3} - 2} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{c) Ta có } P = \frac{A}{B} = \frac{1}{\sqrt{x}-2} : \frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2} \leq 4 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2} - 4 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+1-4(\sqrt{x}-2)}{\sqrt{x}-2} \leq 0$$

$$\text{Hay } \frac{3(3-\sqrt{x})}{\sqrt{x}-2} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}-2} \geq 0 (*).$$

$$\text{TH1: } \begin{cases} \sqrt{x}-3 \geq 0 \\ \sqrt{x}-2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 9 \\ x > 4 \end{cases} \text{ đối chiếu với điều kiện suy ra } x > 9$$

$$\text{TH2: } \begin{cases} \sqrt{x}-3 \leq 0 \\ \sqrt{x}-2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 9 \\ x < 4 \end{cases} \text{ đối chiếu với điều kiện suy ra } 0 \leq x < 4$$

Vậy $P \leq 4$ khi và chỉ khi $0 \leq x < 4$ hoặc $x > 9$.

Câu 2:

Gọi vận tốc dự định của ô tô là x (km/h) điều kiện $x > 0$. Thời gian dự định đi từ A đến B là $\frac{148}{x}$ (giờ)

Quãng đường ô tô đi được trong 1 giờ đầu là x (km). Quãng đường còn lại là $148 - x$ (km).

Thời gian đi quãng đường còn lại là: $\frac{148-x}{x+2}$ (giờ). Tổng thời gian thực tế ô tô để ô tô đi từ A

đến B là: $1 + \frac{1}{12} + \frac{148-x}{x+2} = \frac{1802+x}{12(x+2)}$ (giờ). Theo giả thiết ta có:

$$\frac{148}{x} = \frac{1802+x}{12(x+2)} \Leftrightarrow x^2 - 26x - 3352 = 0 \Leftrightarrow (x-48)(x+74) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 48 \\ x = -74 \end{cases} \text{ Đối chiếu với điều kiện}$$

ban đầu ta có $x = 48$ thỏa mãn. Vậy vận tốc ô tô trong 1 giờ đầu là 48 km/h.

Câu 3:

1) Điều kiện $x \geq \frac{1}{2}, y \neq \frac{1}{2}$. Ta nhân phương trình thứ nhất của hệ với 2 thì thu được

$$\begin{cases} 2\sqrt{2x-1} + \frac{2}{|2y-1|} = 2 \\ 3\sqrt{2x-1} - \frac{2}{|2y-1|} = -2 \end{cases} \quad \text{cộng hai phương trình của hệ mới ta có:}$$

$5\sqrt{2x-1} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2x-1} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$. Với $x = \frac{1}{2}$ thay vào phương trình ban đầu của hệ ta có:

$$\frac{1}{|2y-1|} = 1 \Leftrightarrow |2y-1| = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2y-1=1 \\ 2y-1=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1 \\ y=0 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có 2 nghiệm là: $(x; y) = \left(\frac{1}{2}; 1\right)$

2) Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) là

$$x^2 = (2m+1)x - m^2 - m \Leftrightarrow x^2 - (2m+1)x + m^2 + m = 0$$

a) Khi $m=1$ ta có: $x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=2 \end{cases}$

Với $x=1$ thì $y=1$, với $x=2$ thì $y=4$. Vậy (d) cắt (P) tại 2 điểm $A(1;1), B(2;4)$.

b) Để (d) cắt (P) tại 2 điểm phân biệt điều kiện là $\Delta > 0 \Leftrightarrow (2m+1)^2 - 4(m^2 + m) > 0 \Leftrightarrow 1 > 0$ luôn đúng. Vậy (d) luôn cắt (P) tại 2 điểm phân biệt x_1, x_2 .

Ta có $x^2 - (2m+1)x + m^2 + m = 0 \Leftrightarrow (x-m)(x-m-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=m \\ x=m+1 \end{cases}$

TH1: $x_1 = m, x_2 = m+1$. Thay vào điều kiện $\sqrt{2x_1} + 1 = x_2$ ta có

$$\sqrt{2m} + 1 = m+1 \Leftrightarrow \sqrt{2m} = m \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 0 \\ m^2 - 2m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=0 \\ m=2 \end{cases} \quad \text{kiểm tra lại ta thấy cả 2 giá trị } m \text{ đều}$$

thỏa mãn.

TH2: $x_1 = m+1, x_2 = m$ thay vào điều kiện $\sqrt{2x_1} + 1 = x_2$ ta có:

$$\sqrt{2(m+1)} + 1 = m \Leftrightarrow \sqrt{2(m+1)} = m-1 \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 1 \\ m^2 - 4m - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 1 \\ (m-2)^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 1 \\ m = \pm\sqrt{5} + 2 \end{cases}$$

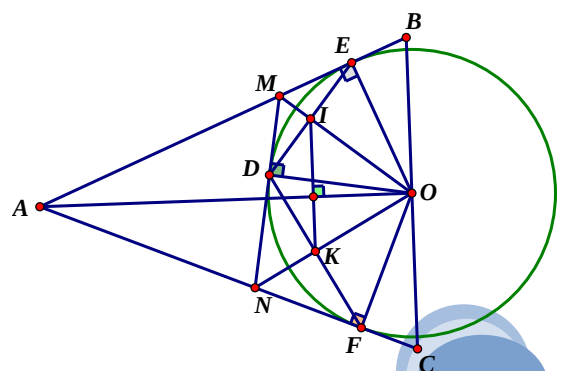
Đối chiếu điều kiện ta thấy $m = \sqrt{5} + 2$ thỏa mãn.

Vậy $m \in \{0; 2; 2 + \sqrt{5}\}$ là tất cả các giá trị cần tìm.

Câu 4:

a) Vì AE, AF là các tiếp tuyến của $(O; R)$ tại E và F nên

$\widehat{AEO} = \widehat{AFO} = 90^\circ$. Suy ra $\widehat{AEO} + \widehat{AFO} = 180^\circ$ hay $AEOF$ là tứ giác nội tiếp (tổng 2 góc đối bằng



180°

- b) Vì MD, ME là các tiếp tuyến của $(O; R)$ nên $MO \perp DE$ tại trung điểm I của DE (tính chất 2 tiếp tuyến cắt nhau), tương tự $NO \perp DF$ tại trung điểm K của DF . Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông OEM ta có: $OI \cdot OM = OE^2 = R^2$

Tương tự $OK \cdot ON = OF^2 = R^2$ từ đó suy ra $OI \cdot OM = ON \cdot OK$

- c) Dễ thấy OM, ON lần lượt là phân giác $\widehat{EOD}, \widehat{FOD}$. Từ đó ta có:

$$\widehat{MON} = \frac{1}{2} \widehat{EOF} = \frac{180^\circ - \widehat{BAC}}{2} = 90^\circ - \widehat{OAB} = \widehat{ABC}, \widehat{MNO} = \widehat{ONC} \Rightarrow \triangle OMN \sim \triangle BMO \text{ (g.g)} \quad (1)$$

- d) Chứng minh tương tự câu c ta suy ra $\Rightarrow \triangle OMN \sim \triangle CON$ (g.g) (2). Từ (1) và (2) ta suy ra $\triangle BMO \sim \triangle CON$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{MB}{OC} = \frac{BO}{CN} \Rightarrow BM \cdot CN = OB \cdot OC = \frac{BC^2}{4} (*)$$

Ta có $S_{AMN} = S_{ABC} - S_{BMNC}$ nên S_{AMN} đạt giá trị lớn nhất khi S_{BMNC} đạt giá trị nhỏ nhất. Ta có

$$S_{BMNC} = S_{BOM} + S_{MON} + S_{NOC} = \frac{1}{2} R (BM + MN + NC)$$

Chú ý rằng: $MD = ME, DN = DF$ nên

$$BM + MN + NC = BE + CF + 2(ME + NF) = 2(BE + CF + ME + NF) - BE - CF = 2(BM + CN) - 2BE$$

$$S_{BMNC} = R(BM + CN - BE)$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si ta có:

$$BM + CN \geq 2\sqrt{BM \cdot CN} = BC \text{ từ (1) và (2) suy ra } S_{BMNC} \geq R(\sqrt{BM \cdot CN} - BE) = R(BC - BE).$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $MN \parallel BC$ khi và chỉ khi D là giao điểm của đường trung trực của BC với đường tròn (O) . Vậy diện tích tam giác AMN đạt giá trị lớn nhất khi D là giao của đường trung trực của BC với đường tròn (O) . Khi đó giá trị lớn nhất của diện tích tam giác AMN là $\frac{1}{2} AO \cdot BC - R(BC - BE)$

Câu 5:

Ta viết lại phương trình thành: $(x^3 - x)^3 - 16x = 4\sqrt[3]{4x^3 + 12x}$

$$\text{Đặt } y = \sqrt[3]{4x^3 + 12x} \text{ ta có hệ sau: } \begin{cases} (x^3 - x)^3 - 16x = 4y \\ 4x^3 + 12x = y^3 \end{cases}$$

Cộng hai vế hpt ta thu được: $(x^3 - x)^3 + 4(x^3 - x) = y^3 + 4y$. Đặt $z = x^3 - x$ ta có:

$$z^3 + 4z = y^3 + 4y \Leftrightarrow (z - y)(z^2 + yz + y^2 + 4) = 0 (*) \text{ . Vì } z^2 + zy + y^2 + 1 = (z + \frac{y}{2})^2 + \frac{3y^2}{4} + 1 > 0$$

với mọi y, z nên $(*)$ tương đương với: $(x^3 - x)^3 = 4x^3 + 12x \Leftrightarrow x[x^2(x^2 - 1)^3 - 4x^2 - 12] = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2(x^2 - 1)^3 - 4x^2 - 12 = 0 \end{cases} \text{ .}$$

Xét phương trình: $x^2(x^2 - 1)^3 - 4x^2 - 12 = 0 (1)$.

Đặt $t = x^2 - 1 \geq -1 \Rightarrow x^2 = t + 1$ thì phương trình (1) trở thành :

$$(t+1)t^3 - 4(t+1) - 12 = 0 \Leftrightarrow t^4 + t^3 - 4t - 16 = 0 \Leftrightarrow (t-2)(t+2)(t^2+t+4) = 0, \text{ do } t \geq -1 \Rightarrow t+2 > 0$$

và $t^2 + t + 4 = (t + \frac{1}{2})^2 + \frac{15}{4} > 0$ nên phương trình có nghiệm duy nhất $t = 2 \Rightarrow x^2 = 3 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3}$.

Vậy phương trình đã cho có 3 nghiệm là : $x = 0; x = \pm\sqrt{3}$.

ĐỀ SỐ 06

Câu 1: Cho biểu thức : $A = \frac{2\sqrt{x}+3}{5x-10\sqrt{x}}; B = \frac{2}{\sqrt{x}-2} + \frac{3}{2\sqrt{x}+1} - \frac{5\sqrt{x}-7}{2x-3\sqrt{x}-2} (x > 0, x \neq 4)$

- Tính giá trị của A khi $x = 5 + 2\sqrt{6}$.
- Rút gọn B.
- Tìm x sao cho $C = B : A$ nhận giá trị là một số nguyên.

Câu 2: Khoảng cách giữa hai tỉnh A,B là 60 km . Hai người đi xe đạp cùng khởi hành một lúc đi từ A đến B với vận tốc bằng nhau . Sau khi đi được một giờ thì xe của người thứ nhất bị hỏng nên phải đứng lại sửa xe 20 phút còn người thứ 2 tiếp tục đi với vận tốc ban đầu . Sau khi sửa xe xong người thứ nhất tiếp tục đi với vận tốc lớn hơn lúc đầu 4km/h nên đến B cùng lúc với người thứ hai . Tính vận tốc hai người lúc đầu.

Câu 3:

1) Giải hpt :
$$\begin{cases} \frac{7}{\sqrt{x-7}} - \frac{4}{\sqrt{y+6}} = \frac{5}{3} \\ \frac{5}{\sqrt{x-7}} + \frac{3}{\sqrt{y+6}} = \frac{13}{6} \end{cases}$$

2) Cho phương trình : $x^2 - 2mx + (m-1)^3 = 0$ (m là tham số)

- Giải phương trình khi $m = -1$.
- Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt trong đó có một nghiệm bằng bình phương nghiệm còn lại.

Câu 4: Cho đường tròn tâm (O;R) và một điểm N nằm ngoài (O) . Từ N kẻ hai tiếp tuyến NA, NB đến (O) (A,B là hai tiếp điểm) . Gọi E là giao điểm của AB , ON .

- Chứng minh NAOB là tứ giác nội tiếp .
- Tính AB biết ON = 5cm, R = 3cm.
- Kẻ tia Nx trong góc ANO cắt (O) tại C,D (C nằm giữa N và D) . Chứng minh : $\widehat{NEC} = \widehat{OED}$.
- Qua N kẻ cát tuyến thứ hai với đường tròn là NPQ (P nằm giữa N,Q) . Gọi I là giao điểm CQ, DP . Chứng minh : A,B,I thẳng hàng.

Câu 5: Cho hai số dương x,y thỏa mãn $x \geq 2y$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = \frac{2x^2 + y^2 - 2xy}{xy}$.

LỜI GIẢI

Câu 1:

- Khi $x = 5 + 2\sqrt{6} = (\sqrt{3} + \sqrt{2})^2 \Rightarrow \sqrt{x} = \sqrt{3} + \sqrt{2}$ thay vào A ta có :

$$A = \frac{2\sqrt{x}+3}{5\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)} = \frac{2(\sqrt{3}+\sqrt{2})+3}{5(5+2\sqrt{6})-10(\sqrt{3}+\sqrt{2})} \quad (\text{Học sinh tự rút gọn}).$$

b) Với $x > 0; x \neq 4$ ta có :

$$B = \frac{2}{\sqrt{x}-2} + \frac{3}{2\sqrt{x}+1} - \frac{5\sqrt{x}-7}{2x-3\sqrt{x}-2} = \frac{2(2\sqrt{x}+1)+3(\sqrt{x}-2)-(5\sqrt{x}-7)}{(\sqrt{x}-2)(2\sqrt{x}+1)} = \frac{2\sqrt{x}+3}{(\sqrt{x}-2)(2\sqrt{x}+1)}.$$

c) Ta có : $A = \frac{2\sqrt{x}+3}{5\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)}$ nên $C = B : A = \frac{2\sqrt{x}+3}{(\sqrt{x}-2)(2\sqrt{x}+1)} \cdot \frac{5\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)}{2\sqrt{x}+3} = \frac{5\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+1}.$

Vì $\sqrt{x} > 0, \forall x > 0, x \neq 4$ nên $C = \frac{5\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+1} > 0$ ta có : $C = \frac{5\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+1} = \frac{5}{2} - \frac{5}{2(2\sqrt{x}+1)} < \frac{5}{2} \Rightarrow 0 < C < \frac{5}{2}.$

Kết hợp với ĐK $C \in \mathbb{Z}$ nên suy ra $C \in \{1; 2\}$.

+ Nếu $C = 1 \Leftrightarrow 5\sqrt{x} = 2\sqrt{x} + 1 \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = \frac{1}{9}$ thỏa mãn điều kiện.

+ Nếu $C = 2 \Leftrightarrow 5\sqrt{x} = 4\sqrt{x} + 2 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 2 \Leftrightarrow x = 4$ không thỏa mãn điều kiện.

Vậy $x = \frac{1}{9}$ thì C là một số nguyên.

Câu 2: Gọi vận tốc hai người lúc đầu là x (km/h). thời gian xe thứ 2 đi từ A đến B là $60/x$ giờ.

Quãng đường người thứ nhất đi được sau 1 giờ là x (km/h). Sau khi tăng vận tốc thì người thứ nhất đi với vận tốc mới là $x+4$ (km/h). Thời gian người thứ nhất đi tiếp cho đến khi đến

B là : $\frac{60-x}{x+4}$. Theo giả thiết ta có :

$$\frac{60-x}{x+4} + \frac{1}{3} + 1 = \frac{60}{x} \Leftrightarrow \frac{180-3x+4(x+4)}{3(x+4)} = \frac{60}{x} \Leftrightarrow x^2 + 16x - 720 = 0 \Leftrightarrow (x-20)(x+36) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 20 \\ x = -36 \end{cases}$$

Đối chiếu với ĐK thì $x = 20$ thỏa mãn.

Vậy vận tốc ban đầu của hai người là 20km/h.

Câu 3: a) Điều kiện $x > 7; y > -6$, ta viết lại hệ thành :

$$\begin{cases} \frac{21}{\sqrt{x-7}} - \frac{12}{\sqrt{y+6}} = 5 \\ \frac{20}{\sqrt{x-7}} + \frac{12}{\sqrt{y+6}} = \frac{26}{3} \end{cases}$$

Cộng hai pt của hệ ta thu được : $\frac{41}{\sqrt{x-7}} = \frac{41}{3} \Rightarrow \sqrt{x-7} = 3 \Rightarrow x-7=9 \Rightarrow x=16$ thay vào ta tìm

được : $\frac{7}{3} - \frac{4}{\sqrt{y+6}} = \frac{5}{3} \Leftrightarrow \frac{4}{\sqrt{y+6}} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \sqrt{y+6} = 6 \Leftrightarrow y+6=36 \Leftrightarrow y=30$ (thỏa mãn ĐK)

Vậy HPT có nghiệm $(x;y) = (16; 30)$.

b) + Khi $m = -1$, ta có pt : $x^2 + 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x+4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -4 \end{cases}$

+ Điều kiện để pt có hai nghiệm phân biệt là : $\Delta' = m^2 - (m-1)^3 > 0(*)$

Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của pt, theo Vi-ét ta có : $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m(1) \\ x_1 x_2 = (m-1)^3(2) \end{cases}$

Giả sử $x_1 = x_2^2$, thay vào (2), ta được $x_2 = m-1; x_1 = (m-1)^2$. Thay hai nghiệm x_1, x_2 vào (1), ta

được : $(m-1)^2 + (m-1) = 2m \Leftrightarrow m^2 - 3m = 0 \Rightarrow \begin{cases} m=0 \\ m=3 \end{cases}$ kiểm tra điều kiện (*) ta thấy cả hai giá trị của m đều thỏa mãn.

Câu 4:

a) Vì NA, NB là các tiếp tuyến của (O)

nên $\widehat{NAO} = \widehat{NBO} = 90^\circ$.

Suy ra : $\widehat{NAO} + \widehat{NBO} = 180^\circ \Rightarrow$

Tứ giác NAOB nội tiếp.

b) Khi ON = 5cm, R = 3 cm, theo tính chất 2 tiếp tuyến cắt nhau ta có : AB = 2 AE.

Và $AE \perp NO$ tại E, áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông AON ta có : $OA^2 = OE.ON$. Suy ra

$$OE = \frac{OA^2}{ON} = \frac{9}{5} \Rightarrow NE = NO - OE = 5 - \frac{9}{5} = \frac{16}{5}$$

$$\text{Lại có : } AE^2 = EN.EO \Rightarrow AN^2 = \frac{16.9}{25} \Leftrightarrow AN = \frac{12}{5} \Rightarrow AB = 2.AN = \frac{24}{5}.$$

c) Xét tam giác NCA, NAD có : $\widehat{AND}$ chung và $\widehat{NAC} = \widehat{NDA} = \frac{1}{2} \text{ sđ}$

$$\widehat{AC} \Rightarrow \triangle NCA \sim \triangle NAD (g.g) \Rightarrow \frac{NC}{NA} = \frac{NA}{ND} \Rightarrow NA^2 = NC.ND (1)$$

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông NAO ta có : $NA^2 = NE.NO (2)$. Từ (1), (2) ta

$$\text{suy ra : } NC.ND = NE.NO \Leftrightarrow \frac{NC}{NE} = \frac{NO}{ND} \Rightarrow \triangle NCE \sim \triangle NOD (c.g.c) \Rightarrow \widehat{NEC} = \widehat{NDO}$$

Suy ra tứ giác CEOD nội tiếp (góc ngoài một đỉnh bằng góc đối). Mặt khác tam giác OCD cân tại O nên ta có biến đổi góc : $\widehat{NEC} = \widehat{NDO} = \widehat{OCD} = \widehat{OED} \Rightarrow \widehat{NEC} = \widehat{OED}$.

d) Tương tự câu c ta có : PEOQ nội tiếp.

Ta có :

$$\widehat{CEP} = \widehat{CEN} + \widehat{NEP} = \widehat{ODC} + \widehat{OQP} = \frac{1}{2}(180^\circ - \widehat{COD}) + \frac{1}{2}(180^\circ - \widehat{POQ})$$

$$\frac{1}{2}(180^\circ - \widehat{COD}) + \frac{1}{2}(180^\circ - \widehat{POQ}) = 180^\circ - \frac{1}{2}(\widehat{COD} + \widehat{POQ}) = \frac{360^\circ - (\widehat{COD} + \widehat{POQ})}{2} = \frac{1}{2}(\widehat{COP} + \widehat{DOQ})$$

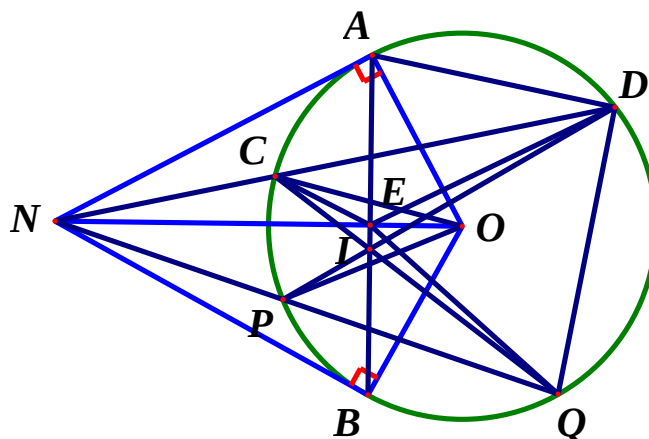
$$\frac{1}{2}(\widehat{COP} + \widehat{DOQ}) = \frac{1}{2} \text{ sđ } \widehat{CP} + \frac{1}{2} \text{ sđ } \widehat{QD} = \widehat{CIP}$$

Suy ra CEIP nội tiếp, tương tự DEIQ nội tiếp.

Suy ra : $\widehat{IEP} = \widehat{ICP} = \widehat{IDQ} = \widehat{IEQ}$ hay EI là phân giác $\widehat{PEQ}$ (3). Từ chứng minh câu c ta suy ra :

$\widehat{CEA} = \widehat{DEA}$ hay EA là phân giác của $\widehat{CED}$, tương tự ta suy ra EB là phân giác của $\widehat{PEQ}$ (4).

Từ (3), (4) suy ra : EI = EB hay I, A, B thẳng hàng.



Câu 5:
$$P = \frac{2x^2 + y^2 - 2xy}{xy} = \frac{2(x-2y)^2 + 6xy - 7y^2}{xy} = \frac{2(x-2y)^2}{xy} + 6 - \frac{7y}{x}$$

Do $x \geq 2y \Rightarrow \frac{x}{y} \geq 2 \Rightarrow -\frac{y}{x} \geq -\frac{1}{2}$. Dẫn tới : $P \geq 0 + 6 - \frac{7}{2} = \frac{5}{2}$, dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = 2y$. Vậy GTNN của P là $\frac{5}{2}$.

ĐỀ SỐ 07

Câu 1: Cho biểu thức : $A = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}, B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$ với $x \geq 0, x \neq 1$

- Tìm x để $A=2$.
- Chứng tỏ A.B không phụ thuộc vào x.
- Tìm x để $A \geq B$.

Câu 2: Trong giờ thể dục hai bạn An và Bình chạy bền trên một quãng đường dài 2km và xuất phát cùng một thời điểm. Biết bạn An chạy bền với vận tốc TB lớn hơn vận tốc TB của bạn Bình là 2km/h và về đích sớm hơn bạn Bình 5 phút. Tính thời gian chạy hết quãng đường của mỗi bạn (biết vận tốc của mỗi bạn không đổi trong suốt quãng đường).

Câu 3: a) Giải hpt:
$$\begin{cases} \frac{2x}{x+1} + \sqrt{y} = -1 \\ \frac{1}{x+1} + 2y = 4 \end{cases}$$

- Cho pt bậc hai : $x^2 - 2(m-1)x + m^2 - 2m - 3 = 0$ với m là tham số.
+ Chứng minh rằng : Phương trình luôn có hai nghiệm pb với mọi m.
+ Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của pt. Tìm m để $x_1 + 4 = \sqrt{x_2}$.

Câu 4: Cho đường tròn (O) đường kính BC. Một điểm A thuộc đường tròn (O) sao cho $AB > AC$. Tiếp tuyến tại A của (O) cắt BC tại D. Gọi E là điểm đối xứng của A qua BC, AE cắt BC tại M, Kẻ đường cao AH của tam giác ABE, AH cắt BC tại F.

- Chứng minh: AFEC là hình thoi.
- Chứng minh : $DC.DB = DM.DO$.
- Gọi I là trung điểm của AH, kéo dài BI cắt (O) tại điểm thứ 2 là K. Chứng minh : AIMK là tứ giác nội tiếp.
- Đường thẳng AK cắt BD tại N. Chứng minh : N là trung điểm của MD.

Câu 5: Cho các số thực không âm a, b, c sao cho $a+b+c=1$. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của $P = ac+bc-2018ab$

LỜI GIẢI

Câu 1:

a) Ta có $A = 2 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{x}+1 = 2(\sqrt{x}-1) \Leftrightarrow \sqrt{x} = 3 \Leftrightarrow x = 9$.

$$b) \text{ Ta có : } B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1) - \sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{x-2\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}.$$

$$\text{Suy ra : } A.B = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} \cdot \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} = 1.$$

$$c) \text{ Ta có : } A \geq B \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} \geq \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} - \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(\sqrt{x}+1)^2 - (\sqrt{x}-1)^2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{4\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} \geq 0$$

Vì $x \geq 0$ nên $\sqrt{x} \geq 0$ suy ra điều kiện là : $(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1) > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x}-1 > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} > 1 \Leftrightarrow x > 1$

Vậy để $A \geq B$ thì điều kiện là : $x > 1$.

Câu 2:

Gọi vận tốc TB của bạn Bình là x (km/h), suy ra vận tốc TB của bạn An là $x+2$ (km/h) .

Thời gian chạy hết quãng đường của bạn Bình là : $\frac{2}{x}$ (giờ). Thời gian bạn An chạy hết quãng

đường là : $\frac{2}{x+2}$ (giờ). Theo giả thiết ta có:

$$\frac{2}{x} - \frac{2}{x+2} = \frac{1}{12} \Rightarrow 24(x+2) - 24x = x(x+2) \Leftrightarrow x^2 + 2x - 48 = 0 \Leftrightarrow (x-6)(x+8) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=6 \\ x=-8 \end{cases} \text{ Đối chiếu với ĐK ta thấy } x=6 \text{ thỏa mãn.}$$

Vậy thời gian Bình chạy hết quãng đường là $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ (giờ), thời gian bạn An chạy hết quãng đường là $\frac{2}{6+2} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$ (giờ).

Câu 3:

a) Điều kiện : $y \geq 0, x \neq -1$. Ta viết lại hpt thành :

$$\begin{cases} \frac{2x+2-2}{x+1} + \sqrt{y} = -1 \\ \frac{1}{x+1} + 2y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-2}{x+1} + \sqrt{y} = -3 \\ \frac{2}{x+1} + 4y = 8 \end{cases}, \text{ cộng hai pt của hệ ta thu được:}$$

$$\sqrt{y} + 4y = 5 \Leftrightarrow 4y + \sqrt{y} - 5 = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{y}-1)(4\sqrt{y}+5) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{y} = 1(tm) \\ \sqrt{y} = -\frac{5}{4}(L) \end{cases}, \text{ suy ra : } y = 1$$

Thay vào pt thứ 2 ta tìm được : $x = -\frac{1}{2}$. Vậy hệ có nghiệm $(x; y) = \left(-\frac{1}{2}; 1\right)$.

b) Xét pt bậc hai : $x^2 - 2(m-1)x + m^2 - 2m - 3 = 0$ với m là tham số.

Ta có : $\Delta' = (m-1)^2 - (m^2 - 2m - 3) = 4 > 0$ nên pt luôn có hai nghiệm x_1, x_2 .

Trường hợp 1: $x_1 = m-3, x_2 = m+1$ điều kiện bài toán trở thành :

$$m+1 = \sqrt{m+1} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -1 \\ (m+1)^2 - (m+1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -1 \\ m(m+1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = -1 \end{cases} \text{ (thỏa mãn điều kiện).}$$

Trường hợp 2: $x_1 = m+1, x_2 = m-3$ điều kiện bài toán trở thành :

$$m+4 = \sqrt{m-3} \Leftrightarrow \begin{cases} m+4 \geq 0 \\ (m+4)^2 = m-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -4 \\ m^2 + 7m + 19 = 0 \end{cases} \text{ (vô nghiệm)}$$

Tóm lại : $m = 0$ hoặc $m = -1$.

Câu 4:

a) Do điểm E đối xứng với A qua đường

kính BC nên $E \in (O)$ dẫn tới

$$\widehat{BEC} = 90^\circ \Rightarrow BE \perp CE, \text{ lại có:}$$

$$AH \perp BE \Rightarrow AH \parallel CE(1), \text{ ta cũng có}$$

$AE \perp BM$ tại trung điểm M của BC nên F

là trực tâm tam giác ABE dẫn đến

$$EF \perp AB, \text{ mặt khác } AC \perp AB$$

Suy ra $EF \parallel AC$ (2). Từ (1) và (2) kết hợp với $AE \perp FC$ ta suy ra ACEF là hình thoi.

b) Do DA là tiếp tuyến của (O) nên $\widehat{CAD} = \widehat{ABD} = \frac{1}{2} \text{ số đo } \widehat{AC}$ suy ra

$$\triangle DAB \sim \triangle DCA (g.g) \Rightarrow \frac{DA}{DC} = \frac{DB}{DA} \Rightarrow DA^2 = DB \cdot DC(3)$$

Trong tam giác vuông OAD ($\widehat{OAD} = 90^\circ$) ta có : $AM \perp OD$ nên suy ra : $DM \cdot DO = AD^2(4)$.

Từ (3) và (4) ta có : $DB \cdot DC = DM \cdot DO$.

c) Do I là trung điểm AH nên MI là đường TB của tam giác AHE suy ra :

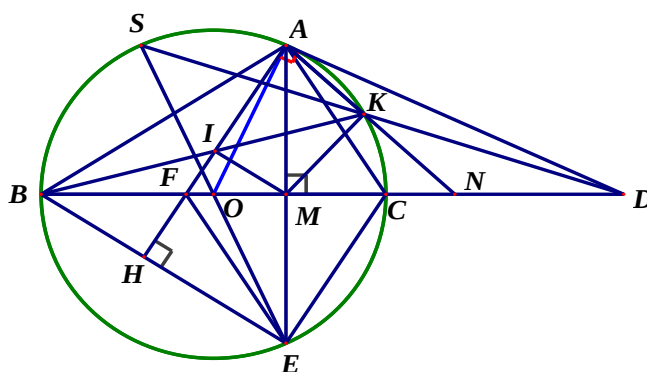
$MI \perp AH$ ($MI \parallel HE, HE \perp AH$). Ta có : $\widehat{IMA} = \widehat{AEB}$ (đồng vị), $\widehat{AEB} = \widehat{AKB}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung AB) $\Rightarrow \widehat{IMA} = \widehat{IKA} \Rightarrow AIMK$ là tứ giác nội tiếp.

d) Từ c/m ở câu c ta có : $\widehat{AKM} = 180^\circ - \widehat{AMI} = 90^\circ$. Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông AMN ta có : $MN^2 = NK \cdot NA(5)$. Kéo dài DK cắt (O) tại S. Ta dễ c/m được DE là tiếp

tuyến của (O). Ta có $\widehat{KMD} = \widehat{KAM} = \widehat{KAE} = \widehat{KED}$ suy ra KMDE là tứ giác nội tiếp

$$\Rightarrow \widehat{EKD} = \widehat{EMD} = 90^\circ$$

suy ra SE là đường kính của (O) nên $SA \perp AE \Rightarrow SA \parallel ND$. Tam giác KND và tam giác DNA



có $\widehat{AND}$ chung và $\widehat{NDK} = \widehat{DSA} = \widehat{KAD}$

$$\Rightarrow \Delta DNA \sim \Delta KND (g.g) \Rightarrow \frac{DN}{KN} = \frac{NA}{ND} \Rightarrow ND^2 = NA \cdot NK (6). \text{ Từ (5), (6) suy ra :}$$

$$ND^2 = MN^2 \Rightarrow ND = MN.$$

Câu 5: Từ giả thiết ta suy ra : $0 \leq a, b, c \leq 1$.

$$\text{Ta có : } P = ac + bc - 2018ab = c(a + b) - 2018ab = c(1-c) - 2018ab \leq c(1-c)$$

Theo bất đẳng thức Côsi ta có : $c(1-c) \leq \frac{(c+1-c)^2}{4} = \frac{1}{4}$, từ đó suy ra : $P \leq \frac{1}{4}$, dấu đẳng thức

$$\text{xảy ra khi và chỉ khi : } \begin{cases} c=1-c \\ ab=0 \\ a+b+c=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0, b=\frac{1}{2}, c=\frac{1}{2} \\ a=\frac{1}{2}, b=0, c=\frac{1}{2} \end{cases}$$

Ta cũng có : $4ab \leq (a+b)^2 = (1-c)^2$ suy ra

$$P \geq c(1-c) - \frac{1009}{2}(1-c)^2 = \frac{2c(1-c) - 1009(c^2 - 2c + 1)}{2} = \frac{2020c - 1011c^2 - 1009}{2}$$

$$= \frac{c(2020 - 1011c)}{2} - \frac{1009}{2} \geq -\frac{1009}{2}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi : $c=0, a-b=\frac{1}{2}$.

Vậy GTLN của P là $\frac{1}{4}$, GTNN của P là : $-\frac{1009}{2}$.

ĐỀ SỐ 08

Câu 1: Cho biểu thức : $P = \left(\frac{2}{\sqrt{x}-1} - \frac{5}{x+\sqrt{x}-2} \right) : \left[1 + \frac{3-x}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)} \right]$ với $x \geq 0, x \neq 1$.

a) Rút gọn P.

b) Tính giá trị của P khi : $x = 6 - 2\sqrt{5}$.

c) Tìm x để $P < \frac{2}{3}$.

Câu 2: a) Giải hpt:
$$\begin{cases} \sqrt{x+1} + \frac{2y}{y+1} = 2 \\ \sqrt{4x+4} - \frac{1}{y+1} = \frac{3}{2} \end{cases}$$

b) Tìm m để phương trình : $x^2 - (2m-1)x + m^2 + m - 3 = 0$ có hai nghiệm pb x_1, x_2 sao cho

$$A = \frac{x_1 + x_2 + 1}{x_1^2 + x_2^2 + 2(x_1 + x_2 + x_1x_2) + 5} \text{ lớn nhất.}$$

Câu 3: Quãng đường AB dài 120km. Lúc 7 giờ sáng một xe máy đi từ A đến B. khi đi được $\frac{3}{4}$ quãng đường thì xe bị hỏng nên phải dừng lại 10 phút để sửa rồi đi tiếp với vận tốc kém vận tốc lúc đầu là 10km/h. Biết xe máy đến B lúc 11h40 phút trưa cùng ngày. Giả sử vận tốc

xe máy trên $\frac{3}{4}$ quãng đường đầu không đổi và vận tốc xe máy trên $\frac{1}{4}$ quãng đường sau cũng không đổi. Hỏi xe máy bị hỏng lúc mấy giờ?

Câu 4: Cho đường tròn $(O;R)$ và một điểm M nằm ngoài (O) , qua M kẻ các tiếp tuyến MA, MB đến (O) , dựng cát tuyến MCD sao cho $MC < MD$ và tia MC nằm giữa hai tia MB, MO . Gọi I là trung điểm của CD .

a) Chứng minh: Tứ giác $AIOB$ nội tiếp.

b) Tia BI cắt (O) tại giao điểm thứ hai là J (J khác B). Chứng minh $AJ \parallel MD$.

c) Chứng minh: $AD^2 = AJ \cdot MD$.

d) Đường thẳng qua I song song với BD cắt AB tại K . Tia CK cắt OB tại G . Khi cát tuyến MCD thay đổi và thỏa mãn điều kiện đề bài thì tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác CIG thuộc đường tròn nào?

Câu 5: Cho các số thực a, b, c thỏa mãn: $0 \leq a, b, c \leq 1$. Tìm GTLN, GTNN của:

$$P = (a + b + c + 3) \left(\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1} \right).$$

LỜI GIẢI

Câu 1:

a) $P = \frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}.$

b) Khi $x = 6 - 2\sqrt{5} = (\sqrt{5}-1)^2 \Rightarrow \sqrt{x} = \sqrt{5}-1$ thay vào ta có: $P = \frac{2(\sqrt{5}-1)-1}{\sqrt{5}} = \frac{10-3\sqrt{5}}{5}.$

c) $P = \frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} < \frac{2}{3} \Leftrightarrow 6\sqrt{x}-3 < 2\sqrt{x}+2 \Leftrightarrow 4\sqrt{x} < 5 \Leftrightarrow \sqrt{x} < \frac{5}{4} \Leftrightarrow x < \frac{25}{16}$, kết hợp với ĐK ban đầu

ta suy ra: với $0 \leq x < \frac{25}{16}, x \neq 1$ thì $P < \frac{2}{3}.$

Câu 2:

a) Giải hpt:
$$\begin{cases} \sqrt{x+1} + \frac{2y}{y+1} = 2 \\ \sqrt{4x+4} - \frac{1}{y+1} = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Điều kiện: $x \geq -1, y \neq -1$ ta viết hệ lại dạng:

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} + \frac{2y+2-2}{y+1} = 2 \\ 2\sqrt{x+1} - \frac{1}{y+1} = \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+1} - \frac{2}{y+1} = 0 \\ 2\sqrt{x+1} - \frac{1}{y+1} = \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{x+1} - \frac{4}{y+1} = 0 \\ 2\sqrt{x+1} - \frac{1}{y+1} = \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{y+1} = \frac{3}{2} \\ 2\sqrt{x+1} - \frac{1}{y+1} = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Suy ra: $\begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}$ (thỏa mãn ĐK). Vậy hệ có nghiệm $(x; y) = (0; 1).$

b) Ta có: $\Delta' = (2m-1)^2 - 4(m^2 + m - 3) = 13 - 8m$. Để pt có hai nghiệm pb thì:

$\Delta' > 0 \Leftrightarrow 13 - 8m > 0 \Leftrightarrow m < \frac{13}{8}$. Theo hệ thức Vi-ét ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m - 1 \\ x_1 x_2 = m^2 + m - 3 \end{cases}$

Thay vào $A = \frac{x_1 + x_2 + 1}{x_1^2 + x_2^2 + 2(x_1 + x_2 + x_1 x_2) + 5} = \frac{2m}{4m^2 + 4} = \frac{m}{2(m^2 + 1)}$. Ta có:

$A - \frac{1}{4} = \frac{m}{2(m^2 + 1)} - \frac{1}{4} = \frac{-(m-1)^2}{4(m^2 + 1)} \leq 0$ với mọi giá trị của m , suy ra $A \leq \frac{1}{4}$, dấu đẳng thức xảy ra

khi và chỉ khi $m = 1$.

Câu 3:

Gọi vận tốc trên $3/4$ quãng đường ban đầu là x (km/h), (ĐK: $x > 10$) thì vận tốc trên $1/4$ quãng đường sau là: $x - 10$ (km/h).

Thời gian đi trên $3/4$ quãng đường ban đầu là: $\frac{90}{x}$ (giờ). Thời gian đi trên $1/4$ quãng đường

sau là: $\frac{30}{x-10}$ (giờ). Thời gian đi cả hai quãng đường là: 11 giờ 40 phút $- 7$ giờ $= \frac{9}{2}$ (giờ).

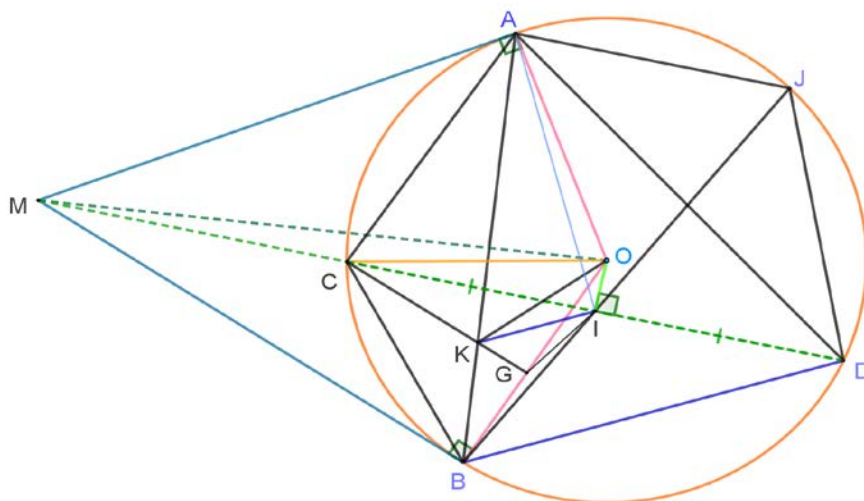
Nên ta có pt:

$$\frac{90}{x} + \frac{30}{x-10} = \frac{9}{2} \Leftrightarrow 180(x-10) + 60x = 9x(x-10) \Leftrightarrow 3x^2 - 110x + 600 = 0 \Leftrightarrow (x-30)(3x-20) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 30 \\ x = \frac{20}{3} \end{cases} \text{ Đối chiếu với ĐK ta thấy : } x = 30 \text{ thỏa mãn. Do đó thời gian đi trên } \frac{3}{4} \text{ quãng}$$

đường ban đầu là: $\frac{90}{3} = 3$ (giờ).

Vậy xe hỏng lúc 10 giờ.



- a) Vì I là trung điểm của dây CD nên $OI \perp CD$ (quan hệ vuông góc giữa đường kính và 1 dây), suy ra $\widehat{OIM} = 90^\circ$, MA, MB là tiếp tuyến của (O)
 nên $\widehat{OAM} = \widehat{OBM} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{OAM} + \widehat{OBM} = 180^\circ$ hay tứ giác $MAOB$ nội tiếp (tổng hai góc đối nhau bằng 180°). Tương tự $MAOI$ nội tiếp, suy ra năm điểm M, A, O, I, B nằm trên một đường tròn. Suy ra tứ giác $AIOB$ nội tiếp.
- b) Vì năm điểm M, A, O, I, B nằm trên một đường tròn nên $\widehat{MIB} = \widehat{MOB}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung MB). Mặt khác ta cũng có $\widehat{AIB} = \frac{1}{2}\widehat{AOB}$ (liên hệ giữa góc nội tiếp và góc ở tâm), mà $\widehat{AOB} = 2\widehat{MOB}$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau), từ đó suy ra $\widehat{AIB} = \widehat{MIB} \Rightarrow AI \parallel MD$. Do $AI \parallel MD$ nên $\widehat{JAD} = \widehat{ADM}$ (so le trong) (1). Tứ giác $AJDC$ nội tiếp nên $\widehat{AJD} = \widehat{ACM}$ (2), ta có $\triangle MCA \sim \triangle MAD$ (g.g) (học sinh tự chứng minh) suy ra $\widehat{MCA} = \widehat{MAD}$ (3). Từ (2) và (3) ta suy ra $\widehat{AJD} = \widehat{MAD}$ (4). Từ (1), (4) ta có: $\triangle DAM \sim \triangle AJD$ (g.g) suy ra $\frac{AD}{AJ} = \frac{DM}{AD}$ (cạnh tương ứng) hay $AD^2 = JA \cdot MD$.
- c) Vì $IK \parallel BD$ nên $\widehat{KIC} = \widehat{CDB}$ (đồng vị), mà $\widehat{CDB} = \widehat{CAK}$ (cùng chắn cung BC) suy ra $\widehat{KIC} = \widehat{KAC} \Rightarrow ACKI$ nội tiếp (hai đỉnh liên tiếp A, I cùng nhìn cạnh CK dưới 1 góc bằng nhau). Từ đó suy ra $\widehat{CKA} = \widehat{CIA}$ (5) (góc nội tiếp cùng chắn cung CA). Mặt khác do 4 điểm A, I, M, B nằm trên cùng một đường tròn nên $\widehat{AIM} = \widehat{ABM}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung BM) (6).
 Từ (5), (6) suy ra $\widehat{CKA} = \widehat{MBA} \Rightarrow CK \parallel MB$ mà $MB \perp OB \Rightarrow CK \perp OB$ tại G . Tứ giác $CGIO$ có $\widehat{CGO} = \widehat{CIO} = 90^\circ$ nên $CGOI$ là tứ giác nội tiếp đường tròn đường kính CO (hai đỉnh liên tiếp G, I cùng nhìn cạnh CO bằng 90°). Suy ra bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác CGI bằng $\frac{CO}{2} = \frac{R}{2}$, hay tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác CIG thuộc đường tròn tâm O bán kính $\frac{R}{2}$.

Câu 5.

Đặt $x = c + 1, y = b + 1, z = a + 1$ suy ra $1 \leq x, y, z \leq 2$.

Khi đó ta có: $A = (x + y + z) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) = 3 + \frac{x}{y} + \frac{y}{x} + \frac{y}{z} + \frac{z}{y} + \frac{z}{x} + \frac{x}{z}$.

Vì $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$ nên $A \geq 9$, dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z$ hay $a = b = c$

Để tìm GTLN của P ta giả sử $1 \leq x \leq y \leq z \leq 2$ ta có:
$$\begin{cases} \left(\frac{x}{y} - 1 \right) \left(\frac{y}{z} - 1 \right) \geq 0 \\ \left(\frac{y}{x} - 1 \right) \left(\frac{z}{y} - 1 \right) \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{z} + 1 \geq \frac{x}{y} + \frac{y}{z} \\ \frac{z}{x} + 1 \geq \frac{y}{x} + \frac{z}{y} \end{cases}$$

Từ đó suy ra $P \leq 5 + 2 \left(\frac{x}{z} + \frac{z}{x} \right)$, để ý rằng: $\frac{x}{z} + \frac{z}{x} - \frac{5}{2} - \frac{(x-2)(2x-z)}{2xz} \leq 0$

Do $x - 2z < 0, 2x - z \geq 2 - 2 = 0$ suy ra $P \leq 10$, dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi hai số bằng nhau và một số bằng 2 lần hai số còn lại.

ĐỀ SỐ 09

Câu 1. Cho $P = \left(\frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}-2} + \frac{\sqrt{x}+2}{3-\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}+2}{x-5\sqrt{x}+6} \right) : \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$ với $x > 0, x \neq 4, x \neq 9$

a) Rút gọn P.

b) Tìm x nguyên để $P < 0$.

c) Tìm x để $Q = \frac{1}{P}$ nhỏ nhất

Câu 2.

a) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho Parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = mx + 4$. Tìm tất cả các giá trị m để đường thẳng (d) cắt đồ thị (P) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho diện tích tam giác OAB bằng 8.

b) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x + \frac{1}{x} + y + \frac{1}{y} = \frac{9}{2} \\ xy + \frac{1}{xy} = \frac{5}{2} \end{cases}$$

Câu 3.

Trên quãng đường AB dài 210 km, tại cùng một thời điểm một xe máy khởi hành từ A đến B và một ô tô khởi hành từ B đi về A . Sau khi gặp nhau, xe máy đi tiếp 4 giờ nữa thì đến B và ô tô đi tiếp 2 giờ 15 phút nữa thì đến A . Biết rằng vận tốc ô tô và xe máy không thay đổi trong suốt chặng đường. Tính vận tốc của xe máy và ô tô.

Câu 4

Từ điểm M nằm ngoài đường tròn (O) kẻ các tiếp tuyến MA, MB đến (O) (A, B là các tiếp điểm) và cát tuyến MCD sao cho $MC < MD$ và tia MC nằm giữa 2 tia MA, MO . Gọi H là giao điểm của AB và MO , E là trung điểm của CD , đường thẳng CH cắt (O) tại giao điểm thứ 2 là F (khác C). Đường thẳng DF cắt các tia MA, MB lần lượt tại P, Q .

a) Chứng minh: EM là tia phân giác của $\widehat{AEB}$.

b) Chứng minh: $MH.MO = MC.MD$.

c) Chứng minh: $DF \parallel AB$.

d) Gọi X là giao điểm của EP với AD , Y là giao điểm của EQ với BD . Chứng minh: HD chia đôi XY .

Câu 5.

Tìm các số thực a, b, c thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 26; a + b = 5; b + c \geq 7$

Lời giải

Câu 1

a) Điều kiện xác định:
$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x \neq 4 \\ x \neq 9 \end{cases}$$

Ta có:
$$P = \left[\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-3} + \frac{\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)} \right] : \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$$

$$= \left[\frac{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3) - (\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2) + \sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)} \right] : \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$$

$$= \frac{x-9-x+4+\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)} \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)}$$

b) Ta có $P < 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)} < 0 \Leftrightarrow \sqrt{x}(\sqrt{x}-2) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \sqrt{x}-2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x < 4.$

Do x nguyên nên $x \in \{1; 2; 3\}$.

c) Đặt $\sqrt{x}+1=t \geq 1 \Rightarrow \sqrt{x}=t-1$. Ta có:

$$P = \frac{\sqrt{x}+1}{x-2(\sqrt{x}+1)+2} = \frac{t}{(t-1)^2-4t+3} \Rightarrow \frac{1}{P} = \frac{t^2-4t+3}{t} = t-4+\frac{3}{t}$$

Theo bất đẳng thức Cauchy ta có: $t+\frac{3}{t} \geq 2\sqrt{3} \Rightarrow \frac{1}{P} \geq 2\sqrt{3}-4$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $t = \frac{3}{t} \Leftrightarrow t = \sqrt{3} \Leftrightarrow \sqrt{x}+1 = \sqrt{3} \Leftrightarrow x = 4-2\sqrt{3}$.

Vậy GTNN của $\frac{1}{P}$ là $2\sqrt{3}-4$ tại $x = 4-2\sqrt{3}$.

Câu 2

a) Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) là: $x^2 = mx+4 \Leftrightarrow x^2 - mx - 4 = 0$

Ta có $\Delta = m^2 + 16 > 0$ với mọi m nên phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt, suy ra đường thẳng (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B .

Để ý rằng đường thẳng (d) luôn đi qua điểm cố định $I(0;4)$ nằm trên trục tung. Ngoài ra nếu gọi $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ thì $x_1 \cdot x_2 = -4 < 0$ nên hai giao điểm A, B nằm về hai phía trục tung. Giả

sử $x_1 < 0 < x_2$ thì ta có $S_{OAB} = S_{OAI} + S_{OBI} = \frac{1}{2}AH.OI + \frac{1}{2}BK.OI$ với H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của hai điểm A, B trên trục Oy .

Ta có $OI = 4, AH = |x_1| = -x_1; BK = |x_2| = x_2 \Rightarrow S_{OAB} = 2(x_2 - x_1)$

$$\Rightarrow S_{OAB}^2 = 4(x_2 - x_1)^2 = 4[(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2].$$

Theo định lý Vi-ét ta có $x_1 + x_2 = m, x_1 \cdot x_2 = -4$

Thay vào ta có: $\Rightarrow S_{OAB}^2 = 4(m^2 + 16) = 64 \Leftrightarrow m = 0$.

b) Đặt $x+y=u, xy=v$ với $v \neq 0$. Hệ đã cho trở thành
$$\begin{cases} u + \frac{u}{v} = \frac{9}{2} & (1) \\ v + \frac{1}{v} = \frac{5}{2} & (2) \end{cases}$$

Phương trình (2) có dạng $2v^2 - 5v + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u = 2 \\ v = \frac{1}{2} \end{cases}$

+ Với $v = 2$ thay vào PT (1) tìm được $u = 3$. Ta có hệ phương trình $\begin{cases} x+y=3 \\ xy=2 \end{cases}$ nên x, y là

nghiệm của phương trình $X^2 - 3X + 2 = 0$, tức là $(x; y) = (1; 2), (2; 1)$.

+ Với $v = \frac{1}{2}$ thay vào PT (1) tìm được $u = \frac{3}{2}$. Ta có hệ phương trình $\begin{cases} x + y = \frac{3}{2} \\ xy = \frac{1}{2} \end{cases}$ nên x, y là

nghiệm của phương trình $X^2 - \frac{3}{2}X + \frac{1}{2} = 0$, tức là $(x; y) = \left(1; \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}; 1\right)$

Từ đó suy ra hệ đã cho có tất cả bốn nghiệm.

Câu 3

Gọi vận tốc xe máy là x (km/h). Điều kiện $x > 0$. Gọi vận tốc ô tô là y (km/h). Điều kiện $y > 0$.

Thời gian xe máy dự định đi từ A đến B là: $\frac{210}{x}$ (giờ).

Thời gian xe máy ô tô đi từ B đến A là:

$\frac{210}{y}$ (giờ).

Quãng đường xe máy đi được kể từ khi gặp ô tô cho đến khi đến B là $4x$ (km).

Quãng đường ô tô đi được kể từ khi gặp xe máy cho đến khi đến A là $\frac{9}{4}y$ (km).

Theo giả thiết ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} \frac{210}{x} - \frac{210}{y} = 4 - \frac{9}{4} \\ 4x + \frac{9}{4}y = 210 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{30}{x} - \frac{30}{y} = \frac{1}{4} \\ x = \frac{840 - 9y}{16} \end{cases} \quad (1) \quad (2)$$

Thay phương trình (2) vào phương trình (1) ta có:

$$y^2 + 240y - 11200 = 0 \Leftrightarrow (y - 40)(y + 280) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 40 \\ y = -280 \end{cases}$$

đối chiếu điều kiện $y = 40$ là giá trị thỏa mãn. Từ đó tính được $x = 30$. Vậy vận tốc xe máy là 30 km/h. vận tốc ô tô là 40 km/h.

Câu 4.

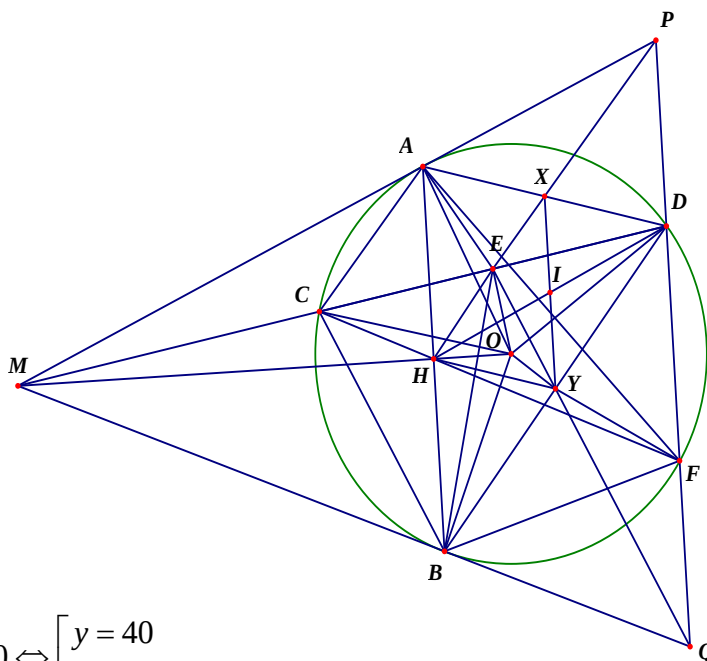
a) Chứng minh 5 điểm M, A, E, O, B nằm trên một đường tròn, chú ý $MA = MB$ nên $\widehat{AEM} = \widehat{BEM}$, suy ra đpcm.

b) Ta dễ chứng minh: $MA^2 = MC.MD$, áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông MAO , $AH \perp MO$ ta có $MA^2 = MH.MO$

Từ đó suy ra $MH.MO = MC.MD$.

c) Từ b ta có: $\frac{MH}{MC} = \frac{MD}{MO}$. Xét tam giác $\triangle MCH, \triangle MOD$ ta có: $\frac{MH}{MC} = \frac{MD}{MO}$ và $\widehat{OMD}$ chung nên

$\triangle MCH \sim \triangle MOD$ (g.g), suy ra $\widehat{MHC} = \widehat{MDO} \Rightarrow$ tứ giác $CHOD$ nội tiếp, ta có biến đổi góc $\widehat{MHC} = \widehat{MDO} = \widehat{OCD} = \widehat{ODH}$. $\widehat{MHC} = \widehat{ODH}$, các góc $\widehat{CHA}, \widehat{DHA}$ phụ với các góc $\widehat{MHC}, \widehat{ODH}$ tương ứng nên suy ra $\widehat{CHA} = \widehat{DHA}$ hay AH là phân giác của góc $\widehat{CHD}$.



Chú ý rằng: $\widehat{CHA} = \frac{1}{2}\widehat{CHD} = \frac{1}{2}\widehat{COD} = \widehat{CFD}$ mà hai góc $\widehat{CHA}, \widehat{CFD}$ đồng vị nên $AB \parallel DF$.

d) Ta có: $\widehat{AEM} = \widehat{MEB} = \widehat{MAB} = \widehat{MPQ}$ suy ra $APDE$ là tứ giác nội tiếp. Tương tự ta cũng có $BQDE$ là tứ giác nội tiếp. Ta có $\widehat{XEY} = \widehat{XDE} + \widehat{YED} = \widehat{DAP} + \widehat{DBQ} = \widehat{ABD} + \widehat{BAD} = 180^\circ - \widehat{ADB}$ nên $EXDY$ là tứ giác nội tiếp.

Từ đó suy ra $\widehat{DXY} = \widehat{DEY} = \widehat{DBQ} = \widehat{DAB}$ hay $XY \parallel AB$. Theo định lý Thales ta có ngay DH đi qua trung điểm I của XY .

Câu 5. Đặt $s = b + c \geq 7$ thì $a = 5 - b, c = s - b$ thay vào điều kiện $a^2 + b^2 + c^2 = 26$ ta thu được:

$$(5-b)^2 + b^2 + (s-b)^2 = 26 \Leftrightarrow 3b^2 - 2(s+5)b + s^2 - 1 = 0.$$

Coi đây là phương trình bậc 2 của b thì điều kiện để phương trình có nghiệm là

$$\Delta' = (s+5)^2 - 3(s^2 - 1) \geq 0 \Leftrightarrow s^2 - 10s - 14 \leq 0 \Leftrightarrow (s-7)(s+2) \leq 0 (*) \text{ do } s+2 > s-7 \text{ nên bất phương}$$

trình (*) tương đương với $\begin{cases} s-7 \leq 0 \\ s+2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -2 \leq s \leq 7$, theo giả thiết $s \geq 7$ suy ra

$$s = 7 \Rightarrow b = 4, a = 1, c = 3. \text{ Vậy } (a, b, c) = (1; 4; 3).$$

ĐỀ SỐ 10

Câu 1. Cho biểu thức

$$P = \frac{x\sqrt{x}-3}{x-2\sqrt{x}-3} - \frac{2(\sqrt{x}-3)}{\sqrt{x}+1} + \frac{\sqrt{x}+3}{3-\sqrt{x}} \text{ với } x \geq 0, x \neq 9.$$

a) Rút gọn biểu thức P .

b) Tính giá trị của P biết $x = 3 - 2\sqrt{2}$.

c) Tìm giá trị nhỏ nhất của P .

Câu 2. Nếu giảm chiều rộng của một mảnh vườn hình chữ nhật đi $3m$ và tăng chiều dài thêm $8m$ thì diện tích hình chữ nhật giảm đi $54m^2$. Nếu tăng chiều rộng của mảnh vườn thêm $2m$ và giảm chiều dài đi $4m$ thì diện tích hình chữ nhật tăng thêm $32m^2$. Hãy tính các kích thước của mảnh vườn.

Câu 3.

a) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \frac{x+2}{x-1} + \frac{2y}{y+1} = 5 \\ \frac{x}{x-1} - \frac{1}{y+1} = \frac{3}{2} \end{cases}.$$

b) Tìm tất cả các giá trị nguyên của m để phương trình $x^2 - 2(m+1)x + m^2 + 4 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + 2(m+1)x_2 \leq 3m^2 + 16$.

Câu 4. Cho tam giác ABC vuông tại A có $(AB < AC)$, trên cạnh AC lấy điểm D (D khác $A; C$) dựng $DE \perp BC$. Tiếp tuyến tại C của đường tròn tâm K ngoại tiếp tam giác DEC cắt tia DE tại M . Đường thẳng qua C vuông góc với MK cắt đường tròn (K) tại F (F nằm trong tam giác ABC).

a) Chứng minh: Tứ giác $ADEB$ nội tiếp và $CD \cdot CA = CE \cdot CB$.

b) Chứng minh $MF^2 = ME \cdot MD$.

c) Tia CF cắt cạnh AB tại I . Chứng minh $\triangle BIC \sim \triangle FEC$.

d) Chứng minh: I là trung điểm của AB .

Câu 5. Cho các số thực không âm a, b thỏa mãn $a + b = 2$. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ

nhất của $P = a\sqrt{b+1} + b\sqrt{a+1}$.

LỜI GIẢI

Câu 1:

$$P = \frac{x\sqrt{x}-3}{x-2\sqrt{x}-3} - \frac{2(\sqrt{x}-3)}{\sqrt{x}+1} + \frac{\sqrt{x}+3}{3-\sqrt{x}} = \frac{x\sqrt{x}-3-2(\sqrt{x}-3)^2-(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-3)}$$

$$\begin{aligned} \text{a) Ta có } &= \frac{x\sqrt{x}-3-2x+12\sqrt{x}-18-x-4\sqrt{x}-3}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-3)} = \frac{x\sqrt{x}-3x+8\sqrt{x}-24}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-3)} = \frac{x(\sqrt{x}-3)+8(\sqrt{x}-3)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-3)} \\ &= \frac{x+8}{\sqrt{x}+1} \end{aligned}$$

$$\text{b) Với } x=3-2\sqrt{2}=(\sqrt{2}-1)^2 \Rightarrow \sqrt{x}=\sqrt{x}-1 \text{ thay vào } P \text{ ta có: } P = \frac{11-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{11\sqrt{2}-4}{2}.$$

$$\text{c) Ta có } P = \frac{x-1+9}{\sqrt{x}+1} = \sqrt{x}-1 + \frac{9}{\sqrt{x}+1} = \sqrt{x}+1 + \frac{9}{\sqrt{x}+1} - 2.$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có $\sqrt{x}+1 + \frac{9}{\sqrt{x}+1} \geq 2\sqrt{9} = 6 \Rightarrow P \geq 4$. Dấu bằng xảy ra khi

và chỉ khi $\sqrt{x}+1 = \frac{9}{\sqrt{x}+1} \Leftrightarrow \sqrt{x}+1=3 \Leftrightarrow x=4$. Vậy GTNN của P bằng 4 khi $x=4$

Câu 2. Gọi chiều dài mảnh vườn là x (m), chiều rộng mảnh vườn là y (m). Điều kiện $x \geq 4, y \geq 3$. Diện tích mảnh vườn là $x.y$ (m^2).

$$\text{Theo giả thiết ta có hệ phương trình: } \begin{cases} (x+8)(y-3) = xy - 54 \\ (x-4)(y+2) = xy + 32 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x+8y = -30 \\ 2x-4y = 40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 50 \\ y = 15 \end{cases}.$$

Vậy chiều dài mảnh vườn là 50 (m), chiều rộng mảnh vườn là 15 (m).

Câu 3.

a) Điều kiện $x \neq -1; y \neq -1$. Ta biến đổi hệ phương trình đã cho thành

$$\begin{cases} \frac{x-1+3}{x-1} + \frac{2y+2-2}{y+1} = 5 \\ \frac{x-1+1}{x-1} - \frac{1}{y+1} = \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{x-1} - \frac{2}{y+1} = 2 \\ \frac{1}{x-1} - \frac{1}{y+1} = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{x-1} - \frac{2}{y+1} = 2 \\ \frac{2}{x-1} - \frac{2}{y+1} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{x-1} - \frac{2}{y+1} = 2 \\ \frac{1}{x-1} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x; y) = (2; 1)$.

$$\text{b) Xét phương trình } x^2 - 2(m+1)x + m^2 + 4 = 0 (*). \text{ Ta có } \Delta' = (m+1)^2 - (m^2 + 4) = 2m - 3$$

Điều kiện để phương trình (*) có hai nghiệm x_1, x_2 là $\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow m \geq \frac{3}{2}$.

Vì x_1 là nghiệm của phương trình (*) nên $x_1^2 - 2(m+1)x_1 + m^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow x_1^2 = 2(m+1)x_1 - m^2 - 4$, điều kiện bài toán trở thành:

$$2(m+1)x_1 - m^2 - 4 + 2(m+1)x_2 \leq 3m^2 + 16 \Leftrightarrow 2(m+1)(x_1 + x_2) - 4m^2 - 20 \leq 0$$

Theo hệ thức Vi-et: $x_1 + x_2 = 2(m+1)$ thay vào ta có

$$4(m+1)^2 - 4m^2 - 20 \leq 0 \Leftrightarrow 8m - 16 \leq 0 \Leftrightarrow m \leq 2. \text{ Kết hợp với điều kiện ban đầu ta suy ra}$$

$\frac{3}{2} \leq m \leq 2$. Do m là số nguyên ta suy ra $m = 2$.

Câu 4.

a) Vì tam giác ABC vuông tại E nên $\widehat{BAD} = 90^\circ$,

$ED \perp BC$ nên $\widehat{DEB} = 90^\circ$ suy ra $\widehat{BAD} + \widehat{DEB} = 180^\circ$.

Suy ra tứ giác $ADEB$ nội tiếp (tổng hai góc đối bằng 180°). Tam giác vuông BAC và tam giác vuông DEC

có $\widehat{BAC} = \widehat{DEC} = 90^\circ$ và $\widehat{ACB}$ chung nên

$\Delta BAC \sim \Delta DEC$ (g.g) suy ra $\frac{AC}{EC} = \frac{BC}{DC}$ hay

$$AC \cdot DC = CE \cdot BC.$$

b) Giả sử $CF \perp KM$ tại H thì H là trung điểm của FC (quan hệ vuông góc của đường kính đi qua trung điểm của một dây) suy ra KH là phân giác của $\widehat{FKC}$.

Xét các tam giác KFB và KCM có $KC = KF$ (là bán

kính của (K)), KM chung, $\widehat{FKM} = \widehat{CKM} \Rightarrow \Delta FKM = \Delta CKM$ (c.g.c) suy ra $\widehat{FKM} = \widehat{CKM} = 90^\circ$

hay MF là tiếp tuyến của (K) . Từ đó ta có $\widehat{MFE} = \widehat{EDF} = \frac{1}{2} \text{sd } \widehat{EF}$, dẫn đến $\Delta MEF \sim \Delta MFD$

(g.g) suy ra

$$\frac{ME}{MF} = \frac{MF}{MD} \text{ hay } MF^2 = ME \cdot MD.$$

c) Do điểm F nằm trên đường tròn đường kính CD nên $\widehat{CFD} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{DFI} = 90^\circ$ suy ra tứ giác $ADFI$ nội tiếp. Ta có $\widehat{IFE} = 360^\circ - \widehat{IFD} - \widehat{DFE} = 180^\circ - \widehat{IFD} + 180^\circ - \widehat{DFE}$, chú ý rằng các tứ giác $ADFI$, $DFEC$ nội tiếp nên ta có $180^\circ - \widehat{IFD} = \widehat{BAC}$, $180^\circ - \widehat{DFE} = \widehat{ACB}$ từ đó suy ra $\widehat{IFE} = \widehat{BAC} + \widehat{ACB} = 180^\circ - \widehat{ABC}$ hay $\widehat{IFE} + \widehat{IBE} = 180^\circ$ suy ra $IFEB$ là tứ giác nội tiếp. Dẫn đến $\widehat{BIC} = \widehat{FEC} \Rightarrow \Delta BIC = \Delta FEC$ (g.g) (1) (vì có $\widehat{ICB}$ chung và $\widehat{BIC} = \widehat{FEC}$).

d) Xét tam giác FEC và tam giác DKM ta có $\widehat{EFC} = \widehat{EDC} = \widehat{MDK}$,

$$\widehat{FEC} = 180^\circ - \widehat{FDC} = 180^\circ - \frac{1}{2} \widehat{FKC} = 180^\circ - \widehat{MKC} = \widehat{DKM} \Rightarrow \Delta FEC \sim \Delta DKM \quad (2).$$

Từ (1) và (2) suy ra $\Delta BIC \sim \Delta DKM \Rightarrow \frac{BI}{DK} = \frac{BC}{DM}$ (*), ta cũng có $\widehat{BAC} = \widehat{DCM} = 90^\circ$ và $\widehat{ABC} = \widehat{CDM}$ cùng phụ với

$\widehat{ACB}$ suy ra $\Delta BAC \sim \Delta DCM$ (g.g) suy ra $\frac{BA}{DC} = \frac{BC}{DM}$ (**). Từ (*) và (**) suy ra $\frac{BI}{DK} = \frac{BA}{DC}$ hay

$$\frac{BA}{BI} = \frac{DC}{DK} = 2 \text{ suy ra } I \text{ là trung điểm của } AB.$$

Câu 5.

Tìm GTLN: Ta có $\sqrt{(b+1)^2} \leq \frac{b+1+2}{2} = \frac{b+3}{2} \Rightarrow \sqrt{b+1} \leq \frac{b+3}{2\sqrt{2}}$ dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ

khi $b=1$. Tương tự ta cũng có $\sqrt{a+1} \leq \frac{a+3}{2\sqrt{2}}$, $P \leq \frac{1}{2\sqrt{2}} [a(b+3) + b(a+3)] = \frac{1}{2\sqrt{2}} (2ab + 3a + 3b)$,

lại có $4ab \leq (a+b)^2 = 4 \Rightarrow ab \leq 1$. Từ đó suy ra $P \leq \frac{1}{2\sqrt{2}} (2+6) = 2\sqrt{2}$. Dấu đẳng thức xảy ra khi

và chỉ khi $a=b=1$.

Tìm GTNN:

$$P^2 = a^2(b+1) + b^2(a+1) + 2ab\sqrt{(a+1)(b+1)} = ab(a+b) + a^2 + b^2 + 2ab\sqrt{(a+1)(b+1)}$$

Do $a, b \geq 0 \Rightarrow 2ab\sqrt{(a+1)(b+1)} \geq 0$, kết hợp với $a+b=2$ ta suy ra

$P^2 \geq 2ab + a^2 + b^2 = (a+b)^2 = 4 \Rightarrow P \geq 2$, Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=0; b=2$ hoặc $a=2; b=0$.

Kết luận: GTLN của P là $2\sqrt{2}$, GTNN của P là 2.

ĐỀ SỐ 11

Câu 1.

a) Giải phương trình $x+1+\sqrt{x^2-4x+1}=3\sqrt{x}$.

b) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 2x+(3-2xy)y^2=3 \\ 2x^2-x^3y=2x^2y^2-7xy+6 \end{cases}$$

Câu 2.

Cho $f(n) = \frac{4n+\sqrt{4n^2-1}}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}$ với n nguyên dương. Tính $f(1)+f(2)+\dots+f(40)$.

Câu 3.

a) Cho hai số tự nhiên $y > x$ thỏa mãn: $(2y-1)^2 = (2y-x)(6y+x)$. Chứng minh $2y-x$ là số chính phương.

b) Tìm các số nguyên dương x, y thỏa mãn $x^3 - y^3 = 13(x^2 + y^2)$.

c) Tìm các số nguyên dương a, b sao cho $\frac{a^3b-1}{a+1}, \frac{b^3a-1}{b+1}$ là các số nguyên dương.

Câu 4.

Cho tam giác ABC nội tiếp (O) . P là một điểm nằm trong tam giác ABC . Trung trực của CA, AB cắt PA tại E, F . Đường thẳng qua E song song với AC cắt tiếp tuyến tại C của (O) tại M . Đường thẳng qua F song song với AB cắt tiếp tuyến tại B của (O) tại N .

a) Chứng minh MN là tiếp tuyến của (O) .

b) Giả sử MN cắt cả đường tròn ngoại tiếp các tam giác ACM, ABN lần lượt tại S, Q khác MN . Chứng minh $\triangle ABC \sim \triangle ASQ$ và SB cắt CQ tại một điểm nằm trên (O) .

Câu 5.

a) Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $2(a^2 + ab + b^2) = 3(3 - c^2)$. Tìm GTLN, GTNN của

$$P = a + b + c.$$

b) Cho các số thực dương a, b, c sao cho $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng:

$$6(ab + bc + ca) + a(a-b)^2 + b(b-c)^2 + c(c-a)^2 \leq 2.$$

LỜI GIẢI

Câu 1.

a) Bình phương hai vế phương trình trở thành:

$$x+1+\sqrt{x^2-4x+1}=3\sqrt{x} \Leftrightarrow 2x^2-11x+2+2(x+1)\sqrt{x^2-4x+1}=0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2}(x+1)^2 + 2(x+1)\sqrt{x^2-4x+1} + \frac{5}{2}(x^2-4x+1)=0$$

Đặt $x+1=a, x^2-4x+1=b$ ta có phương trình: $-a^2+4ab+5b^2=0 \Leftrightarrow (a+b)(5b-a)=0$.

Phần còn lại khá đơn giản.

b) Xét phương trình thứ hai của hệ ta có:

$$2x^2 - x^3y = 2x^2y^2 - 7xy + 6 \Leftrightarrow x^2(2 - xy) = (xy - 2)(2xy - 3) \Leftrightarrow (xy - 2)(x^2 + 2xy - 3) = 0$$

Phương trình thứ nhất của hệ được viết lại thành:

$$2x + (3 - 2xy)y^2 = 3 \Leftrightarrow 2x(1 - y^3) + 3(y^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow (y - 1)[2x(1 + y + y^2) - 3(y + 1)] = 0. \text{ Từ đó học sinh tự giải tiếp.}$$

Câu 2.

Cho $f(n) = \frac{4n + \sqrt{4n^2 - 1}}{\sqrt{2n+1} + \sqrt{2n-1}}$ với n nguyên dương. Tính $f(1) + f(2) + \dots + f(40)$.

Ta đặt $\sqrt{2n+1} = a, \sqrt{2n-1} = b$ thì

$$f(n) = \frac{a^2 + b^2 + ab}{a + b} = \frac{(a-b)(a^2 + b^2 + ab)}{(a-b)(a+b)} = \frac{a^3 - b^3}{a^2 - b^2} = \frac{a^3 - b^3}{2} = \frac{1}{2}(\sqrt{(2n+1)^3} - \sqrt{(2n-1)^3})$$

Từ đó suy ra

$$f(1) + f(2) + \dots + f(40) = \frac{1}{2}[(\sqrt{3^3} - \sqrt{1^3}) + (\sqrt{5^3} - \sqrt{3^3}) + \dots + (\sqrt{81^3} - \sqrt{79^3})] = \frac{1}{2}(\sqrt{81^3} - \sqrt{1^3}) = 364$$

Câu 3

a) Ta có $a^3b - 1 = b(a^3 + 1) - (b+1):a+1 \Rightarrow b+1:a+1$. Tương tự $b^3a + 1 = a(b^3 - 1) + a+1:b-1$ suy ra $a+1:b-1$. Từ đó suy ra $b+1:b-1 \Leftrightarrow b-1+2:b-1 \Rightarrow b-1 \in U(2)$ suy ra $b=2$ hoặc $b=3$.

Với $b=2$ ta có $3:a+1 \Rightarrow a=2$, với $b=3$ ta có: $4:a+1 \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ a=3 \end{cases}$

Vậy các bộ số $(a;b)$ thỏa mãn điều kiện là: $(a;b) = (1;3), (2;2), (3;3)$.

b) Đặt $(x,y) = d \geq 1$ suy ra $x=ad, y=bd$ với $a > b, (a,b)=1$, thay vào phương trình ta có:

$$a^3d^3 - b^3d^3 = 13(a^2d^2 + b^2d^2) \Leftrightarrow d(a-b)(a^2 + ab + b^2) = 13(a^2 + b^2) \Rightarrow 13(a^2 + b^2):(a^2 + ab + b^2)$$

Ta lại có: $(a^2 + b^2, a^2 + ab + b^2) = (a^2 + b^2, ab) = 1$. Thật vậy giả sử

$$(a^2 + b^2, ab) = d_1 \Rightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 : d_1 \\ ab : d_1 \end{cases} \text{ giả sử } a:d_1 \Rightarrow b:d_1 \text{ mà } (a,b)=1 \Rightarrow d_1=1.$$

Như vậy ta có: $a^2 + b^2$ không chia hết cho $a^2 + ab + b^2$ suy ra

$$13:a^2 + ab + b^2 \Rightarrow a^2 + ab + b^2 = 13 \Rightarrow a=3, b=1 \Rightarrow x=15, y=5.$$

c) Vì $2y-1$ là số chính phương lẻ nên x là số lẻ.

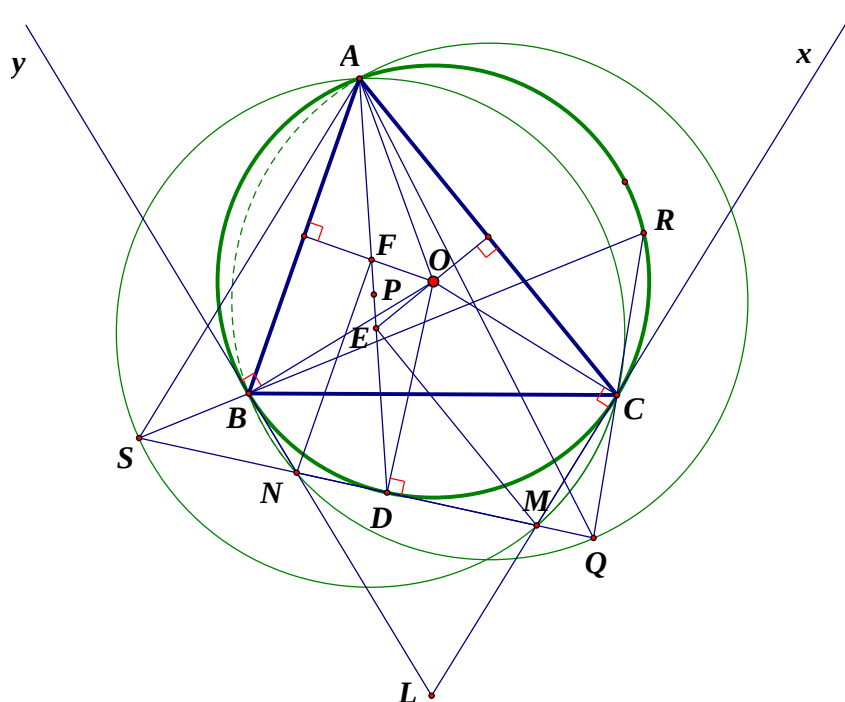
Gọi $d = (2y-x, 6y+x)$ với $d \in N, d$ lẻ. Suy ra

$$\begin{cases} 2y-x:d \\ 6y+x:d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y-x+6y+x:d \\ 3(2y-x)-(6y+x):d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8y:d \\ -4x:d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y:d \\ x:d \end{cases}. \text{ Mặt khác cũng từ giả thiết ta suy ra}$$

$$(2y-1)^2:d^2 \Rightarrow 2y-1:d \text{ mà } y:d \Rightarrow d \in U(1) \Rightarrow d=1, \text{ hay } (2y-x, 6y+x)=1 \text{ từ đó suy ra}$$

$2y-x, 6y+x$ đều là số chính phương.

Câu 4



a) Giả sử AP cắt (O) tại D , ta chứng minh DM, DN là các tiếp tuyến của (O) .

Thật vậy do $FN \parallel AB, EN \parallel AC$ nên $\widehat{OFN} = 90^\circ, \widehat{OEM} = 90^\circ$. Kết hợp các điều kiện OF là trung trực của AB , tam giác OAD cân và tứ giác $OEBN$ nội tiếp ta có biến đổi góc sau:
 $\widehat{ODF} = \widehat{OAF} = \widehat{OBF} = \widehat{ONF}$ suy ra tứ giác $FNDO$ nội tiếp, suy ra $\widehat{OND} = 90^\circ \Rightarrow DN$ là tiếp tuyến của (O) . Chứng minh tương tự ta có: DM cũng là tiếp tuyến của (O) .

b) Giả sử SB, CQ cắt nhau tại R , ta chứng minh: $ABCR$ nội tiếp. Tức là chứng minh $\widehat{RCA} = \widehat{RBA}$, muốn có điều này ta cần chứng minh: $\triangle ABS \sim \triangle ACQ$. Thật vậy, ta có:
 $\widehat{ASQ} = \widehat{ASM} = 180^\circ - \widehat{ACM} = \widehat{ACx} = \widehat{ABC}$, $\widehat{AQS} = \widehat{AQN} = 180^\circ - \widehat{ABN} = \widehat{ABx} = \widehat{ACB}$ suy ra $\triangle ABC \sim \triangle ASQ$ (g.g). Từ đó suy ra đpcm.

Câu 5

a) Ta có $c = P - (a + b)$ thay vào giả thiết ta có: $2(a^2 + ab + b^2) = 9 - 3[P - (a + b)]^2$

Hay $2(a + b)^2 + 3[P^2 - 2P(a + b) + (a + b)^2] - 9 = 2ab$. Do $2ab \leq \frac{(a + b)^2}{2}$ suy ra

$$2(a + b)^2 + 3[P^2 - 2P(a + b) + (a + b)^2] - 9 \leq \frac{(a + b)^2}{2} \Leftrightarrow 9(a + b)^2 + 6P^2 - 12P(a + b) - 18 \leq 0$$

$$\text{Hay } [3(a + b) - 2P]^2 - 18 + 2P^2 \leq 0 \Leftrightarrow 2P^2 \leq 18 - [3(a + b) - 2P]^2 \leq 18 \Leftrightarrow P^2 \leq 9 \Leftrightarrow -3 \leq P \leq 3.$$

$$\text{Xét } P = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} 2(a + b) = 2P = 6 \\ c = P - (a + b) \\ a = b \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = 1.$$

$$\text{Xét } P = -3 \Leftrightarrow \begin{cases} 2(a + b) = 2P = -6 \\ c = P - (a + b) \\ a = b \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = -1.$$

Vậy GTLN của P là 3, GTNN của P là -3.

b) Với mọi số thực $a, b, c > 0, 0 < m < 1$ ta có: $(a - b)^2 \geq m(a - b)^2$, đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b$.

Áp dụng vào bài toán: Do $a, b, c > 0, a + b + c = 1 \Rightarrow 0 < a, b, c < 1$. Nên ta có:

$a(a-b)^2 + b(b-c)^2 + c(c-a)^2 \leq (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2$. suy ra

$a(a-b)^2 + b(b-c)^2 + c(c-a)^2 + 6(ab+bc+ca) \leq (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 + 6(ab+bc+ca)$

$= 2(a+b+c)^2 = 2$. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{3}$.

ĐỀ SỐ 12

Câu 1. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 3xy + y + 1 = 21x \\ 9x^2y^2 + 3xy + 1 = 117x^2 \end{cases}$$

Câu 2. Giải phương trình: $2(x\sqrt{y-4} + y\sqrt{x-4}) = xy$.

Câu 3

a) Tìm các số nguyên dương x, y, z thỏa mãn $\frac{x-\sqrt{3}y}{y-\sqrt{3}z}$ là số hữu tỉ và $x^2 + y^2 + z^2$ là số nguyên tố.

b) Cho số nguyên dương n, d và là một ước số nguyên dương của $3n^2$. Chứng minh $n^2 + d^2$ là số chính phương khi và chỉ khi $d = 3n^2$.

Câu 4.

Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp (O) . Một đường tròn (K) đi qua B, C cắt AC, AB lần lượt tại E, F , BE cắt CF tại H , AH cắt (O) tại P khác A , PE cắt (O) tại R khác P . Đường tròn ngoại tiếp tam giác FHB cắt AH tại D .

a) Chứng minh $KD \perp AH$.

b) Giả sử AH cắt BC tại L và Q đối xứng P qua D . Chứng minh tứ giác $AEQF$ là tứ giác nội tiếp.

c) Chứng minh BR chia đôi EF .

Câu 5.

Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x + y + z = 3$. Tìm GTNN của biểu thức

$$P = \frac{1}{2xy^2+1} + \frac{1}{2yz^2+1} + \frac{1}{2zx^2+1}$$

LỜI GIẢI

Câu 1: Xét $x=0$ thay vào hệ phương trình ta thấy không thỏa mãn suy ra $x \neq 0$, chia 2 vế

phương trình của hệ lần lượt cho x, x^2 ta có
$$\begin{cases} 3y + \frac{1}{x} + \frac{y}{x} = 21 \\ 9y^2 + \frac{1}{x^2} + 3\frac{y}{x} = 117 \end{cases}$$

Đặt $a = 3y + \frac{1}{x}, b = \frac{y}{x}$ ta có hệ phương trình
$$\begin{cases} a + b = 21 \\ a^2 - 3b = 117 \end{cases}$$
 rút $b = 21 - a$ thay vào phương trình

thứ 2 ta thu được $a^2 - 3(21 - a) = 117 \Leftrightarrow a^2 + 3a - 180 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 12 \\ a = -15 \end{cases}$

Câu 2: Đặt $a = \sqrt{x-4}, b = \sqrt{y-4}, a, b \geq 0$ thì phương trình đã cho trở thành

$$2(a^2 + 4)b + 2(b^2 + 4)a = (a^2 + 4)(b^2 + 4).$$

Chia 2 vế phương trình cho $(a^2 + 4)(b^2 + 4)$ thì phương trình trở thành $\frac{2b}{b^2 + 4} + \frac{2a}{a^2 + 4} = 1$.

Để ý $a=0$ hoặc $b=0$ không thỏa mãn phương trình.

Xét $a, b > 0$. Theo bất đẳng thức AM-GM ta có $b^2 + 4 \geq 2\sqrt{4b^2} = 4b, a^2 + 4 \geq 4a$. Suy ra

$$VT \leq \frac{2a}{4a} + \frac{2b}{4b} = 1. \text{ Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi } \begin{cases} a^2 = 4 \\ b^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = 2 \Leftrightarrow x = y = 8.$$

Vậy $x = 8, y = 8$ là nghiệm phương trình.

Câu 3:

a) Từ giả thiết suy ra tồn tại các số nguyên $p, q \neq 0$ sao cho $\frac{x - \sqrt{3}y}{y - \sqrt{3}z} = \frac{p}{q}$, đẳng thức tương đương với $(pz - qy)\sqrt{3} = py - qx$, nếu $pz - qy \neq 0$ thì điều này không thể xảy ra quy ra $pz - qy = 0$ dẫn đến $py - qx = 0$ hay $y^2 = zx$.

Ta có $x^2 + y^2 + z^2 = x^2 + xz + z^2 = (x+z)^2 - y^2 = (x+y+z)(x+z-y)$. Do $x^2 + y^2 + z^2$ là số nguyên tố suy ra $\begin{cases} x+x-y=1 \\ x^2+y^2+z^2=x+y+z \end{cases}$ do x, y, z là các số nguyên dương nên

$x^2 + y^2 + z^2 \geq x + y + z$, dấu bằng xảy ra khi $x = y = z = 1$.

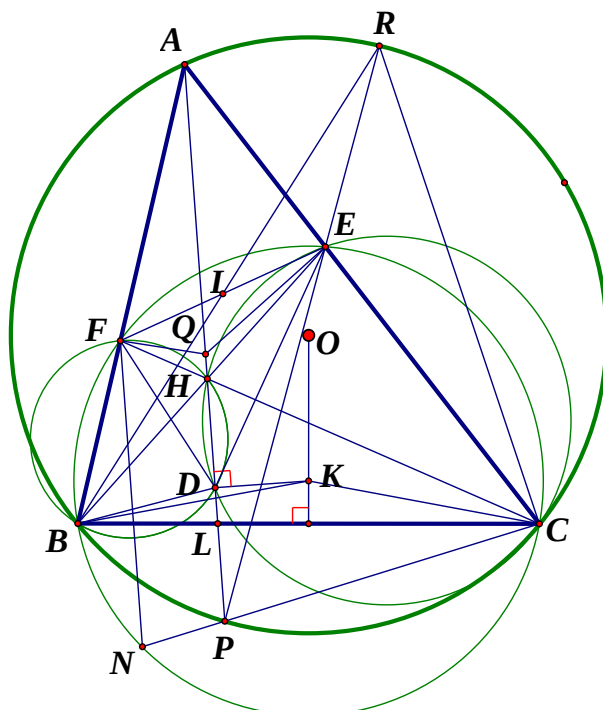
b) Cho số nguyên dương n, d và là một ước số nguyên dương của $3n^2$. Chứng minh $n^2 + d^2$ là số chính phương khi và chỉ khi $d = 3n^2$.

Vì d là một ước của $3n^2 \Rightarrow d.k = 3n^2$, ta có $n^2 + d^2 = n^2 + \frac{3n^2}{k}$ là số chính phương với

$k > 0, k \in \mathbb{N}$, tức là $\frac{n^2 k(k+3)}{k^2}$ là số chính phương suy ra $k(k+3)$ là số chính phương.

$$\text{Đặt } k(k+3) = m^2 \Rightarrow (2k+3-2m)(2k+3+2m) = 9 \Rightarrow \begin{cases} 2k+3-2m=1 \\ 2k+3+2m=9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k=1 \\ m=2 \end{cases} \text{ hay } d = 3n^2.$$

Câu 4:



a) Ta có $AH \cdot AD = AF \cdot AB = AE \cdot AC$ suy ra $EHDC$ nội tiếp. Từ đó ta có $\widehat{BDC} = 360^\circ - \widehat{BDH} - \widehat{CDH} = \widehat{BFC} + \widehat{BEC} = 2\widehat{BFC} = \widehat{BKC}$ nên tứ giác $BDKC$ nội tiếp.

$$\text{Ta có } \widehat{KDH} = \widehat{CDH} - \widehat{CDK} = 180^\circ - \widehat{HEC} - \widehat{KBC} = 180^\circ - \frac{\widehat{BKC}}{2} - \frac{180^\circ - \widehat{BKC}}{2} = 90^\circ$$

b) Gọi N là điểm đối xứng với F qua KD , do $KF = KN$ nên điểm N nằm trên (K) .

Ta có $\widehat{BCP} = \widehat{BAP} = \widehat{BFN} = \widehat{BCN}$ nên $CP \equiv CN$ nay C, N, P thẳng hàng. Do $FQPN$ là hình thang cân ta có $\widehat{FQA} = \widehat{FNC} = \widehat{FBC}$ nên $BFLQ$ nội tiếp. Tương tự ta có $CEQL$ nội tiếp.

Từ đó ta có biến đổi góc $\widehat{FQE} = 360^\circ - \widehat{FQL} = \widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 180^\circ - \widehat{BAC}$ suy ra $AEQF$ nội tiếp.

c) Từ $AEQF$ là tứ giác nội tiếp ta có: $\widehat{BFE} = 180^\circ - \widehat{AFE} = 180^\circ - \widehat{AQE} = \widehat{DQE}$. Ta cũng có:

$\widehat{FBE} = \widehat{FCE} = \widehat{HDE}$ nên $\triangle EFB \sim \triangle EQD$ (g.g) suy ra $\frac{FB}{FE} = \frac{DQ}{QE}$. Gọi I là trung điểm EF ta có

$$\frac{FB}{FE} = \frac{DQ}{QE} \Leftrightarrow \frac{FB}{2FI} = \frac{\frac{1}{2}QP}{QE} \Leftrightarrow \frac{FB}{FI} = \frac{QP}{QE} \Rightarrow \triangle EFB \sim \triangle EQP \text{ (c.g.c)} \text{ nên } \widehat{FBI} = \widehat{EPQ} = \widehat{ABR} \text{ hay}$$

$BR = BI$ tức là BR chia đôi EF .

Câu 5: Áp dụng bất đẳng thức $(ax + by + cz)^2 \leq (a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2)$ ta có:

$$(x + y + z)^2 = \left(x\sqrt{2yz^2 + 1} \cdot \frac{1}{\sqrt{2yz^2 + 1}} + y\sqrt{2zx^2 + 1} \cdot \frac{1}{\sqrt{2zx^2 + 1}} + z\sqrt{2xy^2 + 1} \cdot \frac{1}{\sqrt{2xy^2 + 1}} \right)^2$$

$$\leq \left[x^2(2yz^2 + 1) + y^2(2zx^2 + 1) + z^2(2xy^2 + 1) \right] \left(\frac{1}{2xy^2 + 1} + \frac{1}{2yz^2 + 1} + \frac{1}{2zx^2 + 1} \right)$$

Hay $P \geq \frac{9}{x^2(2yz^2 + 1) + y^2(2zx^2 + 1) + z^2(2xy^2 + 1)}$. Ta chứng minh:

$x^2(2yz^2 + 1) + y^2(2zx^2 + 1) + z^2(2xy^2 + 1) \leq 9$. Thật vậy ta có:

$$9 - \left[x^2(2yz^2 + 1) + y^2(2zx^2 + 1) + z^2(2xy^2 + 1) \right] = (x + y + z)^2 - (x^2 + y^2 + z^2) - 2xyz(xy + yz + zx)$$

$$= 2(xy + yz + zx)(1 - xyz) \geq 0 \text{ điều này luôn đúng do } xyz \leq \left(\frac{x + y + z}{3} \right)^3 = 1.$$

ĐỀ SỐ 13

Câu 1. Giải phương trình: $x + 1 + \sqrt{x^2 - 4x + 1} = 3\sqrt{x}$.

Câu 2. Giải phương trình: $\begin{cases} 8x^3y^3 + 27 = 18y^3 \\ 4x^2y + 6x = y^2 \end{cases}$.

Câu 3.

a) Cho các số nguyên dương $x > y$ thỏa mãn: $7y^2 - 6x^2 = x - y$. Chứng minh: $x - y$ là số chính phương.

b) Tìm số tự nhiên n khác 0 nhỏ nhất sao cho $\frac{(n+1)(4n+3)}{3}$ là số chính phương.

c) Tìm các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn điều kiện: $(x+2)^2(y-2) + xy^2 + 26 = 0$.

Câu 4. Cho tam giác nhọn BAC ($BA < AC$) nội tiếp (O) , các tiếp tuyến tại B, C của (O) cắt nhau tại điểm M đường thẳng AM cắt (O) tại giao điểm thứ 2 là D (khác A). Trên đường

thẳng qua O vuông góc với AD ta lấy điểm I (O, I nằm khác phía so với AD) ựng đường

tròn($I; ID$) cắt các đường thẳng BD, BC lần lượt tại E, F ($E \neq D, F \neq C$).

a) Gọi K là giao điểm của BC với EF . Chứng minh 4 điểm A, C, K, F cùng nằm trên một đường tròn.

b) Dựng EX, FY lần lượt vuông góc với AI . Chứng minh: $KX = KY$.

Câu 5.

a) Cho các số thực dương a, b, c . Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{(2a+b)(2a+c)} + \frac{b^2}{(2b+c)(2b+a)} + \frac{c^2}{(2c+a)(2c+b)} \leq \frac{1}{3}.$$

b) Cho tập hợp X gồm các số nguyên tố có dạng $x = a^2 + 2b^2$ với a, b là các số nguyên và $b \neq 0$. Chứng minh rằng nếu p là số nguyên tố và $p^2 \in X$ thì $p \in X$.

LỜI GIẢI

Câu 1.

Ta thấy $x=0$ không phải là nghiệm của phương trình.

Xét $x > 0$ chia hai vế của phương trình cho $\sqrt{x}$ ta thu được: $\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{x-4 + \frac{1}{x}} = 3$.

Đặt $t = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow t^2 = x + \frac{1}{x} + 2$ thay vào phương trình ta thu được:

$$\sqrt{t^2 - 6} = 3 - t \Leftrightarrow \begin{cases} t \leq 3 \\ t^2 - 6 = t^2 - 6t + 9 \end{cases} \Leftrightarrow t = \frac{5}{2} \text{ hay } \frac{25}{4} = x + \frac{1}{x} + 2 \Leftrightarrow x + \frac{1}{x} = \frac{17}{4} \Leftrightarrow 4x^2 - 17x + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (4x-1)(x-4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = \frac{1}{4} \end{cases}.$$

Câu 2.

$$\text{Giải hệ phương trình: } \begin{cases} 8x^3y^3 + 27 = 18y^3 \\ 4x^2y + 6x = y^2 \end{cases}$$

Đề ý rằng $y=0$ không phải là nghiệm của phương trình: Chia 2 phương trình của hệ lần lượt cho y^3, y^2 ta thu được hệ:

$$\begin{cases} 8x^3 + \frac{27}{y^3} = 18 \\ 4\frac{x^2}{y} + 6\frac{x}{y^2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(2x + \frac{3}{y}\right)^3 - 3 \cdot \frac{6x}{y} \left(2x + \frac{3}{y}\right) = 18 \\ \frac{2x}{y} \left(2x + \frac{3}{y}\right) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(2x + \frac{3}{y}\right)^3 = 27 \\ \frac{2x}{y} \left(2x + \frac{3}{y}\right) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + \frac{3}{y} = 3 \\ \frac{2x}{y} = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\text{Hay } \begin{cases} 2x + \frac{3}{y} = 3 \\ y = 6x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 - 6x + 1 = 0 \\ y = 6x \end{cases} \Leftrightarrow (x, y) = \left(\frac{3+\sqrt{5}}{4}; \frac{9+3\sqrt{5}}{2}\right); \left(\frac{3-\sqrt{5}}{4}; \frac{9-3\sqrt{5}}{2}\right).$$

Câu 3.

a) Từ giả thiết ta suy ra $y^2 = 6x^2 - 6y^2 + x - y \Leftrightarrow y^2 = (x-y)(6x+6y+1)$ (*)

$$\text{Gọi } d \text{ là ước chung lớn nhất của } x, y, \text{ kí hiệu } (x, y) = d \Rightarrow \begin{cases} x = md \\ y = nd \\ (m, n) = 1 \end{cases}$$

Và $x - y = d(m - n)$, đặt $m - n = k > 0$ thay $x - y = dk$ vào (*) ta có:

$(dn)^2 = dk(6dm + 6dn + 1) \Leftrightarrow dn^2 = 6kdm + 6kdn + k$ (***) do $(m, n) = 1 \Rightarrow (n, m - n) = 1 \Rightarrow (n, k) = 1$ lại có: $dn^2 : k \Rightarrow d : k$ mặt khác, cũng từ (***) ta suy ra $6kdm + 6kdn + k : d \Rightarrow k : d$ như vậy ta có:

$$\begin{cases} d : k \\ k : d \end{cases} \Rightarrow k = d \text{ hay } x - y = dk = d^2.$$

b) Đặt $\frac{(n+1)(3n+1)}{3} = k^2 \Leftrightarrow (n+1)(3n+1) = 3k^2 (k \in \mathbb{N}^*)$, các số $n+1, 4n+3$ nguyên tố cùng nhau và số $4n+3$ không phải là số chính phương (số chính phương chia 4 chỉ có thể dư 0 hoặc 1) nên suy ra $\begin{cases} n+1 = a^2 \\ 4n+3 = 3b^2 \end{cases}$ với $(a, b \in \mathbb{N}^*)$. Từ đó ta có:

$4a^2 - 3b^2 = 1 \Leftrightarrow (2a-1)(2a+1) = 3b^2$ do $2a-1, 2a+1$ nguyên tố cùng nhau nên ta có các khả năng xảy ra như sau:

TH1: $\begin{cases} 2a-1 = 3x^2 \\ 2a+1 = y^2 \end{cases} \Rightarrow y^2 - 3x^2 = 2 \Rightarrow y^2$ chia cho 3 dư 2 (loại)

TH2: $\begin{cases} 2a-1 = x^2 \\ 2a+1 = 3y^2 \end{cases} \Rightarrow 3y^2 - x^2 = 2$ (*).

+ Nếu x chẵn thì y chẵn suy ra $3y^2 - x^2$ chia hết cho 4, mà 2 không chia hết cho 4 nên điều này không thể xảy ra.

+ Nếu x lẻ suy ra $x \not\equiv 3$. Do $n+1 = a^2, 2a-1 = x^2$ nên n nhỏ nhất khi và chỉ khi a nhỏ nhất dẫn đến x nhỏ nhất.

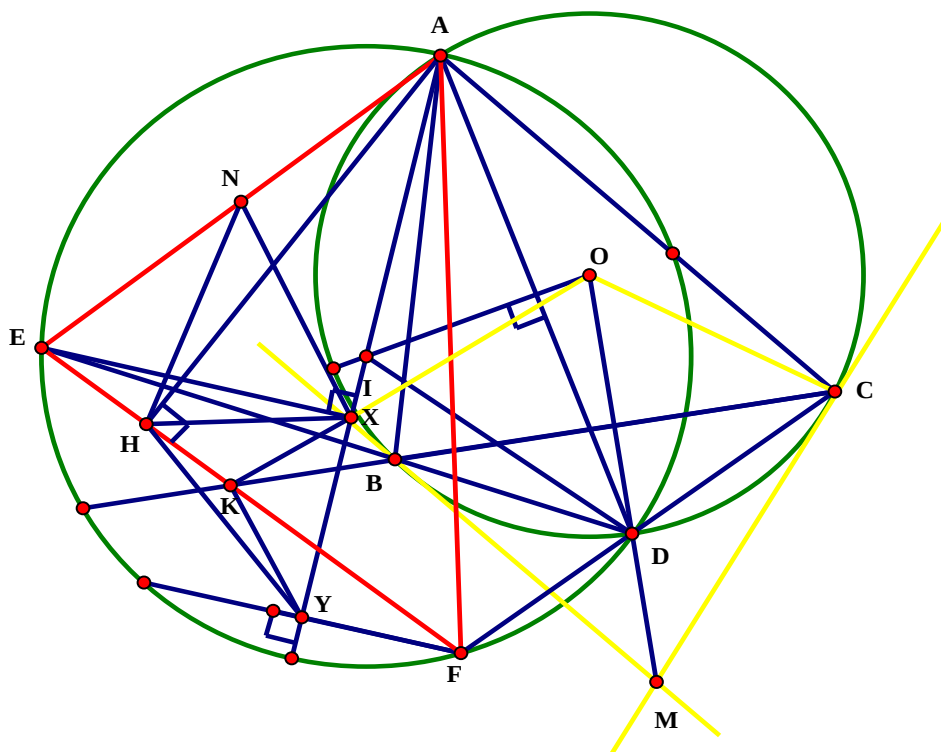
Xét $x = 5$ khi đó ta tính được $a = 13, n = 168, \frac{(n+1)(4n+3)}{3} = \frac{169 \cdot 657}{3} = (13 \cdot 15)^2$ thỏa mãn điều kiện. Vậy giá trị n nhỏ nhất cần tìm là 168.

c) Đặt $z = y - 2$, phương trình đã cho trở thành:

$$(x+2)^2 z + (z+2)^2 x + 26 = 0 \Leftrightarrow (x+z+8)(xz+4) = 6 \Rightarrow x+z+8 \in U(6).$$

$$\Rightarrow (x, y) = (1; -1), (-3; 3), (-10; 3), (1; -8).$$

Câu 4.



a) Xét tứ giác $ACKF$ ta có:

$$\widehat{ACK} = \widehat{ACB} = \widehat{ADB} = \widehat{ADE} = \widehat{AFE} = \widehat{AFK}$$

Suy ra $ACKF$ là tứ giác nội tiếp.

b) Ta có $\widehat{ACD} = \widehat{ACF} = \widehat{AKE}$

$$\widehat{ACD} = \widehat{AKE} \Rightarrow \triangle ACD \sim \triangle AKE$$

$$\Rightarrow \frac{KE}{KA} = \frac{CD}{CA} \quad (*), \text{ hoàn toàn tương tự, ta}$$

$$\text{cũng có: } \triangle ABD \sim \triangle AKF \Rightarrow \frac{KF}{KA} = \frac{BD}{BA} \quad (**)$$

Mặt khác ta dễ dàng chứng minh:

$$\begin{cases} \triangle MDB \sim \triangle MBA \Rightarrow \frac{BD}{BA} = \frac{MB}{MA} \\ \triangle MDC \sim \triangle MCA \Rightarrow \frac{CD}{CA} = \frac{MC}{MA} \end{cases};$$

$$\text{Mà } MC = MB \Rightarrow \frac{CD}{CA} = \frac{BD}{BA}$$

$$\text{Từ } (*) \text{ và } (**) \Rightarrow \frac{KE}{KA} = \frac{KF}{KA} \text{ hay } K \text{ là trung điểm của } EF.$$

Dựng đường cao AH của tam giác AEF , gọi N là trung điểm của AE , ta có 5 điểm E, N, I, Y, K nằm trên đường tròn đường kính EI , 4 điểm A, E, H, I nằm trên đường tròn đường kính AE . Từ đó ta có biến đổi góc: $\widehat{YNK} = \widehat{YEK} = \widehat{YEH} = \frac{1}{2} \widehat{YNH}$. Vậy NK là phân giác của góc

$\widehat{HNY}$

Mà tam giác HNY cân tại N nên NK là trung trực của HI . Chứng minh tương tự ta có K là trung trực HX suy ra K là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác HXY nên $KX = KY$.

Câu 5.

a) Ta chứng minh BĐT thuộc: $\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \frac{z^2}{C} \geq \frac{(x+y+z)^2}{A+B+C}$ với $x, y, z, A, B, C > 0$ (Dành cho học sinh)

Ta có:
$$\frac{a^2}{(2a+b)(2a+c)} = \frac{a^2}{2a(a+b+c) + 2a^2 + bc} = \frac{1}{9} \cdot \frac{(a+a+a)^2}{a(a+b+c) + a(a+b+c) + (2a^2 + bc)}$$

$$\leq \frac{1}{9} \left[\frac{a^2}{a(a+b+c)} + \frac{a^2}{a(a+b+c)} + \frac{a^2}{2a^2 + bc} \right] = \frac{1}{9} \left(\frac{2a}{a+b+c} + \frac{a^2}{2a^2 + bc} \right).$$

$$\Rightarrow VT \leq \frac{2}{9} + \frac{1}{9} \left(\frac{a^2}{2a^2 + bc} + \frac{b^2}{2b^2 + ac} + \frac{c^2}{2c^2 + ab} \right).$$

Đặt $P = \frac{a^2}{2a^2 + bc} + \frac{b^2}{2b^2 + ac} + \frac{c^2}{2c^2 + ab}$

Đặt $x = \frac{1}{a}; y = \frac{1}{b}; z = \frac{1}{c}$ thì

$$P = \frac{a^2}{2a^2 + bc} + \frac{b^2}{2b^2 + ac} + \frac{c^2}{2c^2 + ab} \Rightarrow 2P = 1 - \frac{bc}{2a^2 + bc} + 1 - \frac{ca}{2b^2 + ca} + 1 - \frac{ab}{2c^2 + ab}$$

$$= 3 - \left(\frac{bc}{2a^2 + bc} + \frac{ca}{2b^2 + ca} + \frac{ab}{2c^2 + ab} \right) = 3 - Q.$$

Lại có: $Q = \frac{bc}{2a^2 + bc} + \frac{ca}{2b^2 + ca} + \frac{ab}{2c^2 + ab}$, đặt $a = \frac{1}{x}, b = \frac{1}{y}, c = \frac{1}{z}$ ta có:

$$Q = \frac{x^2}{2yz + x^2} + \frac{y^2}{2zx + y^2} + \frac{z^2}{2xy + z^2} \geq \frac{(x+y+z)^2}{2yz + x^2 + 2zx + y^2 + 2xy + z^2} = 1 \text{ suy ra } P \leq 1. \text{ Vậy}$$

$$VT \leq \frac{2}{9} + \frac{1}{9} = \frac{1}{3}, \text{ dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi } a = b = c.$$

b) Ta thấy nếu a là số chẵn thì $a^2 + 2b^2 : 4$ nên không phải là số nguyên tố. Ta có:

$$(p-a)(p+a) = 2b^2$$

Do $(p-a)(p+a) = 2b^2$ là số chẵn suy ra $p-a, p+a$ đều là số chẵn suy ra

$(p-a)(p+a) : 4 \Rightarrow 2b^2 : 4 \Rightarrow b$ là số chẵn từ đó tồn tại các số tự nhiên khác 0, k, n sao cho:

$$\begin{cases} p-a=2k \\ p+a=2n \end{cases} \Rightarrow p=k+n \text{ với } 1 \leq k, n \leq p \text{ và } p \text{ là số nguyên tố nên } (k, n)=1. \text{ Suy ra ta có thể}$$

$$\text{đặt } n=2c^2, k=d^2 \text{ với } c, d \in \mathbb{Z}, c \neq 0 \Rightarrow p=2c^2+d^2 \in X.$$

ĐỀ SỐ 14

Câu 1. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \frac{x}{x^2-y} + \frac{5y}{x+y^2} = 4 \\ 5x+y + \frac{x^2-5y^2}{xy} = 5 \end{cases}.$$

Câu 2. Giải phương trình: $x^3 = 6\sqrt[3]{6x+4} + 4.$

Câu 3.

- a) Tìm tất cả các số nguyên dương lẻ n sao cho tồn tại các số nguyên tố p, q, r thỏa mãn: $p^n + q^n = r^2$.
- b) Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $x^4 - y^4 = 3y^2 + 1$.
- c) Chứng minh rằng: $x = \sqrt[3]{a + \frac{a+1}{3}\sqrt{\frac{8a-1}{3}}} + \sqrt[3]{a - \frac{a+1}{3}\sqrt{\frac{8a-1}{3}}}$ với $a \geq \frac{1}{8}$ là số tự nhiên.

Câu 4. Cho tam giác ABC nội tiếp (O) , P là một điểm bất kì trong tam giác và $Q \in$ cung nhỏ BC của (O) , AP cắt (O) tại giao điểm thứ 2 là D , M là trung điểm của AQ , QP cắt (O) tại giao điểm thứ 2 là K . Vẽ đường tròn (w) qua hai điểm P, K tiếp xúc với AP . Các đường thẳng AK, MP lần lượt cắt (w) tại E, F . Gọi R là giao điểm của đường tròn ngoại tiếp tam giác KPD với MP .

- a) Chứng minh: $AMDR$ là tứ giác nội tiếp.
- b) Chứng minh: $\triangle KFP \sim \triangle KRD$ suy ra F là trung điểm của PR .
- c) Chứng minh: 4 điểm A, D, E, F cùng nằm trên một đường tròn.

Câu 5. Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn điều kiện $a + b + c = 3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = a\sqrt[3]{b^3 + 1} + b\sqrt[3]{c^3 + 1} + c\sqrt[3]{a^3 + 1}$.

Lời giải

Câu 1. Điều kiện: $x, y \neq 0; x \neq -y^2; y \neq -x^2$.

Phương trình (2) tương đương: $y + \frac{x}{y} + 5x - \frac{5y}{x} = 5 \Leftrightarrow \frac{x+y^2}{x} + 5 \cdot \frac{x^2-y}{x} = 5$

Đặt $\frac{x^2-y}{x} = a, \frac{x+y^2}{x} = b$. Hệ trở thành: $\begin{cases} \frac{1}{a} + \frac{5}{b} = 4 \\ b + 5a = 5 \end{cases} \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}, b = \frac{5}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(x^2 - y) = x \\ 2(x - y^2) = 5y \end{cases}$

Hay $\begin{cases} x + 2y = 2x^2 \\ -2x + 5y = 2y^2 \end{cases} \Rightarrow y^2(x + 2y) = x^2(-2x + 5y) \Leftrightarrow 2x^3 - 5xy^2 + xy^2 + 2y^3 = 0$

$$\Leftrightarrow (x-y)(x-2y)(2x+y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{3}{2}, y = 3 \\ x = 1, y = \frac{1}{2} \\ x = \frac{3}{2}, y = \frac{3}{2} \end{cases}.$$

Vậy hệ có nghiệm $(x; y) = \left\{ \left(-\frac{3}{2}; 3\right); \left(2; \frac{1}{2}\right); \left(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right) \right\}$.

Câu 2. Đặt $y = \sqrt[3]{6x+4}$ ta có hệ sau:

$$\begin{cases} x^3 - 4 = 6y \\ 6x + 4 = y^3 \end{cases} \Leftrightarrow x^3 + 6x = y^3 + 6y \Leftrightarrow (x-y)(x^2 + xy + y^2 + 6) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

Thay vào phương trình ta có: $x^3 - 6x - 4 = 0 \Leftrightarrow (x+2)(x^2 - 2x - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 1 + \sqrt{3} \\ x = 1 - \sqrt{3} \end{cases}$

Câu 3.

a) Ta xét $n=1$. Dễ thấy bộ số $p=2, q=7, r=3$ thỏa mãn điều kiện.

Ta xét $n \geq 2$. Ta thấy trong bộ ba số p, q, r phải có 1 số chẵn.

- Nếu $r=2$ thì $p^n + q^n = 4$ không có số p, q thỏa mãn.

- Nếu $p > q=2$ ta có: $p^n + 2^n = r^2$.

Vì n là số lẻ $\Rightarrow n \geq 3 \Rightarrow p^n + 2^n = r^2 \Leftrightarrow (p+2)(p^{n-1} - 2p^{n-2} + 2^2 p^{n-3} + \dots + 2^{n-1}) = r^2$ vì $p+2 > 1$,

$p^{n-1} - 2p^{n-2} + 2^2 p^{n-3} + \dots + 2^{n-1} > 1$, p là số nguyên tố nên

$$\begin{cases} p+2=r \\ p^{n-1} - 2p^{n-2} + 2^2 p^{n-3} + \dots + 2^{n-1} = r \end{cases} \Rightarrow p^n + 2^n = (p+2)^2, \text{ điều này không thể xảy ra vì}$$

$$p^n + 2^n \geq p^3 + 8 \text{ mà } p^3 + 8 - (p^2 + 4p + 4) = p^3 - p^2 - 4p + 4 = p^2(p-3) + 2p^2 - 4p + 4 > 0.$$

b) Ta có $x^4 = y^4 + 3y^2 + 1 \geq y^4 + 2y^2 + 1 = (y^2 + 1)^2$

$$x^4 = y^4 + 3y^2 + 1 < y^4 + 4y^2 + 4 = (y^2 + 2)^2 \text{ suy ra}$$

$$(y^2 + 1)^2 \leq x^4 < (y^2 + 2)^2 \Leftrightarrow (y^2 + 1)^2 = x^4 \Leftrightarrow x^2 = y^2 + 1.$$

Từ đó tìm được các nghiệm là: $(1;0); (-1;0)$.

c) Áp dụng hằng đẳng thức: $(u+v)^3 = u^3 + v^3 + 3uv(u+v)$

$$\text{Ta có: } x^3 = 2a + (1-2a)x \Leftrightarrow x^3 + (2a-1)x - 2a = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 + x + 2a) = 0$$

Xét đa thức bậc hai $x^2 + x + 2a$ với $\Delta = 1 - 8a \geq 0$.

$$+) \text{ Khi } a = \frac{1}{8} \text{ ta có: } x = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} + \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = 1.$$

$$+) \text{ Khi } a > \frac{1}{8} \text{ ta có: } \Delta = 1 - 8a \text{ âm nên đa thức (1) có nghiệm duy nhất } x=1. \text{ Vậy với mọi } a \geq \frac{1}{8}$$

$$\text{ta có: } x = \sqrt[3]{a + \frac{a+1}{3} \sqrt{\frac{8a-1}{3}}} + \sqrt[3]{a - \frac{a+1}{3} \sqrt{\frac{8a-1}{3}}} = 1 \text{ là số tự nhiên.}$$

Câu 4:

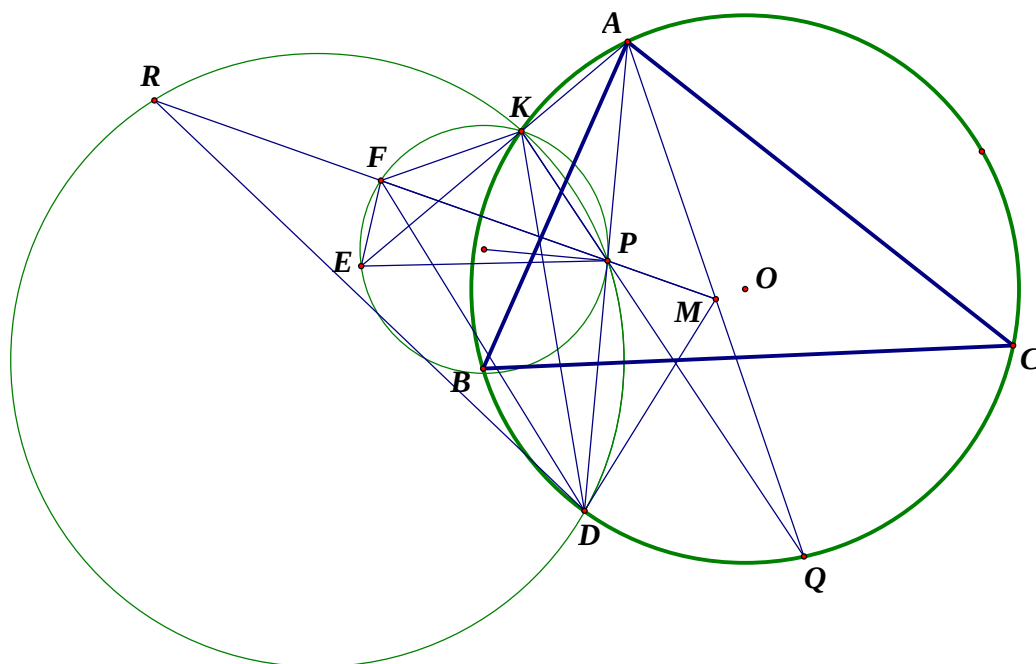
a) Các tứ giác $KPDR, AKDQ$ nội tiếp

$$\text{ta suy ra } \widehat{DRP} = \widehat{DKP} = \widehat{DAQ}$$

hay tứ giác $AMDR$ là tứ giác nội tiếp.

b) Ta có: PA là tiếp tuyến của đường tròn (w) và $KPDR$ nội tiếp nên $\widehat{KFP} = \widehat{KPA} = \widehat{KRD}$, lại

$$\text{có } \widehat{KPR} = \widehat{KDR} \Leftrightarrow \widehat{KPF} = \widehat{KDR} \text{ nên } \triangle KFP \sim \triangle KRD (g.g) \text{ suy ra } \frac{FP}{RD} = \frac{KP}{KD}$$



Lại có: $\triangle KPD \sim \triangle APQ (g.g)$ suy ra $\frac{KP}{KD} = \frac{AP}{AQ}$, $\triangle PRD \sim \triangle PAM$ nên $\frac{PR}{RD} = \frac{PA}{AM} = \frac{2PA}{AQ}$, từ đó ta có: $\frac{PR}{RD} = \frac{2PA}{AQ} = \frac{2KP}{KD} = \frac{2FP}{RD}$ suy ra F là trung điểm của RP .

c) Ta có $\widehat{KRF} = \widehat{KDP}$, $\widehat{KFR} = 180^\circ - \widehat{KFP} = 180^\circ - \widehat{KPA} = \widehat{KPD}$ suy ra $\triangle KFR \sim \triangle KPD (g.g)$ kết hợp với $\widehat{PKF} = \widehat{DPF}$ suy ra $\triangle KPF \sim \triangle PDF (c.g.c)$ suy ra $\widehat{ADF} = \widehat{PDF} = \widehat{KPF} = 180^\circ - \widehat{AEF}$ hay $ADEF$ là tứ giác nội tiếp.

Câu 5:

Sử dụng bất đẳng thức AM - GM ta có:

$$a\sqrt{b^3+1} = a\sqrt{(b+1)(b^2-b+1)} \leq a \cdot \frac{b+1+b^2-b+1}{2} = a + \frac{ab^2}{2}$$

Tương tự: $b\sqrt{c^3+1} \leq b + \frac{bc^2}{2}$; $c\sqrt{a^3+1} \leq c + \frac{ca^2}{2}$. Cộng theo vế 3 bất đẳng thức trên ta được:

$$P \leq a + b + c + \frac{ab^2}{2} + \frac{bc^2}{2} + \frac{ca^2}{2} = 3 + \frac{ab^2 + bc^2 + ca^2}{2}.$$

Không mất tính tổng quát giả sử b là một số nằm giữa a và c ta có:

$$(b-a)(b-c) \leq 0 \Leftrightarrow b^2 + ac \leq ab + bc \Rightarrow ab^2 + a^2c \leq a^2b + abc$$

$$\Rightarrow ab^2 + bc^2 + ca^2 \leq a^2b + abc + bc^2 = b(a^2 + ac + c^2) \leq b(a+c)^2.$$

$$\text{Sử dụng bất đẳng thức AM - GM ta có: } b(a+c)^2 = 4b \cdot \frac{a+c}{2} \cdot \frac{a+c}{2} \leq 4 \left(\frac{a + \frac{a+c}{2} + \frac{a+c}{2}}{3} \right)^3 = 4$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=0; b=1; c=2$ hoặc các hoán vị

$$\text{Suy ra } P \leq 3 + \frac{ab^2 + bc^2 + ca^2}{2} \leq 3 + \frac{b(a+c)^2}{2} \leq 5.$$

Vậy giá trị lớn nhất của P bằng 5 đạt tại $a=0; b=1; c=2$ hoặc các hoán vị.

ĐỀ SỐ 15

Câu 1. Cho biểu thức $P = \left((2\sqrt{a} - \sqrt{b}) - \frac{2\sqrt{b}(2\sqrt{a} - \sqrt{b})}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \right) \left(\frac{3}{2\sqrt{a} - \sqrt{b}} + \frac{6\sqrt{b} + 4}{a - \sqrt{ab} + (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2} \right)$ với

$a, b \in \mathbb{Z}; 0 < a, b \leq 9$.

a) Rút gọn P .

b) Cho $n = \overline{ab}$ (n là số tự nhiên có hai chữ số). Tìm n để P lớn nhất.

Câu 2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = mx + 2$.

Tìm m để (d) cắt (P) tại 2 điểm phân biệt $A(x_1; y_1); B(x_2; y_2)$ sao cho $|y_1 - y_2| = \sqrt{24 - x_2^2 - mx_1}$.

Câu 3. Khoảng cách giữa hai tỉnh A và B là 60km . Hai người đi xe đạp cùng khởi hành một lúc từ A đến B với vận tốc bằng nhau. Sau khi đi được 1 giờ thì xe của người thứ nhất bị hỏng nên phải dừng lại sửa xe 20 phút, còn người thứ hai tiếp tục đi với vận tốc ban đầu. Sau khi xe sửa xong, người thứ nhất đi với vận tốc nhanh hơn trước 4km/h nên đã đến B cùng lúc với người thứ hai. Tính vận tốc hai người đi lúc đầu.

Câu 4. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp $(O; R)$ $AB < AC$ các tiếp tuyến tại B, C cắt nhau ở K , AK cắt (O) tại giao điểm thứ hai là D , AK cắt BC tại M . Đường thẳng qua K song song với BC cắt tia AB, BD lần lượt tại F, E . Đường thẳng AE cắt BC tại N , OK cắt BC tại H .

a) Chứng minh $KC^2 = KD.KA$ và $\triangle DKC \sim \triangle CMK$.

b) Chứng minh: $KDCE$ là tứ giác nội tiếp.

c) Chứng minh: F, D, N thẳng hàng.

Câu 5. Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $-1 \leq a, b, c \leq 1$, các số thực x, y, z thỏa mãn

$0 \leq x, y, z < 1$. Hãy tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = \left(\frac{1-a}{1-bz} \right) \left(\frac{1-b}{1-cx} \right) \left(\frac{1-c}{1-ay} \right)$.

LỜI GIẢI

Câu 1. Đặt $\sqrt{a} = x, \sqrt{b} = y$ điều kiện $0 < x, y \leq 3; x \neq y$. Ta có:

$$\begin{aligned} P &= \left((2x - y) - \frac{2y(2x - y)}{x + y} \right) \left(\frac{3}{2x - y} + \frac{6y + 4}{x^2 - xy + (x - y)^2} \right) \\ &= (2x - y) \left(1 - \frac{2y}{x + y} \right) \cdot \frac{3(x^2 - xy + x^2 - 2xy + y^2) + (6y + 4)(2x - y)}{(2x - y)(x^2 - xy + x^2 - 2xy + y^2)} \\ &= \frac{x - y}{x + y} \cdot \frac{6x^2 + 3xy - 3y^2 + 8x - 4y}{(x - y)(2x - y)} = \frac{3(2x - y)(x + y) + 4(2x - y)}{(x + y)(2x - y)} = \frac{3(x + y) + 4}{(x + y)} = \frac{3(\sqrt{a} + \sqrt{b}) + 4}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})}. \end{aligned}$$

b) Ta có: $P = 3 + \frac{4}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$, P lớn nhất khi và chỉ khi $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ nhỏ nhất, mặt khác

$a, b \geq 1; a \neq b; a, b \in \mathbb{N}$ suy ra $\sqrt{a} + \sqrt{b} \geq 1 + \sqrt{2}$ khi đó $P \leq 3 + \frac{4}{1 + \sqrt{2}} = 4\sqrt{2} - 1$, dấu đẳng thức xảy

ra khi và chỉ khi $a = 1; b = 2$ hoặc $a = 2; b = 1$ suy ra $n = 12$ hoặc $n = 21$.

Câu 2. Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là $x^2 = mx + 2 \Leftrightarrow x^2 - mx - 2 = 0$, ta có $\Delta = m^2 + 8 > 0$ nên phương trình luôn có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 . Theo hệ thức Vi-et ta cũng có $x_1 x_2 = -2 < 0$ nên 2 giao điểm A, B nằm về 2 phía trục tung.

Điều kiện bài toán $|y_1 - y_2| = \sqrt{24 - x_2^2 - mx_1} \Leftrightarrow (y_1 - y_2)^2 = 24 - x_2^2 - mx_1$.

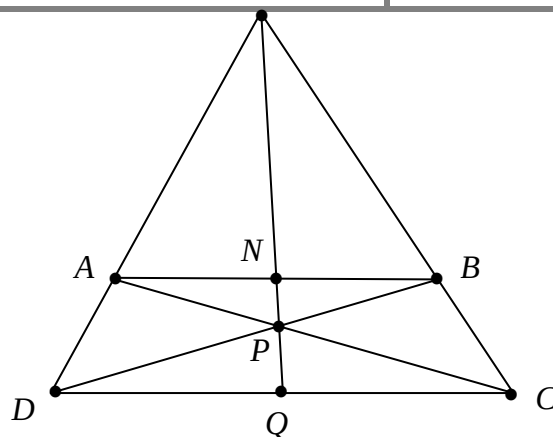
Chứng minh:

Giả sử các đường thẳng AD, BC cắt nhau tại M ,
 AC, BD cắt nhau tại P , đường thẳng MP cắt AB, CD
lần lượt tại N, Q . Ta chứng minh: N, Q lần lượt là
trung điểm của AB, CD .

Thật vậy: Do $AB \parallel CD$ theo định lý Thales ta có:

$$\frac{AN}{QN} = \frac{NB}{PQ} (1), \frac{AN}{QN} = \frac{BN}{PQ} (2). \text{ Lấy (1) nhân với (2) ta có:}$$

$$\frac{AN^2}{QN \cdot QD} = \frac{NB^2}{QN \cdot QD} \Rightarrow AN = NB \text{ thay vào (1) ta có } QD = QC. \text{ Hay } N, Q \text{ lần lượt là trung điểm của } AB, CD.$$



Câu 5:

$$\text{Ta có: } \frac{1-a}{1-ay} - \frac{2}{1+y} = \frac{(1-a)(1+y) - 2(1-ay)}{(1-ay)(1+y)} = -\frac{(1+a)(1-y)}{(1-ay)(1+y)} \leq 0 \Rightarrow \frac{1-a}{1-ay} \leq \frac{2}{1+y} \leq 2$$

$$\text{Suy ra } P = \left(\frac{1-a}{1-bz} \right) \left(\frac{1-b}{1-cx} \right) \left(\frac{1-c}{1-ay} \right) = \left(\frac{1-a}{1-ay} \right) \left(\frac{1-b}{1-bz} \right) \left(\frac{1-c}{1-cx} \right) \leq 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8.$$

Khi $a=b=c=-1; x=y=z=0$ thì $P=8$. Vậy GTLN của P là 8.

ĐỀ SỐ 16

Câu 1. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} xy(x+y) = 2 \\ x^3 + y^3 + 6 = 8x^2y^2 \end{cases}$$

Câu 2. Giải phương trình $\sqrt{x+3} + \sqrt{3x+1} = x-1$.

Câu 3.

a) Tồn tại hay không bộ ba số nguyên dương $(x; y; z)$ thỏa mãn $x^3 + y^3 + z^3 = 2019$.

b) Giả sử $(x; y)$ là các số thực thỏa mãn $(x + \sqrt{3+x^2})(y + \sqrt{3+y^2}) = 9$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^2 + xy + y^2$.

Câu 4. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) . Đường tròn (K) tiếp xúc với CA, CB lần lượt tại E, F và tiếp xúc trong với (O) tại S . SE, SF lần lượt cắt (O) tại M, N khác S . Đường tròn ngoại tiếp tam giác AEM, AFN cắt nhau tại P khác A .

a) Chứng minh tứ giác $AMPN$ là hình bình hành.

b) Gọi EN, FM lần lượt cắt (K) tại G, H khác E, F . Gọi GH cắt MN tại T .

Chứng minh tam giác AST cân.

Câu 5. Với n là số tự nhiên, $n \geq 2$, cho n số tự nhiên $x_1, x_2, \dots, x_n$ thỏa mãn

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots + x_n^2 + n^3 \leq (2n-1)(x_1 + x_2 + \dots + x_n) + n^2.$$

Chứng minh rằng

a) Các số $x_i (i=1, 2, \dots, n)$ là số nguyên dương.

b) Số $x_1 + x_2 + \dots + x_n + n + 1$ không là số chính phương.

LỜI GIẢI

Câu 1. Ta có $x^3 + y^3 + 6 = x^3 + y^3 + 3xy(x+y) = (x+y)^3$; $8x^2y^2 = 8 \cdot \left(\frac{2}{x+y}\right)^2 = \frac{32}{(x+y)^2}$ do

$$x+y \neq 0 \Rightarrow (x+y)^5 = 32 \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=2 \\ xy=1 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=1.$$

Câu 2. Phương trình tương đương với $2\sqrt{x+3} + 2\sqrt{3x+1} = 2x-2$.

Đặt $\begin{cases} u = \sqrt{x+3} \\ v = \sqrt{3x+1} \end{cases} \Rightarrow v^2 - u^2 = 2x-2$ với $u, v > 0$, ta được $2(u+v) = v^2 - u^2$.

$$\Leftrightarrow (v+u)(v-u-2) = 0 \Leftrightarrow 2x-6 = 4\sqrt{x+3} \Leftrightarrow 2\sqrt{x+3} = x-3$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ 4(x+3) = x^2 - 6x + 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x^2 - 10x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \pm \sqrt{28} \\ x \geq 3 \end{cases} \Leftrightarrow x = 5 + \sqrt{28}.$$

Câu 3. a) Ta có $n^3 \equiv 0, \pm 1 \pmod{9}$. Vì $2019 \equiv 3 \pmod{9} \Rightarrow x^3 = 9m+1, y^3 = 9t+1, z^3 = 9u+1$, suy ra tìm được x, y, z trong tập hợp $\{1, 4, 7, 10, 13, \dots\}$.

Không mất tính tổng quát, giả sử: $x \leq y \leq z$.

▪ Giả sử $z \geq 13 \Rightarrow z^3 \geq 2197 > 2019$ (loại).

▪ Giả sử $z \leq 7 \Rightarrow 2019 = x^3 + y^3 + z^3 \leq 3z^3 \leq 3 \cdot 7^3$ (loại)

Suy ra $z = 10 \Rightarrow x^3 + y^3 = 1019$.

Giả sử $y < 10 \Rightarrow x \leq y \leq 7 \Rightarrow 1019 = x^3 + y^3 \leq 2 \cdot 7^3 = 2.343$ (loại).

Suy ra $y = 10, x^3 = 19$, không có giá trị x nào thỏa mãn. Vậy không tồn tại x, y, z thỏa mãn đề bài.

b) Đặt $a = x + \sqrt{3+x^2} > 0 \Rightarrow a - x = \sqrt{3+x^2} \Rightarrow a^2 - 2ax + x^2 = 3 + x^2 \Rightarrow x = \frac{a^2 - 3}{2a}$.

Tương tự, đặt $b = y + \sqrt{3+y^2} > 0 \Rightarrow x = \frac{b^2 - 3}{2b}$. Khi đó $x + y = \frac{a}{2} + \frac{b}{2} - \frac{3}{2a} - \frac{3}{2b}$.

Theo giả thiết $a \cdot b = 9 \Rightarrow x + y = \frac{a}{2} + \frac{9}{2a} - \frac{3}{2a} - \frac{a}{6} = \frac{a}{3} + \frac{3}{a} \geq 2 \cdot \sqrt{\frac{a}{3} \cdot \frac{3}{a}} = 2$.

Lại có $x^2 + xy + y^2 = \frac{3}{4}(x+y)^2 + \frac{1}{4}(x-y)^2 \geq \frac{3}{4}(x+y)^2 \Rightarrow x^2 + xy + y^2 \geq 3$. Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $x = y = 1$.

Vậy $(x^2 + xy + z^2)_{\min} = 3$.

Câu 4. Các tứ giác $ANFP, AMEP, AMSN$ nội tiếp nên ta có biến đổi góc

$$\widehat{ANP} = \widehat{AFP} = \widehat{AEP} = \widehat{AMP} \quad (1)$$

Ta có $\widehat{APM} = \widehat{AEM} = \widehat{CES} = \widehat{EFS} = \widehat{EAN}$ suy ra $NA \parallel PM$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $ANPM$ là hình bình hành

a) Các tam giác SKE, SOM cân tại K và O suy ra $\widehat{KES} = \widehat{KSE} = \widehat{OMS}$ suy ra $KE \parallel OM$. Chứng minh tương tự ta có $KF \parallel ON$.

Theo định lý Ta-lét, ta có $\frac{SF}{SN} = \frac{SK}{SO} = \frac{SE}{SM} \Rightarrow EF \parallel MN$. Từ đó, ta có

$\widehat{MNE} = \widehat{NEF} = \widehat{GHF} \Rightarrow MNGH$ là tứ giác nội tiếp, suy ra $TM \cdot TN = TG \cdot TH$, giả sử TS cắt (O) tại S_1 , cắt (K) tại S_2 thì $TM \cdot TN = TG \cdot TH = TS \cdot TS_1 = TS \cdot TS_2$ suy ra $TS_1 = TS_2 \Rightarrow S_1 \equiv S_2 \equiv S$ (do 2 đường tròn (O) và (K) tiếp xúc nhau tại S) suy ra

$TM \cdot TN = TS^2$ hay TS chính là tiếp tuyến chung của (O) và (K) .

b) Ta sẽ chứng minh TA cũng là tiếp tuyến của (O) .

Các đường thẳng AP và MN cắt nhau tại I là trung điểm của mỗi đường.

Ta có TS là tiếp tuyến của (O) nên $\triangle TNS \sim \triangle TSM$ hay $\frac{TM}{TN} = \frac{S_{TSM}}{S_{TNS}} = \left(\frac{SM}{SN}\right)^2$ (*)

Mặt khác ta cũng có $\widehat{AMI} = \widehat{AMN} = \widehat{ASN}$, do $PEMA$ nội tiếp ta có

$$\widehat{NAS} = \widehat{MAI} = \widehat{MAP} = \widehat{PES} = \widehat{FES} = \widehat{NST} = \widehat{NAS}$$

suy ra $\triangle AIM \sim \triangle ANS \Rightarrow AMSN = AI \cdot AS$.

Tương tự, ta cũng có $\triangle AIN \Rightarrow \triangle AMS \Rightarrow ANSM = AIAS \Rightarrow AM \cdot SN = AN \cdot SM$, suy ra

$\left(\frac{SM}{SN}\right)^2 = \left(\frac{AM}{AN}\right)^2$, thay vào (*) ta được $\frac{TM}{TN} = \left(\frac{AM}{AN}\right)^2$ hay TA là tiếp tuyến của (O) .

Vậy $TA = TS$.

Câu 5. a) Ta có $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots + x_n^2 + n^3 \leq (2n-1)(x_1 + x_2 + \dots + x_n) + n^2$

$$\Leftrightarrow [x_1^2 - (2n-1)x_1 + n^2 - n] + [x_2^2 - (2n-1)x_2 + n^2 - n] + \dots + [x_n^2 - (2n-1)x_n + n^2 - n] \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (x_1 - n)(x_1 - n + 1) + (x_2 - n)(x_2 - n + 1) + \dots + (x_n - n)(x_n - n + 1) \leq 0$$

Mặt khác, $(x_k - n)[x_k - (n-1)]$ là tích của hai số nguyên liên tiếp nên không âm, do đó $x_k = n$ hoặc $x_k = n-1$. Do $n \geq 2$ nên x_k là số nguyên dương.

b) Vì $x_k \in \{n; n-1\}$ nên $n(n-1) \leq x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq n^2$. Do đó

$$n^2 < 1 + n^2 \leq 1 + n + x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq n^2 + n + 1 < (n+1)^2$$

Suy ra $x_1 + x_2 + \dots + x_n + 1 + n$ nằm giữa hai số chính phương liên tiếp nên không là số chính phương.

ĐỀ SỐ 17

Câu 1. $\sqrt{x^2+15} + \sqrt{x+3} = \sqrt{x^2+8} + 3x$.

Câu 2. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 - y(x+y) + 1 = 0 \\ (x^2+1)(x+y-2) + y = 0 \end{cases}$$

Câu 3. a) Cho $a+b+c=0$. Tính $P = \frac{a^2}{a^2-b^2-c^2} + \frac{b^2}{b^2-c^2-a^2} + \frac{c^2}{c^2-a^2-b^2}$.

b) Tìm các số nghiệm nguyên dương của phương trình: $5(x^2+xy+y^2) = 7(x+2y)$.

c) Cho x, y là số nguyên dương sao cho x^2+y^2-x chia hết cho xy . Chứng minh x là số chính phương.

Câu 4. Cho tam giác nhọn ABC có tâm đường tròn nội tiếp là điểm I , gọi (K) là đường tròn ngoại tiếp tam giác BIC , trên cung nhỏ BC lấy điểm D , đường tròn (L) qua A tiếp xúc ngoài với (K) tại D cắt AC, AB lần lượt tại E, F . Gọi J là tâm đường tròn nội tiếp tam giác AEF . Giả sử đường tròn ngoại tiếp tam giác BDF cắt cạnh BC tại S .

a) Chứng minh: $SDEC$ nội tiếp.

b) Chứng minh: $EJFS$ nội tiếp.

c) Chứng minh: BC là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác EJF .

Câu 5. a) Cho các số thực a, b, c, d thay đổi thỏa mãn $0 \leq a, b, c, d \leq 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{a}{bcd+1} + \frac{b}{acd+1} + \frac{c}{abd+1} + \frac{d}{abc+1}$$

b) Cho các số thực dương a, b sao cho $a+2b \leq 3$. Tìm GTNN của biểu thức

$$P = \frac{1}{\sqrt{a+3}} + \frac{2}{\sqrt{b+3}}$$

LỜI GIẢI

Câu 1. Điều kiện: $x \geq -3$. Để ý rằng: $\sqrt{x^2+15} - \sqrt{x^2+8} + \sqrt{x+3} = 3x > 0 \Rightarrow x > 0$.

Ta viết lại phương trình thành:

$$\sqrt{x^2+15} - 4 + \sqrt{x+3} - 2 = \sqrt{x^2+8} - 3 + 3x - 3$$

Hay $\frac{x^2-1}{\sqrt{x^2+15}+4} + \frac{x-1}{\sqrt{x+3}+2} = \frac{x^2-1}{\sqrt{x^2+8}+3} + 3(x-1)$

$$\Leftrightarrow (x-1) \left(\frac{x+1}{\sqrt{x^2+15}+4} - \frac{x+1}{\sqrt{x^2+8}+3} + \frac{1}{\sqrt{x+3}+2} - 3 \right) = 0.$$

Với $x > 0$ thì $\frac{x+1}{\sqrt{x^2+15}+4} - \frac{x+1}{\sqrt{x^2+8}+3} + \frac{1}{\sqrt{x+3}+2} - 3 < 0$ nên phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=1$.

Câu 2. Ta viết lại hệ phương trình thành:
$$\begin{cases} x^2+1-y(x+y)=0 \\ (x^2+1)(x+y-2)+y=0 \end{cases}$$
. Dễ thấy $y=0$ không thỏa mãn hệ nên suy ra $y \neq 0$, chia hai phương trình của hệ cho y ta thu được

$$\begin{cases} \frac{x^2+1}{y} - (x+y) = 0 \\ \frac{(x^2+1)}{y} (x+y-2) + 1 = 0 \end{cases}$$

Đặt $\frac{x^2+1}{y} = a; x+y-2 = b$. Do đó ta có hệ $\begin{cases} a-b=2 \\ ab+1=0 \end{cases}$. Phần còn lại bạn đọc tự giải.

Câu 3. a) Từ giả thiết suy ra $a = -(b+c) \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 + 2bc \Rightarrow a^2 - b^2 - c^2 = 2bc$. Tương tự ta có 2 biểu thức nữa bà cộng lại ta thu được

$$P = \frac{a^2}{2bc} + \frac{b^2}{2ca} + \frac{c^2}{2ba} = \frac{a^3 + b^3 + c^3}{2abc}.$$

Chú ý rằng: $a+b+c=0 \Rightarrow a^3+b^3+c^3=3abc \Rightarrow P = \frac{3}{2}$.

b) Từ giả thiết ta suy ra $7(x+2y):5 \Rightarrow x+2y:5 \Rightarrow x+2y=5m \Rightarrow x=5m-2y$ với $m \in \mathbb{Z}$ ta thay vào phương trình

$$(5m-2y)^2 + (5m-2y)y + y^2 - 7m = 0 \Leftrightarrow 3y^2 - 15my + 25m^2 - 7m = 0.$$

Phương trình này có nghiệm nên suy ra

$$\Delta = 225m^2 - 12(25m^2 - 7m) \geq 0 \Leftrightarrow -75m^2 + 84m \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq m \leq \frac{84}{75}.$$

Do m là số nguyên nên suy ra $m=0$ hoặc $m=1$.

c) Đặt $(x, y) = d \Rightarrow \begin{cases} x = md \\ y = nd \\ (m, n) = 1; m, n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$. Thay vào điều kiện bài toán ta có

$$d^2 mn = xy | x^2 + y^2 - x = d(dm^2 + dn^2 - m) \Rightarrow dmn | dm^2 + dn^2 - m.$$

Từ đó suy ra $d | m$ (1). Ta cũng có

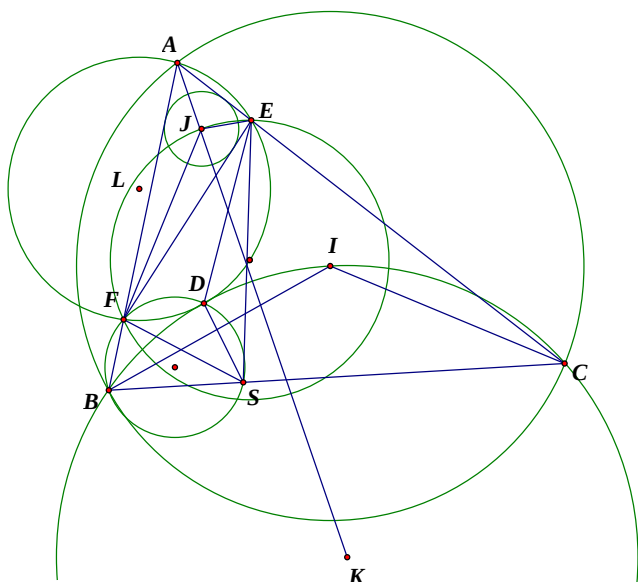
$$dm^2 + dn^2 - m : m \Rightarrow dn^2 : m \text{ do } (m, n) = 1 \Rightarrow (m, n^2) = 1 \Rightarrow m | d \text{ (2)}$$

Từ (1), (2) suy ra $d = m$ nên $x = dm = d^2$.

Vậy x là số chính phương.

Câu 4. a) Ta có $\widehat{SDE} = 360^\circ - \widehat{EDF} - \widehat{SDF} = 180^\circ - \widehat{EDF} + 180^\circ - \widehat{SDF} = \widehat{BAC} + \widehat{ABC}$
 $= 180^\circ - \widehat{ACB}$.

Suy ra tứ giác $SDEC$ nội tiếp.



$$\begin{aligned}
 \text{b) Ta có } \widehat{ESF} &= \widehat{ESD} + \widehat{DSF} = \widehat{ECD} + \widehat{FBD} = 180^\circ - \widehat{DAC} - \widehat{ADC} + 180^\circ - \widehat{DAB} - \widehat{ADB} \\
 &= 360^\circ - (\widehat{DAB} + \widehat{ADB}) - (\widehat{DAC} + \widehat{ADC}) \\
 &= \widehat{BDC} - \widehat{BAC} = \widehat{BIC} - \widehat{BAC} = \frac{1}{2} \widehat{ABC} + \frac{1}{2} \widehat{ACB} \\
 &= \frac{180^\circ - \widehat{BAC}}{2}.
 \end{aligned}$$

$$\text{Lại có } \widehat{EJF} = 180^\circ - \frac{1}{2}(\widehat{AEF} + \widehat{AFE}) = 180^\circ - \frac{1}{2}(180^\circ - \widehat{EAF}) = \frac{180^\circ + \widehat{BAC}}{2}$$

Suy ra $\widehat{ESF} + \widehat{EJF} = 180^\circ$ hay $EJFS$ là tứ giác nội tiếp.

c) Kẻ tiếp tuyến chung Dx của $(K), (L)$. Ta có $\widehat{xDB} = \widehat{DCB}$ và $\widehat{xDF} = \widehat{DEF}$.

Ta có $\widehat{FSB} = \widehat{FDB} = \widehat{DCB} + \widehat{DEF} = \widehat{DES} + \widehat{DEF} = \widehat{SEF}$ suy ra BC là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác EJF .

Câu 5. a) Vì $0 \leq a, b, c, d \leq 1 \Rightarrow abc + 1 \geq abcd + 1 \Rightarrow P \leq \frac{a+b+c+d}{abcd+1}$. Do

$$\begin{cases} (1-a)(1-b) \geq 0 \\ (1-c)(1-d) \geq 0 \\ (1-ab)(1-cd) \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b \leq 1+ab \\ c+d \leq 1+cd \\ ab+cd \leq 1+abcd = 3+abcd \end{cases}$$

$$\Rightarrow a+b+c+d \leq 2+ab+cd \leq 2+1+abcd.$$

$$\text{Vậy } P \leq \frac{3+abcd}{1+abcd} \leq \frac{3(1+abcd)}{1+abcd} = 3, \text{ khi } a=0, b=c=d=1 \text{ thì } P=3.$$

Vậy GTNN của P là 3.

b) Cách 1

$$\text{Ta có } \sqrt{(a+3) \cdot 4} \leq \frac{a+7}{2}; \sqrt{(b+3) \cdot 4} \leq \frac{b+7}{2} \text{ suy ra } P \geq \frac{4}{a+7} + \frac{8}{b+7}.$$

$$\text{Ta có } \frac{4}{a+7} + \frac{8}{b+7} = \frac{4}{a+7} + \frac{a+7}{16} + \frac{8}{b+7} + \frac{b+7}{8} - \frac{1}{16}(a+2b+21).$$

$$\text{Theo bất đẳng thức AM - GM ta có } \frac{4}{a+7} + \frac{a+7}{16} \geq 1; \frac{8}{b+7} + \frac{b+7}{8} \geq 2 \text{ nên}$$

$$P \geq 3 - \frac{1}{16}(3+21) = \frac{3}{2}.$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $a = b = 1$.

ĐỀ SỐ 18

Câu 1. Giải phương trình: $x\sqrt{x+1} + \sqrt{3-x} = 2\sqrt{x^2+1}$.

Câu 2. Xét hệ phương trình: $\begin{cases} x+my-m=0 \\ x^2+y^2-x=0 \end{cases}$. Tìm m để hệ phương trình có 2 cặp nghiệm phân biệt $(x_1; y_1), (x_2; y_2)$ sao cho $(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$ lớn nhất.

Câu 3. a) Xét các số thực x, y, z thỏa mãn điều kiện $x+y+z=2; x^2+y^2+z^2=18; xyz=-1$.

Tìm giá trị biểu thức: $P = \frac{1}{xy+z-1} + \frac{1}{yz+x-1} + \frac{1}{zx+y-1}$.

b) Cho m, n là 2 số nguyên dương lẻ sao cho $n^2 - 1$ chia hết cho $|m^2 - n^2 + 1|$. Chứng minh rằng $|m^2 - n^2 + 1|$ là số chính phương.

c) Tìm tất cả các số nguyên x, y thỏa mãn điều kiện: $x^2(x+y) = y^2(x-y)^2$.

Câu 4. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp (O) . Các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H . Tiếp tuyến tại B, C của (O) cắt nhau tại G , $GD \cap EF = S$. Gọi M là trung điểm của cạnh BC . Giả sử $EF \cap BC = T, AT \cap (O) = K$.

a) Chứng minh 5 điểm A, K, F, E, H cùng nằm trên một đường tròn.

b) Chứng minh M, S, H thẳng hàng.

Câu 5. Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn điều kiện: $xyz = x + y + z + 2$. Tìm GTLN của biểu thức: $P = \frac{1}{\sqrt{x^2+2}} + \frac{1}{\sqrt{y^2+2}} + \frac{1}{\sqrt{z^2+2}}$.

LỜI GIẢI

Câu 1. Điều kiện: $-1 \leq x \leq 3$.

Ta có bất đẳng thức quen thuộc: $(ax+by)^2 \leq (a^2+b^2)(x^2+y^2)$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{a}{x} = \frac{b}{y}$.

Áp dụng vào bài toán ta có:

$$(x\sqrt{x+1} + \sqrt{3-x})^2 \leq (x^2+1)(x+1+3-x) = 4(x^2+1).$$

Từ đó suy ra $x\sqrt{x+1} + \sqrt{3-x} \leq 2\sqrt{x^2+1}$. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\frac{x}{\sqrt{x+1}} = \frac{1}{\sqrt{3-x}} \Leftrightarrow x\sqrt{3-x} = \sqrt{x+1} \Leftrightarrow x^2(3-x) = x+1 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + x + 1 = 0 \text{ (với } x > 0)$$

$$\text{Hay } (x-1)(x^2-2x-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=1+\sqrt{2} \end{cases}$$

Câu 2. Từ phương trình đầu của hệ ta suy ra $x = -my + m$, thay vào phương trình thứ hai của hệ ta thu được

$$(m-my)^2 + y^2 + my - m = 0 \Leftrightarrow (m^2+1)y^2 + (m-2m^2)y + m^2 - m = 0 \quad (*)$$

Để hệ có 2 nghiệm phân biệt thì phương trình (*) phải có 2 nghiệm phân biệt y. Tức là

$$\Delta = (m-2m^2)^2 - 4(m^2+1)(m^2-m) > 0 \Leftrightarrow -3m^2 + 4m > 0 \Leftrightarrow 0 < m < \frac{4}{3}$$

Khi đó ta có: $x_1 = m = my_1$; $x_2 = m - my_2$ với y_1, y_2 là hai nghiệm của phương trình (*).

Theo hệ thức Vi-ét, ta có $\begin{cases} y_1 + y_2 = \frac{2m^2 - m}{m^2 + 1} \\ y_1 y_2 = \frac{m^2 - m}{m^2 + 1} \end{cases}$. Ta có biến đổi sau

$$A = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = (my_2 - my_1)^2 + (y_1 - y_2)^2 = (m^2 + 1)[(y_1 + y_2)^2 - 4y_1 y_2]$$

$$\begin{aligned} \text{Hay } A &= (m^2 + 1) \left[\left(\frac{2m^2 - m}{m^2 + 1} \right)^2 - 4 \cdot \frac{m^2 - m}{m^2 + 1} \right] \\ &= \frac{(2m^2 - m)^2 - 4(2m^2 - m)(m^2 + 1)}{m^2 + 1} = \frac{-3m^2 + 4m}{m^2 + 1}. \end{aligned}$$

Ta có $A = 1 - \frac{(2m-1)^2}{m^2+1} \leq 1$. Vậy A lớn nhất bằng 1 khi và chỉ khi $m = \frac{1}{2}$.

Câu 3. a) Ta có $xy + z - 1 = xy + (2 - x - y) - 1 = xy - x - y + 1 = (x-1)(y-1)$.

Tương tự ta cũng có 2 biểu thức còn lại. Từ đó suy ra

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{(x-1)(y-1)} + \frac{1}{(y-1)(z-1)} + \frac{1}{(z-1)(x-1)} = \frac{x+y+z-3}{(x-1)(y-1)(z-1)} \\ &= \frac{-1}{xyz - (xy + yz + zx) + x + y + z - 1} = \frac{1}{xy + yz + zx} \end{aligned}$$

Ta có: $(x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx)$.

Từ điều kiện $x+y+z=2, x^2+y^2+z^2=18$ ta suy ra

$$4 = 18 + 2(xy + yz + zx) \Rightarrow xy + yz + zx = -7 \text{ nên } P = -\frac{1}{7}.$$

b) Nếu $m=n$ thì ta có điều phải chứng minh

Xét $m \neq n$. Ta đặt $\begin{cases} m+n=2x \\ m-n=2y \end{cases} (x, y \in \mathbb{Z}, x > 0, y \neq 0)$. Khi đó, ta có $\begin{cases} m=x+y \\ n=x-y \end{cases}$ do

$$m, n > 0 \text{ suy ra } \begin{cases} x+y > 0 \\ x-y > 0 \end{cases} \Rightarrow x > |y|.$$

Do $n^2 - 1 : |m^2 - n^2 + 1|$ suy ra $-(m^2 - n^2 - 1) + m^2 : |m^2 - n^2 + 1| \Rightarrow m^2 : |m^2 - n^2 + 1|$. Suy ra $m^2 = k(m^2 - n^2 + 1)$ (1) (với $k \in \mathbb{Z}$).

Thay $m = x+y, n = x-y$ ta có

$$(x+y)^2 = k(4xy+1) \Leftrightarrow x^2 - 2(2k-1)xy + y^2 - k = 0 \quad (*)$$

Phương trình (*) có 1 nghiệm là $x \in \mathbb{Z}$ nên có một nghiệm nữa là x_1 . Theo hệ thức Vi-ét ta có

$$\begin{cases} x + x_1 = 2(2k-1) \\ xx_1 = y^2 - k \end{cases}$$

Từ đây ta suy ra $x_1 \in \mathbb{Z}$.

Nếu $x_1 > 0 \Rightarrow (x_1; y)$ là cặp nghiệm thỏa mãn (*) suy ra

$$x_1 > |y| \Rightarrow y^2 - k = xx_1 > |y|^2 = y^2 \Rightarrow k < 0 \Rightarrow x_1 + x = 2(2k-1) < 0 \text{ (mâu thuẫn)}$$

Nếu $x_1 < 0$ thì $xx_1 = y^2 - k < 0 \Rightarrow k > y^2 \Rightarrow k > 0 \Rightarrow 4xy + 1 > 0 \Rightarrow y > 0$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } k &= x_1^2 - 2(2k-1)x_1y + y^2 = x_1^2 + 2(2k-1)|x_1|y + y^2 \\ &> 2(2k-1)|x_1|y \geq 2(2k-1) > k \text{ (mâu thuẫn)}. \end{aligned}$$

Vậy $x_1 = 0$. Khi đó $k = y^2$ và $m^2 - n^2 + 1 = \frac{m^2}{k} = \left(\frac{m}{y}\right)^2$ nên $|m^2 - n^2 + 1|$ là số chính phương.

c) Ta thấy $x = y = 0$ là một nghiệm của phương trình.

Với $x, y \neq 0$. Giả sử $(x, y) = d \Rightarrow \begin{cases} x = md \\ y = nd \\ (m, n) = 1 \end{cases}$ thay vào phương trình ta được

$$m^2 d^2 (md + nd) = (md - nd)^2 n^2 d^2 \Leftrightarrow m^2 (m+n) = n^2 d (m-n)^2 \Rightarrow m^2 (m+n) : n^2.$$

$$\text{Do } (m, n) = 1 \Rightarrow \begin{cases} (m^2, n^2) = 1 \\ (m+n, n^2) = 1 \end{cases} \Rightarrow n^2 = 1 \Rightarrow n = \pm 1.$$

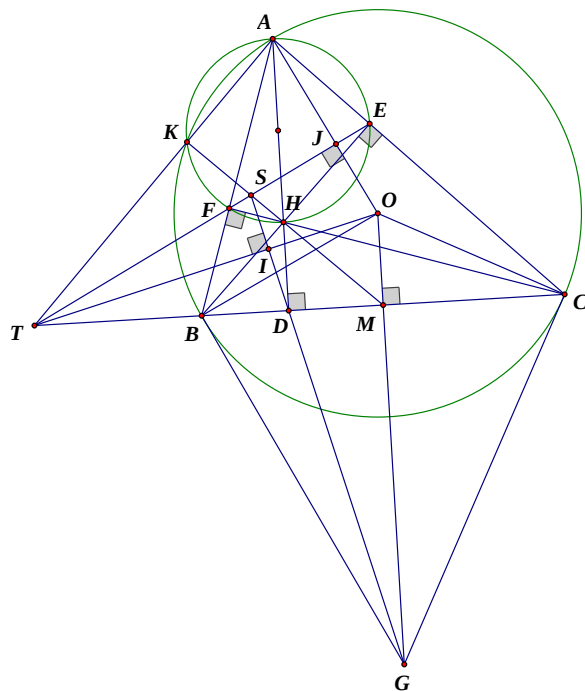
Nếu $n = 1 \Rightarrow m^2(m+1) : (m-1)^2 \Rightarrow m+1 : (m-1)^2 \Rightarrow m+1 : m-1 \Rightarrow m \in \{3; 2; 0; -1\}$.

Từ đó tìm được các cặp nghiệm $(x; y) = (27; 9), (24; 12)$.

Nếu $n = -1 \Rightarrow m^2(m-1) = d(m+1)^2 \Rightarrow m-1; m+1 \Rightarrow m \in \{-3; -2; 0; 1\}$ kiểm tra không có giá trị nào thỏa mãn.

Vậy $(x; y) = (27; 9), (24; 12)$.

Câu 4. a) Bạn đọc tự làm.



b) Tứ giác $EFDM$ nội tiếp và AD là phân giác của $\widehat{EDF}$ nên

$$\widehat{MDE} = \widehat{FDB} = \widehat{TEM} \Rightarrow \triangle EMD \sim \triangle TME \Rightarrow ME^2 = MD \cdot MT$$

Thay $ME^2 = MB^2 = MO \cdot MG$, suy ra $MO \cdot MG = MD \cdot MT \Rightarrow \triangle EMD \sim \triangle TME$.

$\triangle OMT \sim \triangle DMT \Rightarrow SD \perp TO$ tại I.

Gọi J là giao điểm của AO và EF thì $OA \perp EF$ tại J (tính chất quen thuộc).

Ta có $TS.TJ = TI.TO = TD.TM = TE.TF \Rightarrow AKSJ$ là tứ giác nội tiếp nên $\widehat{SKA} = 90^\circ \Rightarrow SK \perp TA$. Ta cũng có 5 điểm A, K, E, F, H cùng nằm trên một đường tròn nên $HK \perp TA$ nên K, S, H thẳng hàng. (1)

Lại có $TK.TA = TD.TM \Rightarrow AKDM$ nội tiếp, suy ra $\widehat{ADM} = \widehat{AKM} = 90^\circ \Leftrightarrow MK \perp KA$ nên M, H, K thẳng hàng. (2)

Từ (1) và (2) suy ra M, S, K thẳng hàng.

Câu 5. Ta viết lại giả thiết thành:

$$(1+x)(1+y) + (1+y)(1+z) + (1+z)(1+x) = (1+x)(1+y)(1+z)$$

Hay $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z+1} = 1$.

Áp dụng bất đẳng thức dạng: $(ma+nb)^2 \leq (m^2+n^2)(a^2+b^2)$. Ta có

$$(x+1)^2 = \left(x \cdot 1 + \sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 \leq (x^2+2) \left(1 + \frac{1}{2} \right) \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x^2+2}} \leq \frac{\sqrt{6}}{2} \cdot \frac{1}{x+1}.$$

Tương tự ta cũng có 2 bất đẳng thức nữa và cộng lại thì ta suy ra

$$P = \frac{1}{\sqrt{x^2+2}} + \frac{1}{\sqrt{y^2+2}} + \frac{1}{\sqrt{z^2+2}} \leq \frac{\sqrt{6}}{2} \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z+1} \right) = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 2$.

Vậy GTLN của P là $\frac{\sqrt{6}}{2}$.